

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. И.А. БУНИНА»

CONTINUUM

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА.
ОБРАЗОВАНИЕ

Учредитель и издатель: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина» (399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28, 1)

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Регистрационный номер средства массовой информации ПИ № ФС77-69418 от 14 апреля 2017 г.).

Журнал входит в Перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

- | | |
|---------------------------|--|
| Щербатых С. В. | – главный редактор , доктор педагогических наук, профессор, ректор Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина, профессор кафедры математики, информатики, физики и методики обучения (Елец, Россия); |
| Дворяткина С. Н. | – заместитель главного редактора , доктор педагогических наук, доцент, проректор по научной и инновационной деятельности Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина, профессор кафедры математики, информатики, физики и методики обучения (Елец, Россия); |
| Абылкасымова А. Е. | – доктор педагогических наук, профессор, академик НАН РК, академик РАО, директор Центра развития педагогического образования, заведующий кафедрой методики преподавания математики, физики и информатики Казахского национального педагогического университета им. Абая (Алматы, Казахстан); |
| Артюхина М. С. | – доктор педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики, физики и информатики Арзамасского филиала ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (Арзамас, Россия); |
| Боровских А. В. | – доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры образовательных технологий, профессор кафедры дифференциальных уравнений Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия); |
| Гриншкун В. В. | – доктор педагогических наук, профессор, академик РАО, профессор департамента информатизации образования Института цифрового образования Московского городского педагогического университета (Москва, Россия); |
| Грушевский С. П. | – доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, декан факультета математики и компьютерных наук, заведующий кафедрой информационных образовательных технологий Кубанского государственного университета (Краснодар, Россия); |
| Заславская О. Ю. | – доктор педагогических наук, профессор, профессор департамента информатизации образования Института цифрового образования Московского городского педагогического университета (Москва, Россия); |
| Игнатушина И. В. | – доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, декан физико-математического факультета Оренбургского государственного педагогического университета (Оренбург, Россия); |
| Карапетян В. С. | – доктор психологических наук, профессор, профессор кафедры психологии развития и педагогической психологии Армянского |

- государственного педагогического университета им. Х. Абовяна (Ереван, Армения);
- Каракозов С. Д.** – доктор педагогических наук, профессор, директор Института математики и информатики, профессор кафедры теоретической информатики и дискретной математики Московского педагогического государственного университета (Москва, Россия);
- Орлов В. В.** – доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры методики обучения математике и информатике Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена (Санкт-Петербург, Россия);
- Разинкина Е. М.** – доктор педагогических наук, профессор, помощник генерального директора ФГБУ «Национальный медицинский исследовательский центр имени В.А. Алмазова» Минздрава России (Санкт-Петербург, Россия);
- Райхельгауз Л. Б.** – доктор педагогических наук, профессор кафедры математического анализа, теории и методики обучения математике физико-математического факультета Ярославского государственного педагогического университета им. К.Д. Ушинского (Ярославль, Россия);
- Рыжова Н. И.** – доктор педагогических наук, профессор Государственного университета просвещения, Академии реализации государственной политики и профессионального развития работников образования Министерства просвещения Российской Федерации (Москва, Россия);
- Саввина О. А.** – доктор педагогических наук, профессор, профессор кафедры математики, информатики, физики и методики обучения Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина (Елец, Россия);
- Сергеева Т. Ф.** – доктор педагогических наук, профессор, профессор Дирекции образовательных программ Московского городского педагогического университета (Москва, Россия);
- Смирнов Е. И.** – доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, теории и методики обучения математике Ярославского государственного педагогического университета им. К.Д. Ушинского (Ярославль, Россия);
- Снегурова В. И.** – доктор педагогических наук, доцент, ведущий научный сотрудник Центра математического и естественно-научного общего образования Института содержания и методов обучения им. В.С. Леднева (Москва, Россия);
- Тарасова О. В.** – доктор педагогических наук, профессор, директор института педагогики и психологии Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева (Орёл, Россия);
- Шабанова М. В.** – доктор педагогических наук, профессор, заместитель начальника отдела методического обеспечения процедур оценки качества общего образования ГАОУ ДПО города Москвы «Московский центр качества образования» (Москва, Россия);
- Мельников Р. А.** – ответственный секретарь, кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики, информатики, физики и методики обучения Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина (Елец, Россия).

THE FOUNDER AND THE PUBLISHER

The founder and the publisher: Federal State Budget Educational Institution of Higher Education «Bunin Yelets State University» (399770, Lipetsk region, Yelets, st. Kommunarov, 28, 1).

The journal is registered in the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media. (Registration number: PI № FS 77-69418 of 14 april 2017).

The journal is included in The List of Russian peer-reviewed scientific journals, in which main scientific results of doctoral and candidate's theses must be published.

THE EDITORIAL BOARD

Shcherbatykh S. V.	Editor-in-chief , Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Rector, Professor of the Department of Mathematics, Computer Science, Physics and Teaching Methods, Bunin Yelets State University (Yelets, Russia);
Dvoryatkina S. N.	Deputy Editor-in-Chief , Doctor of Pedagogy, Associate Professor, Vice-Rector for Research and Innovation, Professor of the Department of Mathematics, Computer Science, Physics and Teaching Methods, Bunin Yelets State University (Yelets, Russia);
Abylkasymova A. E.	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Academician of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Academician of the RAO, Director of the Center for the Development of Pedagogical Education, Head of the Department of Methods of Teaching Mathematics, Physics and Computer Science of the Abai Kazakh National Pedagogical University (Almaty, Kazakhstan);
Artyukhina M. S.	Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics, Physics, and Computer Science at the Arzamas Branch of the National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Arzamas, Russia);
Borovskikh A. V.	Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Professor of the Department of Educational Technologies, Professor of the Department of Differential Equations of the Lomonosov Moscow State University (Moscow, Russia);
Grinshkun V. V.	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Professor of the Department of Education Informatization, Institute of Digital Education, Moscow City Pedagogical University (Moscow, Russia);
Grushevsky S. P.	Doctor of Pedagogical Sciences, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor. Dean of the Faculty of Mathematics and Computer Science at Kuban State University, Head of the Department of Information Educational Technologies (Krasnodar, Russia);
Zaslavskaya O. Yu.	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Professor of the Department of Education Informatization, Institute of Digital Education, Moscow City Pedagogical University (Moscow, Russia);
Ignatushina I. V.	Doctor of Pedagogical Sciences, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Dean of the Faculty of Physics and Mathematics, Orenburg State Pedagogical University (Orenburg, Russia);
Karapetyan V. S.	Doctor of Psychology, Professor, Professor of the Department of Developmental and Educational Psychology of Armenian State Pedagogical University Kh. Abovyan (Yerevan, Armenia);
Karakozov S. D.	Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Director of the Institute of Mathematics and Computer Science, Professor of the Department of Theoretical Computer Science and Discrete Mathematics of Moscow

- Orlov V. V.** Pedagogical State University (Moscow, Russia);
Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Professor of the Department of Methods of Teaching Mathematics and Computer Science of the A.I. Herzen Russian State Pedagogical University (St. Petersburg, Russia);
- Razinkina E. M.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Assistant General Director of the Almazov National Medical Research Centre (St. Petersburg, Russia);
- Raichelgauz L. B.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor of the Department of Mathematical Analysis, Theory and Methods of Teaching Mathematics of Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky (Yaroslavl, Russia);
- Ryzhova N. I.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professorat at the State University of Education, Academy of State Policy Implementation and Professional Development of Education Workers of the Ministry of Education of the Russian Federation (Moscow, Russia);
- Savvina O. A.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Professor of the Department of Mathematics, Computer Science, Physics and Teaching Methods, Bunin Yelets State University (Yelets, Russia);
- Sergeeva T. F.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Professor of the Directorate of Educational Programs of the Moscow City Pedagogical University (Moscow, Russia);
- Smirnov E. I.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Department of Mathematical Analysis, Theory and Methods of Teaching Mathematics of Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky (Yaroslavl, Russia);
- Snegurova V. I.** Doctor of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Leading Researcher at the Center for Mathematical and Natural Science General Education of the Lednev Institute of Content and Teaching Methods (Moscow, Russia);
- Tarasova O. V.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Director of the Institute of Pedagogy and Psychology, Oryol State University named after I.S. Turgenyev (Oryol, Russia);
- Shabanova M. V.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Deputy Head of the Department of Methodological Support for General Education Quality Assessment Procedures at the Moscow Center for Education Quality (Moscow, Russia);
- Melnikov R. A.** Executive Secretary, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics, Computer Science, Physics and Teaching Methods, Bunin Yelets State University (Yelets, Russia).

СОДЕРЖАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Власова-Галасеева Н. М., Смирнов Е. И. ИНСТРУМЕНТИРОВАНИЕ МАТЕМАТИКО-ЦИФРОВЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ ШКОЛЬНИКОВ В ПРОЦЕССЕ НАСТРОЙКИ ЦВЕТОВОСПРИЯТИЯ РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ (НА ПРИМЕРЕ МОДЕЛЕЙ RGB И HSV)	10
Семеняченко Ю. А. ВОЗМОЖНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ ЧЕРЕЗ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ФИЗИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ	25
Шабанова М. В., Розыев А. Д. о. УЧЕБНЫЕ ПРОЕКТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ НА ГЕНЕРИРОВАНИЕ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА.....	36
Яковлева Ю. А. ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ РЕЛЕВАНТНОГО ВЫБОРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИТУАЦИИ В 7–9 КЛАССАХ	53

ТЕОРИИ, МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Богун В. В. ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДВУМЕРНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ НА ОСНОВЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕДАКТОРА ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ MICROSOFT EXCEL	72
Синамбела П. Н. Дж. М. ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОНЛАЙН-ВЗАИМНОЙ МЕЖКУЛЬТУРНОЙ ПОДГОТОВКИ ПО МАТЕМАТИКЕ: ПРЕДЛОЖЕНИЯ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ.....	96
Труханова Н. П. ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ МЕТОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НА КАЧЕСТВО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ПРИ БЕСКОНТРОЛЬНОМ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕЙРОСЕТЕВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ.....	107
Уймин А. Г., Шумский А. Д. НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ СОПРОВОЖДЕНИЕ ИНТЕГРАЦИИ ОЛИМПИАДНОГО ДВИЖЕНИЯ И ДЕМОНСТРАЦИОННОГО ЭКЗАМЕНА: ИЗМЕРИМЫЕ ИНДЕКСЫ КАЧЕСТВА ПОДГОТОВКИ И МЕДИАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ.....	117

МЕТОДОЛОГИЯ И ТЕХНОЛОГИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

Михайленко М. В., Удалов С. Р. ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ОБУЧЕНИЯ ДЕТЕЙ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ ТЕХНОЛОГИЯМ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В СИСТЕМЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ	130
--	-----

ПЕРСОНАЛИИ

Бровка Н. В., Мельников Р. А. НАУЧНАЯ ШКОЛА ПО КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ АКАДЕМИКА ФЁДОРА ДМИТРИЕВИЧА ГАХОВА (К 120-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ УЧЁНОГО).....	143
Волков Д. Ю., Галунова К. В. ЮРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ ВОЛКОВ: ГЕОМЕТР, ПЕДАГОГ, РУКОВОДИТЕЛЬ КАФЕДРЫ ГЕОМЕТРИИ ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА (К 95-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)	160

CONTENTS

METHODOLOGICAL ASPECTS OF TEACHING MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE IN THE GENERAL EDUCATION SYSTEM

Vlasova-Galaseeva N. M., Smirnov E. I. MATHEMATICAL AND DIGITAL COMPETENCIES INSTRUMENTING OF STUDENTS IN THE PROCESS OF COLOR PERCEPTION CONFIGURING OF ROBOTIC SYSTEMS (USING THE RGB AND HSV MODELS AS AN EXAMPLE)	10
Semenyachenko Yu. A. OPPORTUNITIES FOR FORMING MATHEMATICAL LITERACY IN SCHOOLS THROUGH SOLVING PROBLEMS WITH PHYSICAL CONTENT.....	25
Shabanova M. V., Rozyyev A. D. o. EDUCATIONAL PROJECTS IN MATHEMATICS AIMED AT GENERATING PRACTICE-ORIENTED TASKS USING ARTIFICIAL INTELLIGENCE.....	36
Yakovleva Yu. A. TEACHING PROBABILITY PROBLEM SOLVING IN GRADES 7–9 USING THE METHOD OF RELEVANT CHOICE OF A MATHEMATICAL MODEL FOR A STOCHASTIC SITUATION.....	53

THEORIES, MODELS AND TECHNOLOGIES OF TEACHING MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE IN THE SYSTEM OF VOCATIONAL EDUCATION

Bogun V. V. USING STATISTICAL ANALYSIS OF TWO-DIMENSIONAL DATA TO DEVELOP UNIVERSITY STUDENTS' PROFESSIONAL COMPETENCIES BASED ON THE USE OF MICROSOFT EXCEL SPREADSHEET EDITOR.....	72
Sinambela P. N. J. M. ENHANCING ONLINE INTERCULTURAL MATHEMATICS LEARNING: PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS' SUGGESTIONS	96
Trukhanova N. P. EXPERIMENTAL EVALUATION METHODOLOGICAL INTERVENTIONS TO SUSTAIN INDEPENDENT WORK QUALITY IN ADVANCED MATHEMATICS AMID STUDENTS' UNSUPERVISED USE OF GENERATIVE AI TOOLS.....	107
Uymin A. G., Shumsky A. D. SCIENTIFIC AND METHODOLOGICAL SUPPORT FOR INTEGRATION OF OLYMPIAD MOVEMENT AND DEMONSTRATION EXAM: MEASURABLE PREPARATION QUALITY INDICES AND MEDIATION ANALYSIS.....	117

METHODOLOGY AND TECHNOLOGY OF VOCATIONAL EDUCATION IN THE ERA OF DIGITAL TRANSFORMATION

Mikhailenko M. V., Udalov S. R. PSYCHOLOGICAL AND PEDAGOGICAL CONDITIONS FOR TEACHING ARTIFICIAL INTELLIGENCE TECHNOLOGIES TO CHILDREN WITH DISABILITIES IN SUPPLEMENTARY EDUCATION	130
--	-----

PERSONALITIES

Brovka N. V., Melnikov R. A. SCIENTIFIC SCHOOL ON BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF ACADEMICIAN FYODOR DMITRIEVICH GAKHOV (ON THE 120TH ANNIVERSARY OF THE SCIENTIST'S BIRTH).....	143
--	-----

Volkov D. Yu., Galunova K. V. YURI ALEXANDROVICH VOLKOV: GEOMETER,
TEACHER, HEAD OF THE DEPARTMENT OF GEOMETRY AT LENINGRAD
UNIVERSITY (ON THE 95TH ANNIVERSARY OF HIS BIRTH) 160

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-3-10-24

УДК
373.5.02

ИНСТРУМЕНТИРОВАНИЕ МАТЕМАТИКО-ЦИФРОВЫХ КОМПЕТЕНЦИЙ ШКОЛЬНИКОВ В ПРОЦЕССЕ НАСТРОЙКИ ЦВЕТОВОСПРИЯТИЯ РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ (НА ПРИМЕРЕ МОДЕЛЕЙ RGB И HSV)

Власова-Галасеева Наталия Михайловна

старший преподаватель

Смирнов Евгений Иванович

д.п.н., профессор,

ведущий научный сотрудник

Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского

Ярославский государственный педагогический университет им.

К.Д. Ушинского; Южный математический

институт – филиал Владикавказского

научного центра РАН

Аннотация. В современном обществе математика становится серьёзным инструментом для решения широкого круга задач (анализ экономических процессов, оптимизация производства, настройка систем машинного зрения и т. д.). В контексте цифровизации образования и освоения робототехнических систем особую значимость приобретает математико-цифровая компетентность школьников – как интегративное качество, образующее симбиоз математических компетенций с умением применять цифровые инструменты для решения сложных практико-ориентированных задач. Проблема исследования: каковы этапы и условия методического инструментария формирования математико-цифровых компетенций школьников в процессе настройки цветовосприятия робототехнических систем. Цель исследования: выявить параметры и содержание симбиоза математических и цифровых компетенций при настройке инструментов цветовой модели RGB и HSV робототехнических систем в дополнительном образовании школьников. Методы исследования: сложностная парадигма Э. Морена, математическое и компьютерное моделирование, алгоритмы обработки данных цветовой модели RGB и HSV, обработка и программирование сенсорной информации, проектное обучение. Результаты исследования: компоненты эпистемологии инструментария математико-цифровых компетенций, параметры математико-цифровой оснастки цветовой модели RGB и HSV робототехнических систем, иерархический комплекс подзадач многоэтапного математико-цифрового задания, модель инструментария математико-цифровых компетенций школьника.

Ключевые слова: робототехника, математико-цифровые компетенции, цветовая модель RGB, цветовая модель HSV

Для цитирования: Власова-Галасеева Н.М., Смирнов Е.И. Инструментирование математико-цифровых компетенций школьников в процессе настройки

цветовосприятия робототехнических систем (на примере моделей RGB и HSV) // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 3 (43). С. 10–24. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-10-24

Права: © Н.М. Власова-Галасеева, Е.И. Смирнов (2026). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И.А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

Введение

В робототехнике цветовые модели помогают распознавать объекты по цвету, выделять целевые зоны на изображении, ориентироваться в пространстве с помощью цветных меток, сортировать предметы по цветовым признакам. Цветовая модель в робототехнике – это математический способ представления цветов посредством числовых значений (как правило, трёх- или четырёх компонентов), который используется для распознавания и анализа объектов в системах технического зрения роботов. Эти компоненты называют цветовыми координатами (или цветовыми компонентами). Ученые и практики разрабатывают цветовые пространства и преобразования, которые минимизируют эту зависимость от интенсивности освещения (модель HSY (Xin Luan, 2010), c1c2c3, l1l2l3, m1m2m3 (Mohan Sridharana), моделирование распределений цветов – 3D-гауссианы для каждого цвета). Интеграция цветовых моделей с алгоритмами компьютерного зрения позволяет роботам эффективно взаимодействовать с окружающим миром, распознавая и интерпретируя цветовые сигналы. Совокупность всех возможных комбинаций цветовых координат образует цветовое пространство – многомерное пространство, где каждой точке соответствует определённый цвет в рамках данной модели. При взаимодействии с робототехническими системами школьники часто встречаются с необходимостью анализа цвета и изображения, когда фактор корректного чтения цвета часто определяет дальнейшие адекватные действия по управлению роботом. При этом эмпирически выявлен низкий уровень умения школьников в определении цвета, используя специализированные датчики, недостаточное развитие математико-цифровых компетенций. Возможность исследования робототехнических систем со сложным инструментарием соответствует сложностной парадигме Э. Морена (Смирнов, 2025), которая лежит в основе эффективного развития личностных качеств обучающихся, в том числе, формирования математико-цифровой грамотности школьников. *Проблема исследования:* каковы этапы и условия методического инструментирования формирования математико-цифровых компетенций школьников в процессе настройки цветовосприятия робототехнических систем. *Цель исследования:* выявить параметры и содержание симбиоза математических и цифровых компетенций при настройке инструментов цветовых моделей RGB и HSV робототехнических систем в дополнительном образовании школьников. При этом математические механизмы и алгоритмы, отвечающие за определение цвета, осознаются обучающимися редко и доказывают необходимость и актуальность междисциплинарного подхода в системе робототехнического образования.

Методология и методы

Формирование математико-цифровой компетентности школьников в дополнительном образовании имеет ряд особенностей в контексте освоения робототехнических устройств. В робототехнике симбиоз математического и компьютерного моделирования является необходимым фактором решения практико-ориентированных задач: расчёта параметров механизмов, программирования движений, анализа данных с датчиков, калибровке движения робота, использование и программирование микроконтроллеров и датчиков, равно как и развитие алгоритмического и вычислительного мышления обучающихся. *Математико-цифровая компетентность обучающегося – это интегративное качество личности, актуализирующее возможности и способности реализовать потенциал симбиоза математических компетенций с умением применять цифровые инструменты для решения сложных практико-ориентированных задач.* Необходимость физического и концептуального моделирования,

статистика работы с данными, естественность проектных заданий и широта применяемых разделов математики и информатики создают целостный фактор направленного формирования математико-цифровой компетентности обучающихся (Дворяткина, 2020; Dvoryatkina, 2016; Dvoryatkina, 2021; Смирнов, 2016; Секованов, 2025).

При этом возможности инструментализации практико-ориентированных действий в контексте математического и компьютерного моделирования создают насыщенную образовательную среду формирования математико-цифровых компетенций обучающихся (рис. 1). При этом возможность использования робототехнических платформ (например, LEGO Mindstorms, Arduino) при выполнении многоэтапных математико-информационных заданий, сбор данных о движении робота и построение графиков зависимостей, взаимопереходы знаковых систем и рефлексивный контроль активно содействуют взаимодействию и диалогу культур среди обучающихся дополнительного образования.



Рис. 1. Симбиоз концептуального, математического и компьютерного моделирования в освоения робототехники

Важным направлением в освоении робототехнических систем является деятельность по управлению цветом и интеграция цветовых моделей с алгоритмами компьютерного зрения, что позволяет роботам эффективно взаимодействовать с окружающим миром, распознавая и интерпретируя цветовые сигналы. Самым распространенным цветовым пространством, которое используется в инструментарии робототехнических устройств, является цветовое пространство RGB. В основе *цветового формата RGB* (*R* – red, *G* – green, *B* – blue) лежит воспроизведение цвета путём сложения трёх основных цветов: красного, зелёного и синего. За каждый цвет отвечает определённый канал датчика, который определяет количество компоненты соответствующего цвета в просматриваемом (Гриневич, 2023).

Материалы и инструментарий

RGB модель аддитивна, каждый цвет формируется путём линейных комбинаций трёх аддитивных компонент (красный, синий, зелёный), каждая в своей пропорции. Цветообразование происходит наложением световых потоков с разной длиной волны. Цветовое про-

пространство RGB математически представляется в виде трёхмерного куба, где каждая точка независимо от того, где она находится (вершина, ребро, внутри куба) представляет собой уникальный цвет. Нулевая точка – чёрный цвет (точка, где насыщенность других цветов отсутствует), оси координат соответствуют основным цветам: X – красный, Y – зелёный, Z – синий (рис. 1). Каждая точка имеет три координаты – степень насыщенности каждого из трёх основных цветов (рис. 2) (Гриневич, 2023).

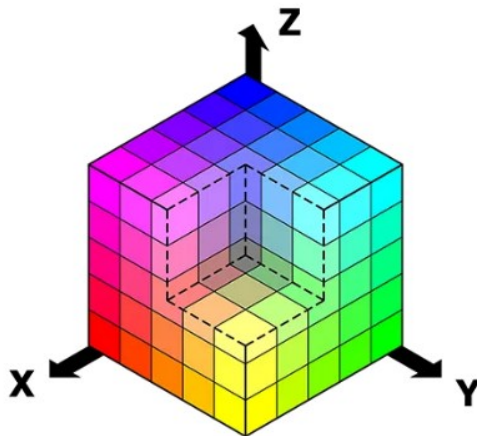


Рис. 2. Цветовое пространство RGB куба

Интенсивность каждого цвета измеряется в диапазоне $[0, 1]$ или $[0, 255]$ в 8-битной реализации. Максимальная интенсивность каждой из компонент даёт белый цвет. В таком случае каждый цвет в модели RGB можно представить в виде вектора в этом пространстве. Уравнение вектора цвета выглядит так:

$$\vec{C} = r\vec{R} + g\vec{G} + b\vec{B},$$

где r, g, b – коэффициенты (интенсивности соответствующих компонентов), а $\vec{R}, \vec{G}, \vec{B}$ – базисные векторы, соответствующие красному, зелёному и синим цветам. Направление вектора определяет цвет, а его модуль – яркость. Если каждый цвет определять, как точку (или вектор) в кубе, то несложно рассчитать расстояние между этими точками, выразив в виде числа, на сколько они схожи. Пусть $C1(r1, g1, b1)$ и $C2(r2, g2, b2)$ – это точки двух разных цветов. Тогда расстояние между ними (d). При этом имеем вычисление

$$d = \sqrt{(r2 - r1)^2 + (g2 - g1)^2 + (b2 - b1)^2}$$

В цветовой модели (цветовой формат HSV (H – Hue, S – Saturation, V – value)) координатами являются: цветовой тон (оттенок) (например, красный, зелёный и т. д.), насыщенность и яркость. Оттенок (V) определяется от 0 до 360 градусов (таблица 1), возможно приведение к другим диапазонам, например, от 0 до 100.

Таблица 1.
Расположение основных цветов

Оттенок	красный	жёлтый	зелёный	голубой	синий	пурпурный
Градусная мера	0	60	120	180	240	300

Насыщенность (S) изменяется в процентах, в диапазоне от 0 до 100 (или от 0 до 1), чем выше значение параметра, тем чище и интенсивнее цвет, при приближении значения к нулю происходит утрата оттенка. Яркость (V) варьируется также в процентах, в пределах от 0 до 100 (или от 0 до 1). Рассмотрим проекцию цветового куба RGB в направлении диагона-

ли «чёрный – белый», в результате получится шестиугольник. Все серые цвета, которые лежали на диагонали «чёрный-белый» куба, проецируются в центральную точку (рис. 3). Добавим вертикальную ось светлоты – получится шестигранный конус (Geenath, 2025).

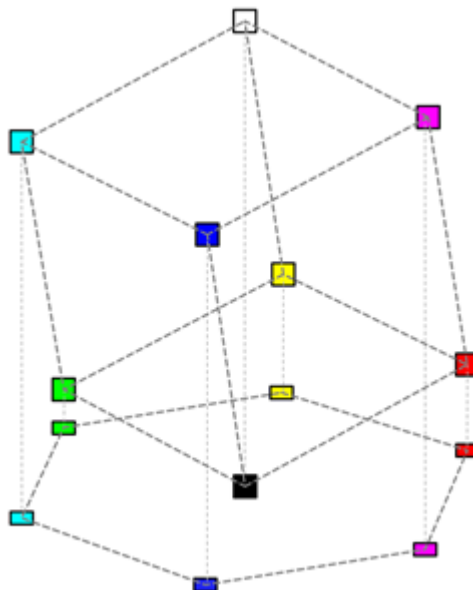


Рис. 3. Проекция цветового куба RGB в направлении диагоналей «чёрный-белый»

Геометрически, используя цилиндрическую систему координат (s, h, v) , HSV цветовая модель определяется, как шестигранный конус, поставленный на вершину (рис. 4).

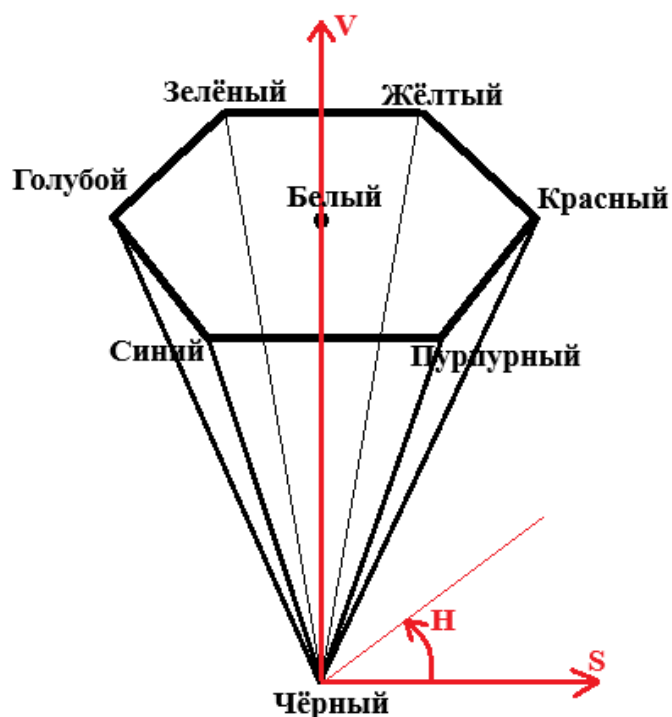


Рис. 4. Геометрическое представление HSV модели

Таким образом, цветовой круг делится на шесть сегментов:

- $0^\circ - 60^\circ$ – красно-жёлтая зона;
- $60^\circ - 120^\circ$ – жёлто-зелёная зона;
- $120^\circ - 180^\circ$ – зелёно-голубая зона;

- $180^\circ - 240^\circ$ – голубо-синяя зона;
- $240^\circ - 300^\circ$ – сине-пурпурная зона;
- $300^\circ - 360^\circ$ – пурпурно-красная зона.

Обычно датчики цвета читают информацию о цвете в RGB формате, для работы с HSV моделью необходим перевод координат в неё.

Результаты и практическая реализация

При практической реализации цветового пространства RGB недостаточно считать показания компонент трёхмерного куба (рис. 1). Диапазон $[0; 255]$ – это условность для веб-графики, в работе с реальным датчиком диапазон определяется мощностью подсветки, чувствительностью фотодиодов, разрядностью аналогово-цифрового преобразователя. Максимальное значение для каждой компоненты найдём эмпирически: проведём замер на яркой белой поверхности, будем проводить измерения некоторое время, выберем из всех значений максимальное.

1. Считаем значения RGB, используя датчик цвета Lego Mindstorms EV3 (рис. 3) и среду программирования Clever, учитывая, что его необходимо держать над поверхностью на расстоянии ≈ 10 мм. Для чтения цветовых компонент используется массив из трёх элементов.

```
Sensor.SetMode(1, 4)
LCD.Clear()
R_max = 0
G_max = 0
B_max = 0
while 1 = 1
    Color_mas = Sensor.ReadRaw(1, 3)
    if Color_mas[0] > R_max Then
        R_max = Color_mas[0]
    EndIf
    if Color_mas[1] > G_max Then
        G_max = Color_mas[1]
    EndIf
    if Color_mas[2] > B_max Then
        B_max = Color_mas[2]
    EndIf
    LCD.Write(0, 0, R_max)
    LCD.Write(0, 10, G_max)
    LCD.Write(0, 20, B_max)
EndWhile
```

Листинг 1. Получение максимально возможных значений компонент красного, зелёного и синего

Получились значения для красной, зелёной и синей компоненты 243, 245 и 526 соответственно. Чтобы приводить считываемые значения в стандартный вид необходимо применить линейное масштабирование.

$$\begin{aligned}
 R &= (R_{\text{текущая}} \times 255) \div 243 \\
 G &= (G_{\text{текущая}} \times 255) \div 245 \\
 B &= (B_{\text{текущая}} \times 255) \div 526
 \end{aligned}$$

```
LCD.Clear()
While 1 = 1
    Color_mas = Sensor.ReadRaw(1, 3)
    R = Color_mas[0] * 255 / 243
    R = Math.Floor(R)
    G = Color_mas[1] * 255 / 245
    G = Math.Floor(G)
    B = Color_mas[2] * 255 / 526
```

```
B = Math.Floor(B)
LCD.Write(0, 0, R)
LCD.Write(0, 10, G)
LCD.Write(0, 20, B)
EndWhile
```

Листинг 2. Определение компонент стандартного вида

На красном цвете получены показания (149, 25, 61), компонента, соответствующая красному цвету, имеет самое большое значение. На синем цвете получены показания (16, 26, 135), самое высокое значение имеет компонента, отвечающая за синий цвет. Определим эти точки, как эталонные. Теперь будем показывать датчику цвета и выводить расстояние, до красного (Sred) и синего (Sblue). Например, возвращаются значения красной, зелёной и синей компонент 123, 30, 31 соответственно. Рассчитаем расстояния.

$$Rred = \sqrt{(123 - 149)^2 + (30 - 25)^2 + (31 - 61)^2} \approx 40,01.$$

$$Rblue = \sqrt{(123 - 16)^2 + (30 - 26)^2 + (31 - 135)^2} \approx 149,27.$$

Очевидно, что расстояние до эталонного красного ближе, чем до синего, можно сделать вывод, что цвет скорее красный, чем синий. При помощи представления RGB модели в виде куба, становится реально геометрически определить расстояние между точками, и чем оно меньше, тем больше сходство между цветами в этих точках. Три независимых параметра R , G , B идеально подходят для визуализации в трёхмерном пространстве, и обеспечивается математическая основа для работы с цветами в аддитивной модели.

Тип 1. Знакомство с RGB. Получение и нормализация данных.

Цель: научить получать данные с датчика в виде (RGB) и приводить их к стандартному виду (0–255).

Задачи:

1. Подключите датчик цвета к роботу. Выведите на экран три числа (R , G , B) для белого и чёрного фонов. Объясните, почему числа не равны 255 и 0.
2. Напишите функцию, которая ищет максимальные значения для компонентов R , G , B для белого цвета при текущем освещении.
3. Используя найденные максимумы, примените формулу нормализации. Добейтесь, чтобы на белом листе датчик возвращал значение для каждой из компонент не менее 235.
4. Если после нормализации сумма $R+G+B$ меньше, например, 50, робот должен обозначить этот факт звуковым или световым сигналом. Реализуйте это.
5. Реализуйте программу ожидания красного цвета: при значениях: $R > 200$, $G < 100$, $B < 100$ – включить световую индикацию.

Тип 2. Цветовая метрика. Расчёт расстояний.

Цель: научить сравнивать цвета математически.

Задачи:

1. Даны эталон красного цвета (255, 0, 0) и значения RGB текущей точки (230, 40, 20). Вычислите вручную, насколько этот цвет близок к красному.
2. У вас есть три эталона: красный (255, 0, 0), зелёный (0, 255, 0), синий (0, 0, 255). Датчик показал (190, 70, 50). Напишите алгоритм, который определит, к какому эталону ближе текущий цвет.
3. Вычислите максимально возможное расстояние в цветовом кубе и округлите до целого.
4. Необходимо доехать до синего кубика. Допустим, расстояние до эталона синего равно 30. На пути у робота появляется фиолетовый кубик. Установите пороговое значение для остановки (например, 63).
5. Датчик, направленный на одинаковые желтые цвета, выдает показания с небольшими помехами: (245, 240, 0) и (250, 235, 5). Объясните, почему так.

6. На конвейере 3 цвета. Робот должен брать деталь «максимально чистого зелёного цвета» (например, если расстояние до эталона зелёного < 30). Реализуйте алгоритм.

Для выполнения первых двух типов задач обучающиеся осваивают два последовательных этапа работы с цветом. Сначала они учатся нормализовать сырые показания датчика: калибруют максимумы по белому листу и приводят значения R , G , B к диапазону 0–255, чтобы устранить зависимость от освещения. Затем они осваивают математическое сравнение цветов через вычисление евклидова расстояния между точками в трёхмерном пространстве RGB. На практике это означает: обучающиеся берут эталонный цвет, вычисляют расстояние от текущих значений RGB до эталонных и принимают решение на основе величины этого расстояния и заданного порога. Такой подход позволяет роботу устойчиво распознавать цвета даже при изменении яркости и небольших помехах датчика.

При изучении модели RGB у обучающихся формируются комплексные математические компетенции, включающие работу с различными числовыми диапазонами: от целочисленных значений (0–255) до нормализованных (0–1), что требует понимания принципов масштабирования и выполнения пропорциональных преобразований. Школьники осваивают операции с упорядоченными тройками вида (R, G, B) , анализируя их как математические векторы, сравнивая компоненты и определяя экстремальные значения (максимум и минимум). Существенным элементом является знакомство с основами линейной алгебры: RGB модель интерпретируется как трёхмерное пространство, где цвет представлен точкой в кубе, что развивает пространственное мышление. Кроме того, учащиеся совершенствуют арифметические навыки – выполняют деление, умножение и вычитание в контексте нормализации, а также работают с десятичными дробями.

При этом формируются информационные компетенции: школьники осознают, как система кодирует цвет. Развивается алгоритмическое мышление – обучающиеся выстраивают последовательность действий для нормализации RGB и применяют условные операторы при анализе цветовых компонентов. На практике это реализуется через программирование. Обучающиеся приобретают умение интерпретировать числовые значения как конкретные цвета, устанавливая прямую связь между абстрактными математическими выражениями и визуально наблюдаемыми результатами, что демонстрирует прикладную ценность математических и информационных знаний в задачах обработки изображений.

2. Так как обычно датчики цвета читают информацию о цвете в RGB формате, для работы с HSV моделью необходим перевод координат в неё. Изначально производим подготовку данных, переводом в диапазон $[0, 1]$.

$$R' = \frac{R}{255}; G' = \frac{G}{255}; B' = \frac{B}{255}$$

Что бы получить максимальную яркость и разброс значений, найдём максимальное (Max) и минимальное (Min) значение из R' , G' и B' . Разброс значений будет равен разности максимального и минимального значений.

$$V = \text{Max}$$

$$S = \begin{cases} 0, & \text{если Max} = 0 \\ \frac{\text{Max} - \text{Min}}{\text{Max}} \end{cases}$$

В случае нулевого максимального значения, сделаем вывод, что все компоненты RGB равны нулю, это чёрный цвет, значит насыщенность других цветов также равна нулю. Иначе чистота цвета прямо пропорциональна разбросу значений. При преобразовании из RGB в HSV вычисление оттенка (H), задаваемого углом от 0 до 360 градусов – это ключевая задача. Алгоритм опирается на геометрическую интерпретацию цветового круга и условное разбиение спектра на 6 сегментов по 60° каждый. Формула вычисления оттенка имеет вид:

$$H = 60^\circ \times \left(\frac{\text{разность двух меньших компонентов}}{\text{Max} - \text{Min}} + k \right)$$

Частное разности двух меньших компонентов (из RGB) и разности максимума и минимума показывает относительное положение внутри сегмента 60° , k – это целочисленный сдвиг, соответствующий начальному углу сегмента (0, 2, 4).

Таблица 2.
Вычисление компонента H в зависимости от Max

$\text{Max} = R'$	$H = 60^\circ \times \left(\frac{G' - B'}{\text{Max} - \text{Min}} \bmod 6 \right)$ Когда R' максимален, оттенок лежит в секторах, примыкающих к красному: - от 0° до 60° (красно-жёлтый); - от 300° до 360° (пурпурно-красный). Разность показывает, куда смещён цвет: - если, цвет уходит в жёлтую область (0°–60°); - если, цвет уходит в пурпурную область (300°–360°). Деление на разность Max и Min нормализует значение в диапазон $[-1, 1]$, это соответствует смещению внутри сегмента. Операция «остаток от деления» обеспечивает корректный результат, в случае получения результата за пределами $[0, 6)$.
$\text{Max} = G'$	$H = 60^\circ \times \left(\frac{B' - R'}{\text{Max} - \text{Min}} + 2 \right)$ Зелёный находится на 120° от красного, этим обусловлено «+2» в формуле.
$\text{Max} = B'$	$H = 60^\circ \times \left(\frac{R' - G'}{\text{Max} - \text{Min}} + 4 \right)$

Если $\text{Max} = \text{Min}$, то все компоненты равны, следовательно цвет серый и компонента $H = 0^\circ$. Таким образом, формулы получения оттенка строятся на трёх принципах:

- Сегментация круга (красный 0° , зелёный – 120° и т. д.);
- Нормализация разности двух меньших компонентов (получение сдвига внутри сегмента);
- Цикличность (корректная обработка переходов через $0^\circ/360^\circ$).

На практике это выглядит следующим образом (рис. 3), при использовании среды разработки Clever.

```

R1 = R / 255
G1 = G / 255
B1 = B / 255
Max = Math.Max(R1, Math.Max(G1, B1))
Min = Math.Min(R1, Math.Min(G1, B1))
V = Max
if Max = 0 Then
    S = 0
Else
    S = (Max - Min) / Max
EndIf
if Max = Min Then
    H = 0
ElseIf Max = R1 Then
    H = 60 * Math.Remainder(((G1 - B1) / (Max - Min)), 6)

```

```

ElseIf Max = G1 Then
    H = 60 * ((B1 - R1) / (Max - Min) + 2)
ElseIf Max = B1 Then
    H = 60 * ((R1 - G1) / (Max - Min) + 4)
EndIf

LCD.Write(30, 10, S)
LCD.Write(30, 20, V)
LCD.Write(30, 0, H)

```

Листинг 3. Определение компонент HSV

При тестировании работоспособности программы, «покажем» датчику синий и красный цвета. На синем цвете получились значения: $H = 227$, $S = 0,76$, $V = 0,21$. Значение H попадает в сегмент $180^\circ - 240^\circ$ – зона перехода от голубого к синему, ближе к синему. Значение S говорит о том, что цвет интенсивный (далеко от серого), значение V показывает, что цвет достаточно тёмный. На красном цвете получились значения: $H = 353,5$, $S = 0,82$, $V = 0,31$. Оттенок близок к чистому красному, цвет яркий и достаточно тёмный, но не чёрный. При работе с моделью HSV у обучающихся формируются значимые математические компетенции: они осваивают геометрическую интерпретацию цветового круга как цилиндрической системы координат, а также применяют модульную арифметику для корректного замыкания цветового спектра. Школьники учатся выполнять пропорциональные расчёты, а именно нормируют разности компонентов для получения относительных значений и проводят интерполяцию внутри 60-градусных сегментов, а также анализируют условия выбора формул для вычисления H в зависимости от максимального компонента, отрабатывая обработку особых случаев ($M = 0$, $M = m$) и контроль значений в заданных интервалах. В информационной части обучающиеся реализуют алгоритмы преобразования между RGB и HSV, отрабатывая отладку кода при граничных значениях, и структурируют данные. Самым интересным этапом становится тестирование: школьники проверяют корректность преобразований на реальных цветах и анализируют ошибки при выходе параметров за допустимые диапазоны, что закрепляет понимание взаимосвязи математических моделей и их практической реализации.

3. В процессе изложения теоретического материала обучающимся предлагается решить практические задачи, направленные на закрепление навыков работы с цветовыми моделями RGB и HSV и принятия решений о цвете на основе полученных данных.

Тип 3 тип. Преобразование координат (RGB -> HSV).

Цель: научиться переводить цвет из кубической модели (RGB) в цилиндрическую (HSV).

Задачи:

1. Дана точка в RGB (100, 200, 50). Вычислите H (оттенок) вручную, используя формулы.
2. Один и тот же красный предмет при ярком солнце дает (255, 50, 50), а в тени (80, 15, 15). В RGB расстояния до эталона (255,0,0) будут сильно различаться. Переведите оба показания в HSV и сравните значение H , сделайте вывод по полученному результату.
3. Придумайте два таких цвета в RGB (разной яркости, но одного тона), чтобы расстояние между ними в RGB было более 200, а расстояние в HSV (по оттенку) было менее 10.
4. Определите координаты RGB у серого цвета. Переведите его в HSV. Чему равно S ? Объясните, почему так происходит.
5. Робот ищет яркий желтый мяч на зеленой траве. Почему в модели HSV проще отсечь траву (зеленый тон), чем в RGB, где трава и мяч отличаются и по яркости, и по синему каналу?
6. В комнате темнеет. Значение V в HSV упало с 0.9 до 0.3. Как это повлияет на алгоритм определения цвета, если мы смотрим только на H ?

Тип 4. Принятие решений о цвете с учётом цикличности

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Цель: научить определять цвет по компонентам HSV с учётом цикличности оттенка и заданных порогов насыщенности и яркости.

Задачи:

1. Вычислить расстояние между оттенками 350° и 10° с учётом цикличности;
2. Разработать функцию, которая правильно вычисляет разницу между двумя значениями оттенка, учитывая, что шкала оттенков замкнута в круг;
3. Определять, является ли объект цветным или серым/чёрным, на основе значений насыщенности и яркости;
4. Сравнить устойчивость распознавания цвета в RGB и HSV при изменении освещения.

В задачах третьего типа рекомендуется особое внимание уделить преобразованию цветовых координат из модели RGB в HSV, научиться отделять оттенок от яркости и насыщенности. При выполнении задач четвёртого типа важно освоить корректное сравнение угловых значений оттенка с учётом цикличности и научиться принимать решение о цвете на основе всех трёх компонентов HSV, отличая цветные объекты от серых и чёрных по значениям насыщенности и яркости.

Практическая реализация методического инструментария математико-цифровых компетенций обучающихся в системе дополнительного образования в процессе настройки цветовосприятия робототехнических систем в контексте полугодового обучения показало академический рост, актуализацию мотивационной сферы как математических, так и цифровых компетенций обучающихся. Лонгитюдная динамика роста показателей результативности по названным параметрам по 3-м corteжам измерений показала следующую картину (таблица 3).

Таблица 3.

Динамика роста показателей результативности по параметрам математической и цифровой компетентности, актуализации мотивационной сферы обучающихся по 3-м corteжам измерений

Параметры результативности	Число обучающихся	1 - срез	2 - срез	3 - срез
Математические знания школьной программы	16	44%	62%	87%
Цифровые знания школь- ной программы	16	38%	70%	92%
Мотивационная сфера учения	16	31%	50%	87%

Заключение

Реализация методического инструментария при изучении цветовых моделей RGB и HSV робототехнических устройств выступает мощным инструментом формирования математико-цифровых компетенций. Расширенное (по сравнению со школьной программой) освоение математических знаний, таких как: работа с числовыми множествами и интервалами, геометрическая интерпретация данных, понимание векторных пространств и нормализаций, а также цифрового обеспечения: программирование преобразований данных, обработка сенсорной информации, отладка и тестирование кода создают эффективность формирования математико-цифровых компетенций как взаимосвязанных конструктов освоения робототехнических устройств. Практическая направленность результатов позволяет интегрировать математику и информатику посредством актуализации математического и цифрового инструментария через задачи робототехники, даёт обучающимся опыт решения реальных инженерных задач, формирует цифровую компетентность в контексте работы с визуальными данными. При этом освоение RGB и HSV инструментальными средствами не только углубляет понимание математических операций и компьютерного моделирования, но и готовит школьников к работе с более современными технологиями, включая искусственный интеллект. Дан-

ное направление возможно развивать, изучая другие цветовые модели, а также использовать начальные методы обучению машинному зрению.

Список литературы

- Валеев И.И. Функциональная математическая грамотность как основа формирования и развития математической компетенции [Электронный ресурс] // Вестник Казанского федерального университета. 2020. № 4. С. 120–128. DOI: 10.25683/VOLBI.2020.53.417
- Гриневич Е.А., Лефанова И.В., Антонович А.А., Кот Е.В. Конвертер RGB HSV в системе компьютерного зрения // Научные труды БГУ. 2023. № 4. С. 45–52. DOI: 10.12345/abcde.
- Дворяткина С.Н., Щербатых С.В. Теоретико-методическое обеспечение фрактального формирования и развития вероятностного стиля мышления в процессе обучения математике. М.: Флинта, 2020.
- Морен Э. О сложности. М.: Институт общегуманитарных исследований, 2019.
- Секованов В.С., Смирнов Е.И., Секованова Л.А., Щепин Р.А. Развитие креативности студентов в исследовании многоэтапных математико-информационных заданий по фрактальной геометрии // CONTINUUM. Математика. Информатика. Образование. 2025. № 2. С. 53–70. DOI: 10.24888/2500-1957-2025-2-53-70
- Смирнов Е.И. Интеграция науки и школьного математического образования как фактор реализации сложностной парадигмы мышления обучающихся // Фундаментальные проблемы обучения математике, информатике и информатизации образования: Сборник тезисов докладов XI международной научно-практической конференции в рамках Международного научно-образовательного форума "Математика. Информатика. Образование", Елец – Владикавказ, 29 июня – 05 июля 2025 года. Елец: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2025. С. 37–42.
- Chang Zheng, Weng Shuchen, Li Yu, Li Si, Shi Boxin. L-coder: Language-based colorization with color-object decoupling transformer. In European Conference on Computer Vision. Springer, 2022. 360–375.
- Dvoryatkina S.N., Smirnov E.I. Evaluation of synergetic effects of integration of knowledge and activity based on computer modeling. Modern Information Technologies and IT Education. М.: MSU, 2016. 35–42.
- Dvoryatkina S.N., Zhuk L.V., Smirnov E.I., Khizhnyak A.V., Shcherbatykh S.V. Open Innovation Model of Student's Research Activities. Journal of Teacher Education for Sustainability. 2021. T. 23. № 2. С. 77–90. DOI: 0.2478/jtes-2021-0018.
- Geenath O., Priyadarshana Y. From shades to vibrance: a comprehensive review of modern image colorization techniques. Front. Comput. 2025. Sci. 7:1626641. DOI: 10.3389/fcomp.2025.1626641
- Mohan Sridharana, Peter Stone. Color learning and illumination invariance on mobile robots: A survey. Robotics and Autonomous Systems. 2009. 57. 629–644
- Smirnov E.I. Complex Multi-Stage Tasks for Testing Schoolchildren in the Mathematics Course. Semenov A.L. et al. (eds.), Chapter 2. Structural and Technological Transformation of Education in the Post-Pandemic Period. Problems and Prospects. Monograph. Springer: «Lecture Notes in Networks and Systems». 2025. 103–113.
- Sridharan M., Stone P. Structure-based color learning on a mobile robot under changing illumination. Auton Robot. 2007. 23. 161–182. DOI: 10.1007/s10514-007-9038-7
- Xin Luan, Weiwei Qi, Dalei Song, Ming Chen, Tieyi Zhu, and Li Wang. Illumination Invariant Color Model for Object Recognition in Robot Soccer. Advances in Swarm Intelligence. ICSI 2010. Lecture Notes in Computer Science. 6146. Springer, Berlin, Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-642-13498-2_89

Информация об авторах

Власова-Галасеева Наталия Михайловна; старший преподаватель кафедры теории и методики обучения информатике; ФГБОУ ВО «Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского» (Российская Федерация, 150000, г. Ярославль, ул. Республиканская, д. 108/1); E-mail: vlasova-galaseeva@yandex.ru; ORCID: 0009-0004-7335-5248;

Смирнов Евгений Иванович; доктор педагогических наук; профессор; зав. кафедрой математического анализа, теории и методики обучения математике; ФГБОУ ВО «Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского» (Российская Федерация, 150000, г. Ярославль, ул. Республиканская, д. 108/1); ведущий научный сотрудник отдела функционального анализа (по совместительству); Южный математический институт – филиал ФГБНУ ФНЦ «Владикавказский научный центр РАН» (Российская Федерация, 362025, г. Владикавказ, ул. Ватутина, д. 53); E-mail: smiei@mail.ru; ORCID: 0000-0002-8780-7186; Scopus ID: 55734369900

MATHEMATICAL AND DIGITAL COMPETENCIES INSTRUMENTING OF STUDENTS IN THE PROCESS OF COLOR PERCEPTION CONFIGURING OF ROBOTIC SYSTEMS (USING THE RGB AND HSV MODELS AS AN EXAMPLE)

Vlasova-Galaseeva N. M. senior lecturer	Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky
Smirnov E. I. Dr. Sci. (Pedagogy), Professor	Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky; Southern Mathematical Institute (branch) Vladikavkaz Scientific Centre of the RAS

Abstract. In modern society, mathematics is becoming a serious tool for solving a wide range of problems (analysis of economic processes, production optimization, configuration of machine vision systems, etc.). In the context of educational digitalization and the development of robotic systems, Student's mathematical and digital competence acquires a particular significance as an integrative quality that forms a symbiosis of mathematical competencies with the ability to apply of digital tools to solve a complex practice-oriented problem. Research problem: what are the stages and conditions for student's mathematical and digital competencies instrumenting in the process of color perception configuring of robotic systems. Aim of the study: to identify the parameters and content of the symbiosis of mathematical and digital competencies in configuring the RGB and HSV color model tools of robotic systems in student's supplementary education. Research methods: E. Morin's complexity paradigm, mathematical and computer modeling, algorithms for processing RGB and HSV color model data, processing and programming of sensor information, project-based learning. Results of the study: components of the epistemology of mathematical and digital competencies instrumenting, parameters of mathematical and digital equipping of RGB and HSV color models of robotic systems, a hierarchical complex of subtasks on multistage mathematical and digital task, model for student's mathematical and digital competencies instrumenting.

Keywords: robotics, mathematical and digital competencies, RGB color model, HSV color model

For citation: Vlasova-Galaseeva N. M., Smirnov E. I. (2026). Mathematical and Digital Competencies Instrumenting of Students in the Process of Color Perception Configuring of Robotic Systems (Using the RGB and HSV Models as an Example). *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 3 (43), 10–24. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-10-24

Copyright: © N. M. Vlasova-Galaseeva, E. I. Smirnov (2026). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

References

- Chang, Z., Weng, S., Li, Y., Li, S., & Shi, B. (2022). L-coder: Language-based colorization with color-object decoupling transformer. *European Conference on Computer Vision*, 360-375. Springer.
- Dvoryatkina, S. N., Smirnov, E. I. (2016). Evaluation of synergetic effects of integration of knowledge and activity based on computer modeling. *Modern Information Technologies and IT Education*, 35-42. Moscow: MSU. (In Russ.)
- Dvoryatkina, S. N., Shcherbatykh, S. V. (2020). *Teoretiko-metodicheskoe obespechenie fraktal'nogo formirovaniya i razvitiya veroyatnostnogo stilya myshleniya v processe obucheniya matematike*. Moscow: Flinta. (In Russ.)
- Dvoryatkina, S. N., Zhuk, L. V., Smirnov, E. I., Khizhnyak, A. V., Shcherbatykh, S. V. (2021). Open Innovation Model of Student's Research Activities. *Journal of Teacher Education for Sustainability*, 23(2), 77–90. DOI: 0.2478/jtes-2021-0018.
- Geenath, O., Priyadarshana, Y.H.P.P. (2025). From shades to vibrance: a comprehensive review of modern image colorization techniques. *Frontiers in Computer Science*, 7, 1626641. <http://dx.doi.org/10.3389/fcomp.2025.1626641>
- Grinevich, E. A., Lefanova, I. V., Antonovich, A. A., Kot, E. V. (2023). RGB HSV converter in computer vision systems. *Scientific Proceedings of BSU*, 4, 45-52. DOI: 10.12345/abcde. [Electronic resource]. (In Russ.)
- Luan, X., Qi, W., Song, D., Chen, M., Zhu, T., & Wang, L. (2010). Illumination invariant color model for object recognition in robot soccer. In *Advances in Swarm Intelligence. ICSI 2010. Lecture Notes in Computer Science*, 6146. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-13498-2_89
- Morin, E. (2019). *On Complexity*. Moscow: Institute of General Humanitarian Research. (In Russ.)
- Sekovanov, V. S., Smirnov, E. I., Sekovanova, L. A., Shchepin, R. A. (2025). Development of students' creativity in the study of multi-stage mathematical and informational tasks on fractal geometry. *CONTINUUM. Maths. Informatics. Education*, 2, 53-70. DOI: 10.24888/2500-1957-2025-2-53-70 (In Russ.)
- Smirnov, E. I. (2025). Integration of science and school mathematics education as a factor in implementing the complexity paradigm of students' thinking. *Fundamental Problems of Teaching Mathematics, Computer Science and Informatization of Education: Collection of abstracts of reports of the XI International Scientific and Practical Conference within the framework of the International Scientific and Educational Forum "Mathematics. Informatics. Education"*, Yelets–Vladikavkaz, June 29 – July 5, 2025, 37-42. Yelets: Bunin Yelets State University. (In Russ.)
- Smirnov, E. I. (2025). *Complex multi-stage tasks for testing schoolchildren in the mathematics course*. In Semenov, A.L. et al. (Eds.), *Structural and Technological Transformation of Education in the Post-Pandemic Period. Problems and Prospects. Chapter 2. Monograph*. Springer: Lecture Notes in Networks and Systems, 103-113.

- Sridharan, M., Stone, P. (2009). Color learning and illumination invariance on mobile robots: A survey. *Robotics and Autonomous Systems*, 57, 629-644.
- Sridharan, M., Stone, P. (2007). Structure-based color learning on a mobile robot under changing illumination. *Autonomous Robots*, 23, 161–182. <https://doi.org/10.1007/s10514-007-9038-7>
- Valeev, I. I. (2020). Functional mathematical literacy as a basis for the formation and development of mathematical competence. *Bulletin of Kazan Federal University*, 4, 120-128. DOI: 10.25683/VOLBI.2020.53.417. (In Russ.)

Information about the authors

Natalia M. Vlasova-Galaseeva; Senior Lecturer; Department of Theory and Methods of Teaching Computer Science, Yaroslavl State Pedagogical University named after K. D. Ushinsky (108/1 Respublikanskaya St., Yaroslavl, 150000, Russian Federation); E-mail: vlasova-galaseeva@yandex.ru; ORCID: 0009-0004-7335-5248;

Evgeny I. Smirnov; Doctor of Pedagogical Sciences; Professor; Head of the Department of Mathematical Analysis, Theory and Methods of Teaching Mathematics, Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky (108/1 Respublikanskaya St., Yaroslavl, 150000, Russian Federation); Leading Researcher (part-time); Department of Functional Analysis, Southern Mathematical Institute – Branch of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences (53 Vatutina St., Vladikavkaz, 362025, Russian Federation); E-mail: smiei@mail.ru; ORCID: 0000-0002-8780-7186; Scopus ID: 55734369900

Статья поступила в редакцию	27.08.2026
Принята к публикации	09.09.2026
Статья опубликована	18.09.2026

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-3-25-35

УДК
372.851**ВОЗМОЖНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГРАМОТНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ
ЧЕРЕЗ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ФИЗИЧЕСКИМ
СОДЕРЖАНИЕМ****Семеняченко Юлия Александровна**
к.п.н., доцентГАОУ ВО Московский городской
педагогический университет

Аннотация. Статья посвящена вопросам поэтапного развития мыслительных действий, относящихся к формированию математической грамотности школьников, при решении математических задач с физическим содержанием. Актуальность темы подтверждается противоречием между наличием требований современной системы образования к подготовке такого выпускника школы, который способен применять математические знания в реальных жизненных ситуациях, и отсутствием методик по формированию и развитию соответствующих умений у обучающихся. Введение работы раскрывает значимость как необходимости формирования математической и естественно-научной грамотности обучающихся в целом, так и отдельных её компонентов: математического содержания, контекстов заданий, мыслительных действий. Анализ литературы выявляет отдельные дефициты в вопросах методических стратегий по формированию и развитию математической грамотности, содержит обзор подходов к обучению математической грамотности при решении задач. В результатах изложен один из возможных путей по решению обозначенной проблемы через поэтапное развитие мыслительных действий, относящихся к формированию математической грамотности, посредством решения задач с физическим содержанием. Приведены примеры практико-ориентированных задач, способствующих поэтапному развитию этих действий. В заключении представлены рекомендации по использованию предложенного подхода для формирования математической грамотности при решении задач с различными контекстами.

Ключевые слова: математическая грамотность, естественно-научная грамотность, задачи с физическим содержанием, поэтапное формирование мыслительных действий

Для цитирования: Семеняченко Ю.А. Возможности формирования математической грамотности школьников через решение задач с физическим содержанием // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 3 (43). С. 25–35. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-25-35

Права: © Ю. А. Семеняченко (2026). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И.А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

Введение

В ходе обучения в школе изучение математики способствует развитию у обучающихся умения использовать различные выразительные средства языка математики – словесные, символические, графические в личной повседневной жизни, в образовательной сфере, в будущей профессиональной деятельности. Оно вносит вклад в формирование представлений

школьника о роли математики в развитии цивилизации и культуры. Изучение математики формирует у обучающихся математический стиль мышления, проявляющийся в определённых умственных навыках. При этом содержание функционально-графической линии нацелено на получение обучающимися знаний о функциях как важнейшей математической модели для описания и исследования разнообразных процессов и явлений в природе и обществе. Согласно федеральной рабочей программе по математике для основной школы к одной из приоритетных целей обучения математике относят формирование математической грамотности, которая позволяет не только решать учебные задачи, но и использовать знания в реальных жизненных ситуациях, анализировать информацию и применять освоенный математический аппарат для решения практических задач, интерпретировать и оценивать полученные результаты (Федеральная рабочая программа основного общего образования по математике, 2025).

Говоря о формировании математической грамотности, целесообразно коротко рассмотреть ее компоненты и определить, что понимается под математической грамотностью в современном обществе. Это важно, поскольку во все времена развития общества всегда подчеркивалась определяющая роль математики в научных исследованиях.

Термин “Mathematical literacy” («Математическая грамотность») впервые начал употребляться с середины прошлого столетия. До восьмидесятых годов прошлого столетия под математической грамотностью понималось просто умение применять знания школьной математики для решения несложных практических задач. В конце 1990-х годов в рамках международного исследования качества математического и естественно-научного образования TIMSS впервые оценили, насколько выпускники школ разных стран умеют применять знания по математике и естественным наукам в реальных жизненных ситуациях. Именно в этом значении стали использоваться понятия «математическая грамотность» и «естественно-научная грамотность». При этом применение математических знаний рассматривалось преимущественно в контексте естественных наук – физики и биологии. (Денищева, 2021).

Позже, когда было организовано и несколько раз проведено международное исследование PISA (Programme for International Student Assessment – Программа международного оценивания обучающихся), окончательно формируется определение математической грамотности. После нескольких изменений оно имеет следующую трактовку: «Математическая грамотность – это способность человека рассуждать математически и формулировать, применять и интерпретировать математику для решения задач в различных контекстах реального мира» (OECD, 2018).

Как известно, в формирование математической грамотности вкладывается три базовых компонента:

- математическое содержание заданий;
- контекст задания, связанный с реальными жизненными ситуациями;
- мыслительные процессы, описывающие то, как должен действовать ученик, чтобы связать контекст задания с математическими действиями, чтобы решить возникшую проблему (Денищева, 2021).

Математическое содержание включает четыре категории: пространство и форма, изменение и зависимости, количество, неопределенность и данные. Контекст задания включает элементы окружающей обстановки, представленные в рамках заданной ситуации. Для описания мыслительных процессов при решении задач были предложены глаголы: *формулировать, применять, интерпретировать, оценивать*, которые отражают основные виды мыслительной деятельности ученика при решении проблемы посредством использования математики. Они указывают на те мыслительные процессы, в которые, как правило, вовлечены учащиеся при активном участии в решении проблемы:

- формулировать ситуацию математически;
- применять математические понятия, факты, процедуры размышления;
- интерпретировать математические результаты в соответствии с контекстом задания;
- использовать и оценивать математические результаты.

Математика важна для жизни. Именно этот аспект и подчеркивается в последних исследованиях педагогов, связанных с формированием и развитием математической грамотности обучающихся (Денищева, 2021). За последние 20–25 лет появилось достаточно много зарубежной и отечественной литературы, посвященной математической грамотности и необходимости ее формирования у учащихся.

Однако необходимо отметить, что проблема недостаточного методического обеспечения процесса формирования и развития математической грамотности школьников остается открытой. По-прежнему мало таких работ, в которых была бы описана методика формирования знаний и умений школьников применения математических знаний при решении практических задач смежных наук, таких, как физика, география, биология, и др. В частности, разработок, посвященных вопросам интеграции математики в обучение школьной физике, найдется немного. Вопросам формирования у обучающихся умений распознавать в физических явлениях математическую природу, преобразовывать физические процессы в математические модели, применять математические знания для решения физических задач и интерпретировать полученный результат, переводя его с математического языка на язык физики, на наш взгляд, уделено недостаточно внимания.

Обзор литературы

В сборнике трудов «Методические рекомендации по формированию функциональной грамотности обучающихся 5–9 классов с использованием открытого банка заданий на цифровой платформе по шести направлениям функциональной грамотности в учебном процессе и для проведения внутришкольного мониторинга формирования функциональной грамотности обучающихся» под ред. Г. С. Ковалевой, вопросам формирования естественно-научной грамотности посвящена одна глава. В ней даны общие характеристики естественно-научной грамотности:

- умение научно объяснять явления;
- демонстрировать понимание особенностей естественно-научного исследования;
- интерпретировать данные и использовать научные доказательства для получения выводов.

Также приведены методические рекомендации по включению заданий, направленных на умение применять математику к решению задач по биологии и географии, как в урочную, так и неурочную деятельность, описание структуры заданий, направленных на формирование описанных компетенций (Ковалева, 2023).

Работа М. А. Дороховой детально описывает некоторые аспекты формирования умений использования математических знаний для успешного решения физических задач (Дорохова, 2023). В частности, выявлены и классифицированы основные ошибки, которые допускают школьники при решении задач с физическим содержанием, приведен перечень основных направлений для повышения уровня математической грамотности при изучении физики.

Вопросам формирования математической грамотности при обучении физике посвящена работа Н. А. Антоновой и К. Ю. Бабиновой. Авторы предлагают различные стратегии, способствующие формированию математической грамотности: развитие и применение навыков вычисления, решение математических задач с физическим содержанием, применение в математике и физике единых обозначений и понятий, включение в процесс обучения школьников интегрированных уроков по математике и физике, использование примеров из реальной жизни (Антонова, 2024). Исследователи приходят к выводу, что комплексное применение стратегий способствует развитию математической грамотности у обучающихся при изучении физики.

Примерам использования математических концепций и инструментов при изучении физики посвящена статья А. Э. Маркосян. Автор исследует разделы обоих учебных курсов, выделяет те из них, которые способствуют более глубокому пониманию важности физики и математики в техническом прогрессе на основе их интеграции (Маркосян, 2025).

Всесторонне исследуя понятия математической и естественно-научной грамотности, А.С. Азарова и М.А. Луканкина описывают возможности интеграции математики и физики

через решение физических задач с помощью построения графиков физических процессов. Авторы считают, что построение графиков способствует лучшему пониманию функциональных зависимостей между физическими величинами, характеризующими процессы в окружающей нас природе и технике (Луканкина, 2026).

Использование векторного метода при решении физических задач предлагают А. С. Кадалова и Е. А. Лошкарева, который может быть применен в различных разделах физики: механике, электродинамике, электростатике, магнетизме и др. Авторы указывают, что векторный анализ является одним из пограничных разделов между физикой и математикой и позволяет на языке векторов формировать понимание многих физических законов (Кадалова, 2022).

Обучение в условиях цифровой образовательной среды в достаточной мере обосновалось на всех ступенях образования. Цифровые технологии на уроках значительно повышают вовлеченность учеников в процесс познания. Цифровые образовательные инструменты применяются на всех этапах урока: мотивации, актуализации знаний, изучении нового материала, закреплении и обобщении. В этой связи у учителя появилось немало возможностей интеграции математики и физики в цифровой образовательной среде, например, при проведении физических экспериментов в виртуальных лабораториях. Вопросам формирования математической грамотности в процессе проведения физических экспериментов, в том числе в виртуальных лабораториях, посвящена статья И. П. Максименко, И. Н. Павленко и С. Н. Башкировой. Авторы отмечают положительное влияние таких экспериментов на формирование у школьников умений рассуждать, формулировать, интерпретировать, применять научные знания (Максименко, 2024).

Таким образом, многие исследователи подчеркивают важность формирования математической грамотности школьников при изучении именно физики, так как взаимосвязь между этими науками очень тесная. Однако «оторванность» этих учебных курсов друг от друга в школьном обучении по-прежнему наблюдается.

В учебниках математики для 7–9 классов практико-ориентированные задачи с физическим содержанием встречаются крайне редко. Одно из таких заданий, которое является единственным на весь тематический раздел, представлено на рис. 1.

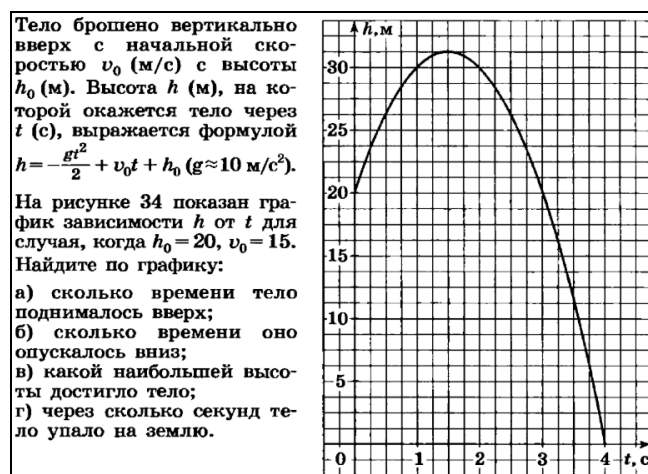


Рис. 1. Пример задачи с физическим содержанием

Задач, направленных непосредственно на развитие функциональной математической грамотности, к сожалению, нет совсем.

То же самое можно сказать и про физику. В задачах по физике учебников для 7–9 классов не уделяется достаточного внимания взаимосвязи математики и физики.

Кроме того, по-прежнему наблюдается и дефицит методических пособий, которые были бы направлены на описание этапов формирования математической грамотности при решении задач, а самое главное – на развитие мыслительных качеств: формулировать, применять, интерпретировать и оценивать (Семеняченко, 2021). Таким образом, можно наблю-

дать явное противоречие. С одной стороны, развитие общества и современных технологий, а также требования системы образования нацеливают на подготовку школьника, который способен видеть математическую природу в окружающих нас процессах и явлениях, умеет применять математические знания для решения задач повседневной жизни. С другой стороны, методик, которые направлены на формирование соответствующих компетенций у обучающихся, явно недостаточно.

Включение в процесс обучения математике задач с физическим содержанием, которые являются практико-ориентированными или непосредственно направленными на формирование математической грамотности, позволяет минимизировать те разрывы, о которых говорилось выше. Рассмотрим такие задачи на примере изучения функций в 7–9 классах.

Результаты

Для решения поставленной проблемы предлагается поэтапное развитие у обучающихся мыслительных качеств, относящихся к формированию математической грамотности.

На первом этапе – поисковом, предлагается решение задач на математическую грамотность, в ходе решения которых необходимо исследовать, описывать и анализировать проблему на математическом языке.

На втором этапе – формирующем, предлагается решать со школьниками задачи математической грамотности, которые, помимо перечисленных мыслительных действий, направлены еще и на:

- составление математической модели описанной проблемы;
- решение задачи в рамках этой модели;
- интерпретацию результатов в рамках описанной проблемы.

Наконец, на третьем этапе – творческом, предлагается: самостоятельный поиск проблем, приводящих к задачам на математическую грамотность, составление и решение таких задач.

Наибольшие сложности при решении практико-ориентированных задач с физическим содержанием школьники испытывают в вопросах применения свойств функций, чтения и анализа графических представлений функциональных зависимостей, выражающих физические законы. Изучение функциональной линии в школьном курсе начинается в 7-м классе с изучения линейной функции, продолжается далее в 8-9-ых классах изучением квадратичной и других видов функций.

Одно из затруднений выражается в следующем: с одной стороны, обучающиеся не видят в физических формулах (законах) математической природы, с другой стороны, при изучении математики они не сопоставляют готовые математические конструкции с реальными физическими процессами (Бутырский, 2007). Так, например, они не распознают, что линейная функция $y = kx + b$ является математической моделью в механике для описания равномерного движения, а квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ является математической моделью для описания равноускоренного движения, а также для представления кинетической и потенциальной энергии. Обратная пропорциональная зависимость $y = \frac{k}{x}$ явно выражена в разделе, связанном с изучением электричества, а именно, при вычислении связи силы тока, сопротивления и напряжения. Между тем, умение распознавать такие зависимости не только позволяет лучше усваивать необходимый материал, но и формирует компетенции, составляющие математическую грамотность школьников. В этой связи возникает необходимость установления междисциплинарных связей не только между математическими функциями и физическими процессами, но также и их графическими изображениями.

Для решения обозначенной проблемы по темам, связанным с различными классами функций, а также в рамках поэтапного развития у обучающихся мыслительных качеств, относящихся к формированию математической грамотности, предлагается включать в обучение задачи, направленные на формирование следующих умений:

- анализировать физические процессы с математической точки зрения;
- составлять математические модели, которыми являются соответствующие функции, по реальным физическим процессам;
- исследовать такие модели, изображать их графики;

– интерпретировать результаты исследования с физической точки зрения.

Приведем примеры задач с физическим содержанием, направленные на формирование математической и естественно-научной грамотности, которые приводят к исследованию функций и их свойств.

Задача 1. Студент технического университета Александр любит путешествовать по своему городу Екатеринбургу на велосипеде. На рис. 2 приведен график зависимости скорости движения Александра от времени, который был составлен по результатам одной из его поездок.

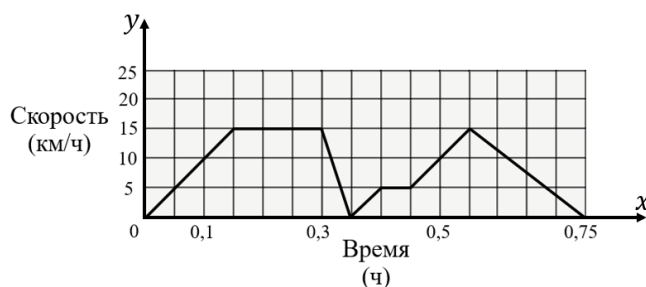


Рис. 2. График скорости движения велосипедиста

Изучите график, ответьте на вопросы, считав информацию по нему:

- 1) Какова была скорость Александра (км/ч) спустя 9 минут после старта?
- 2) Через какое время после старта велосипедист набрал скорость 15 км/ч?
- 3) В каком количестве точек скорость Александра была равной 10 км/ч?

Эта задача относится к поисковому этапу формирования мыслительных действий, так как в ходе ее решения требуется простое умение извлекать (считывать) информацию из приведенных данных, делать простые умозаключения, обобщать информацию. Перед тем, как решать более сложные задачи на математическую грамотность, можно предложить практико-ориентированную задачу, решение которой предполагает использование физического закона, представленного математической моделью. Такую задачу мы отнесем ко второму этапу формирования мыслительных действий.

Задача 2. Школьная команда по лёгкой атлетике готовится к соревнованиям по метанию мяча. Тренер хочет проанализировать траекторию полёта снаряда, чтобы оптимизировать технику броска. Известно, что высота h (в метрах) мяча над землей в зависимости от горизонтального расстояния x (в метрах), которое он пролетел, описывается квадратичной функцией: $h(x) = -0,05x^2 + 1,5x + 1,8$.

Задания

1. Найдите максимальную высоту, на которую поднимется мяч. В какой точке траектории это произойдет?
2. Определите, на каком горизонтальном расстоянии от точки броска мяч упадёт на землю.
3. На дистанции 20 м от места броска стоит забор высотой 3 м. Перелетит ли мяч через забор? Обоснуйте ответ расчётами.
4. Тренер хочет, чтобы мяч упал точно в отмеченную зону на расстоянии 25 м от точки броска. Предложите, как нужно изменить начальную высоту броска (при тех же остальных коэффициентах), чтобы достичь этой цели.
5. По построенному графику (рис. 3) отметьте ключевые точки: начало броска, вершину траектории, точку падения, положение забора.

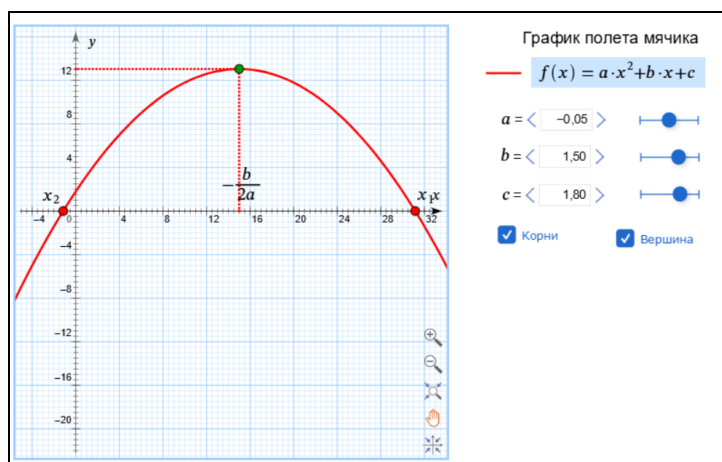


Рис. 3. График к задаче о траектории полета снаряда

В случае, если обучающиеся успешно научились решать подобные задачи, предлагается следующий шаг третьего этапа – творческого, предоставляющий им самим возможность для творчества: составлять такие задачи, которые через физические законы выражают функциональные зависимости. Затем можно предложить на примере составленной задачи провести анализ процесса и интерпретировать полученные результаты.

Задача 3. Команда школьников участвует в школьном конкурсе по ракетостроению. Ребята разработали модель ракеты с простым твердотопливным двигателем. После включения двигателя ракета движется по законам свободного падения (без учёта сопротивления воздуха). Известно, что высота полёта ракеты h (в метрах) зависит от времени t (в секундах) и описывается квадратичной функцией: $h(t) = at^2 + bt + c$.

$h(t)$ — высота ракеты над землёй (в метрах) в момент времени t (в секундах);

a, b, c — коэффициенты, зависящие от начальных условий взлета.

Коэффициент a определяется ускорением свободного падения: $a = -\frac{g}{2} \approx -5$.

Исходные данные

В момент броска ($t = 0$) ракета находится на высоте 0 м.

Начальная вертикальная скорость ракеты — 9 м/с.

Ускорение свободного падения будем считать равным 10 м/с^2 (действует в сторону, противоположную движению, поэтому вносит отрицательный вклад).

Задания

1. Составьте функцию $h(t)$ (математическая модель свободного падения). Определите коэффициенты a, b и c , опираясь на физические законы и данные условия. Кратко объясните, как каждый коэффициент связан с реальными параметрами броска.

2. Рассчитайте ключевые характеристики полёта. Найдите время ($t_{\text{верш}}$), через которое ракета достигнет максимальной высоты. Вычислите максимальную высоту ($h_{\text{макс}}$). Определите время полёта ($t_{\text{над}}$), когда ракета коснётся земли ($h = 0$). Приведите все расчёты с пояснениями.

3. Постройте график траектории. Составьте таблицу значений $h(t)$ для t от 0 до $t_{\text{над}}$ и постройте траекторию движения.

4. На высоте 15 м установлен датчик, который должен зафиксировать пролёт ракеты. Успеет ли ракета достичь этой высоты? Если да, то в какой или какие моменты времени?

Систематическое решение подобных заданий формирует высокий уровень компетенций у обучающихся, свидетельствующий о том, что школьник может применить прочитанную информацию для объяснения новой ситуации; использовать дополнительные знания для решения практической задачи; формулировать на основе прочитанного текста собственную гипотезу; решать проблему, применяя математические знания, интерпретировать и оценивать математические данные в контексте связи с окружающим миром.

Заключение

Предложенное выше поэтапное развитие мыслительных качеств, направленных на формирование математической грамотности, можно реализовывать при решении задач не только с физическим содержанием, но и с другими контекстами. Важно, чтобы задания были подобраны с учетом описанных этапов и были направлены на познание окружающего мира через применение математики.

В качестве рекомендаций отметим, что для формирования математической грамотности при решении задач с физическим содержанием важно:

- помнить о системности и фундаментальности формируемых математических знаний;
- формировать готовность к взаимодействию с математической стороной окружающего мира: через опыт и погружение в реальные ситуации;
- учить математическому моделированию реальных ситуаций, связанных с физикой;
- развивать критическое мышление: при конструировании алгоритмов контролировать процесс и результат, выполнять проверку на соответствие исходным данным и правдоподобие, коррекцию и оценку результата деятельности.

Подводя итоги, отмечаем необходимость систематического применения практико-ориентированных задач физического содержания, а также задач, направленных на формирование математической грамотности, при обучении математике в 7–9 классах. Решение таких задач позволяет формировать у обучающихся умение применять математические знания как при решении практико-ориентированных задач, возникающих в реальных физических процессах, так и во всех сферах окружающего мира, способствуя формированию у них холистического мышления.

Список литературы

- Антонова Н.А., Бабинова К.Ю. Особенности формирования математической грамотности при обучении физике // Учёные записки Шадринского государственного педагогического университета. 2024. № 3(5). С. 24–31.
- Бутырский Г.А. Проблемы обучения школьников решению физических задач // Вестник ВятГУ. 2007. №16. С.
- Денищева Л.О., Савинцева Н.В., Сафуанов И.С. [и др.]. Особенности формирования и оценки математической грамотности школьников // Science for Education Today. 2021. Т. 11. № 4. С. 113–135. DOI: 10.15293/2658-6762.2104.06.
- Денищева Л.О., Сафуанов И.С., Семяченко Ю.А. [и др.]. Математическое моделирование – важнейший этап формирования математической грамотности в условиях запросов современного общества // Вестник МГПУ. Серия: Информатика и информатизация образования. 2021. № 4(58). С. 60–83. DOI: 10.25688/2072-9014.2021.58.4.07.
- Дорохова М.А. Формирование математической грамотности на уроках физики в основной школе // Психолого-педагогическое сопровождение участников образовательных отношений в условиях реализации технологии смешанного обучения: Материалы международной научно-практической конференции, Челябинск, 14–15 декабря 2023 года. Челябинск: ЗАО «Библиотека А. Миллера», 2024. С. 99–105.
- Кадалова А.С., Лошкарева Е.А. Формирование математической грамотности на уроках физики // Научные труды Калужского государственного университета имени К.Э. Циолковского: материалы докладов, Калуга, 13–14 апреля 2022 года. Калуга: ФГБОУ ВО «Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского», 2022. С. 138–142.
- Ковалева Г.С., Гостева Ю.Н., Кузнецова М.И. [и др.]. Методические рекомендации по формированию функциональной грамотности обучающихся 5–9 классов с использованием открытого банка заданий на цифровой платформе по шести направлениям функци-

ональной грамотности в учебном процессе и для проведения внутришкольного мониторинга формирования функциональной грамотности обучающихся. М.: Институт стратегии развития образования РАО, 2022.

- Луканина М.А., Азарова А.С. Графики как мост между математикой и физикой: формирование функциональной грамотности // Современные проблемы математики, физики и физико-математического образования: Материалы XV международной научно-практической конференции, Орехово-Зуево, 03 декабря 2025 года. Орехово-Зуево: Государственный гуманитарно-технологический университет, 2026. С. 216–220.
- Максименко И.П., Павленко И.Н., Башкирова С.Н. Формирование математической грамотности в процессе проведения физического эксперимента // Социально-педагогические вопросы образования и воспитания: материалы Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Чебоксары, 16 февраля 2024 года. Чебоксары: ООО «Издательский дом «Среда», 2024. С. 139–141.
- Маркосян А.Э. Роль математической грамотности при обучении физике // Шаг в науку: Материалы XVI Региональной научно-практической конференции студентов и магистрантов ИФМИТО НГПУ, Новосибирск, 01–03 апреля 2025 года. Новосибирск: Новосибирский государственный педагогический университет, 2025. С. 57–59.
- Семеняченко Ю.А. Возможности формирования математической грамотности школьников на уроках математики // Развитие общего и профессионального математического образования в системе национальных университетов и педагогических вузов: Материалы 40-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов, Брянск, 07–09 октября 2021 года. Брянск: Брянский государственный университет имени академика И.Г. Петровского, 2021. С. 360–364.
- Федеральная рабочая программа основного общего образования по математике (базовый уровень). URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2025/06/05_frp_matematika-5-9-klassy_baza_17062025_itog-na-sajt.pdf
- OECD. PISA 2021 Mathematics Framework Draft. OECD, 2018. URL: <https://pisa2022-maths.oecd.org/#Home>

Информация об авторе

Семеняченко Юлия Александровна; кандидат педагогических наук; доцент; доцент департамента математики и физики института цифрового образования; ГАОУ ВО Московский городской педагогический университет (Россия, г. Москва, 2-ой Сельскохозяйственный проезд, д. 4); E-mail: semenyachenkoua@mgpu.ru; ORCID: 0000-0001-9522-9040

OPPORTUNITIES FOR FORMING MATHEMATICAL LITERACY IN SCHOOLS THROUGH SOLVING PROBLEMS WITH PHYSICAL CONTENT

Semenyachenko Yu. A. | Moscow City Pedagogical University
Candidate of Pedagogical Sciences,
Associate Professor

Abstract. The article is devoted to the issues of the step-by-step formation of mental actions related to the formation of students' mathematical literacy when solving mathematical problems with physical content. The relevance of the topic is confirmed by the contradiction between the requirements of the modern education system to apply mathematical knowledge in real-life situations and the lack of methods for the

formation and development of relevant skills among students. The introduction of the work reveals the importance of both the need to form students' mathematical and scientific literacy in general, and its individual components: mathematical content, task contexts, and mental actions. The literature review reveals certain deficiencies in the implementation of methodological strategies for the formation and development of mathematical literacy and provides an overview of approaches to teaching mathematical literacy through problem-solving. The results outline one possible solution to this problem, which involves the gradual development of cognitive skills related to mathematical literacy through the solution of physical problems. The paper provides examples of practical-oriented problems that facilitate the gradual development of these skills. Finally, the review concludes with recommendations for using this approach to promote mathematical literacy through problem-solving in various contexts.

Keywords: mathematical literacy, scientific literacy, problems with physical content, the gradual formation of mental actions.

For citation: Semenyachenko Yu. A. Opportunities for Developing Mathematical Literacy in Schoolchildren through Solving Problems with Physical Content. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 3 (43), 25–35. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-25-35

Copyright: © Yu. A. Semenyachenko (2026). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

References

- Antonova, N. A., Babinova, K. Yu. (2024). Features of Forming Mathematical Literacy in Physics Teaching. *Scientific Notes of Shadrinsky State Pedagogical University*, 3(5), 24-31.
- Butyrskiy, G. A. (2007). Problemy obucheniya shkol'nikov resheniyu fizicheskikh zadach. *Vestnik VyatGU*, 16.
- Denishcheva, L.O., Savintseva, N. V., Safuanov, I. S. [et al.] (2021). Features of the formation and assessment of schoolchildren's mathematical literacy. *Science for Education Today*, 11, 4, 113-135, DOI: 10.15293/2658-6762.2104.06.
- Denishcheva, L. O., Safuanov, I. S., Semenyachenko, Yu. A. [et al.] (2021). Mathematical Modeling as an Essential Stage in the Formation of Mathematical Literacy in the Context of Modern Society's Requirements. *Bulletin of the Moscow State Pedagogical University. Series: Computer Science and Educational Informatics*, 4(58), 60-83, DOI: 10.25688/2072-9014.2021.58.4.07.
- Dorokhova, M. A. (2024). Formation of Mathematical Literacy in Physics Lessons at Secondary School. *Psychological and Pedagogical Support for Participants in Educational Relations in the Context of Implementing Blended Learning Technology: Proceedings of the International Scientific and Practical Conference* (pp. 99-105). Chelyabinsk, 14–15 December 2023. Chelyabinsk: A. Miller Library CJSC.
- Kadalova, A. S., Loshkareva, E. A. (2022). Formation of Mathematical Literacy in Physics Lessons. *Scientific Works of the Kaluga State University named after K. E. Tsiolkovsky: Materials of Reports* (pp. 138-142). Kaluga: Kaluga State University named after K. E. Tsiolkovsky. Kaluga, April 13–14 2022.
- Kovaleva, G. S., Gosteva, Yu. N., Kuznetsova, M. I. [et al.] (2022). *Methodological Recommendations for the Formation of Functional Literacy in Students of Grades 5-9 Using an Open Bank of Tasks on a Digital Platform in Six Areas of Functional Literacy in the Educational Process and for Conducting Intra-School Monitoring of the Formation of*

- Functional Literacy in Students*. Moscow: Institute for Educational Development Strategy of the Russian Academy of Education.
- Lukanina, M. A., Azarova, A. S. (2026) Graphs as a Bridge between Mathematics and Physics: Developing Functional Literacy. *Modern Problems of Mathematics, Physics, and Physical and Mathematical Education: Proceedings of the XV International Scientific and Practical Conference* (pp. 216-220). Orekhovo-Zuyevo: State University of Humanities and Technology. Orekhovo-Zuyevo, 3 December 2025.
- Maksimenko, I. P., Pavlenko, I. N., Bashkirova, S. N. (2024). Formation of Mathematical Literacy in the Process of Conducting a Physical Experiment. *Social and Pedagogical Issues of Education and Upbringing: Materials of the All-Russian Scientific and Practical Conference with International Participation*, Cheboksary: Publishing House "Sreda" LLC (pp. 139-141). Cheboksary, 16 February 2024.
- Markosyan, A. E. (2025). The Role of Mathematical Literacy in Teaching Physics. *Step into Science: Materials of the XVI Regional Scientific and Practical Conference of Students and Master's Students of the Institute of Physics, Mathematics, and Technology of Novosibirsk State Pedagogical University*. Novosibirsk: Novosibirsk State Pedagogical University (pp. 57-59). Novosibirsk, 01-03 April 2025.
- Semenyachenko, Yu. A. (2021). Opportunities for Forming Mathematical Literacy in Mathematics Classes. *Development of General and Professional Mathematical Education in the System of National Universities and Pedagogical Universities: Proceedings of the 40th International Scientific Seminar of Mathematics and Computer Science Teachers at Universities and Pedagogical Universities*, Bryansk: Bryansk State University named after Academician I.G. Petrovsky (pp. 360-364). Bryansk, 7-9 October 2021.
- Federal'naya rabochaya programma osnovnogo obshchego obrazovaniya po matematike* (bazovyy uroven'). Retrieved from <https://edsoo.ru/rabochie-programmy/>
- OECD. PISA 2021 Mathematics Framework Draft. OECD, 2018. Retrieved from <https://pisa2022-maths.oecd.org/#Home>

Information about the author

Yulia A. Semenyachenko; Candidate of Pedagogical Sciences; Associate Professor; Associate Professor of the Department of Mathematics and Physics at the Institute of Digital Education; Moscow City Pedagogical University (4, 2nd Selskokhozyaistvenny Proyezd, Moscow, Russia); Email: semenyachenkoua@mgpu.ru; ORCID ID: 0000-0001-9522-9040

Статья поступила в редакцию	24.07.2026
Принята к публикации	17.08.2026
Статья опубликована	18.09.2026

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-3-36-52

УДК
372.851

**УЧЕБНЫЕ ПРОЕКТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ НА
ГЕНЕРИРОВАНИЕ ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫХ ЗАДАЧ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА**

Шабанова Мария Валерьевна
д.п.н., профессор
Розыев Аман Довран оглы
учитель математики

Северный (Арктический) федеральный
университет им. М. В. Ломоносова
Совместная туркмено-российская средняя
общеобразовательная школа им.
А. С. Пушкина

Аннотация. *Постановка проблемы и её значимость для науки и практики.* Доступность генеративного искусственного интеллекта и широкое использование его возможностей учащимися общеобразовательных школ в проектно-исследовательской деятельности ставит перед теорией и методикой обучения математике проблему кардинального изменения сложившихся методических подходов к выбору тематики учебного исследования, к постановке проектных и исследовательских задач и к оценке результатов их решения. Новые подходы призваны найти альтернативу прямому запрету на использование искусственного интеллекта в учебной деятельности для решения проблемы академической честности, создать методические условия, способствующие развитию критического мышления учащихся на старшей ступени общего образования. *Используемые методы для решения проблемы.* Теоретическое моделирование и конструирование проектных заданий на генерирование с использованием искусственного интеллекта математических задач, поисковый эксперимент, методический анализ результатов выполнения заданий учащимися. *Основные результаты исследования.* Установлено, что наибольшими возможностями в формировании критического мышления учащихся обладают задания на генерирование практико-ориентированных задач, так как они позволяют включить в традиционную для математики систему критериев критической оценки задач (необходимость и достаточность данных, непротиворечивость условий, разрешимость доступными методами) дополнительные критерии: реалистичность данных, корректность терминологии и символики, практическая значимость результата решения. На начальных этапах обучения использованию генеративного искусственного интеллекта для генерации задач необходимы пошаговые инструкции, описывающие действия, методы и средства критического анализа и корректировки результатов генерации. Результаты получены с использованием метода фокус-групп на базе Совместной туркмено-российской средней общеобразовательной школы им. А. С. Пушкина. *Выводы и перспективы исследования.* Внедрение предложенного авторами методического подхода требует разработки аналогичных проектных заданий по всем темам школьного курса математики, адаптации формулировок проектных заданий к актуальному и потенциальному уровням развития критического мышления, математической подготовки и математической грамотности обучающихся.

Ключевые слова: среднее общее образования, обучение математике, учебный проект, генерирование задач, искусственный интеллект, критическое мышление

Для цитирования: Шабанова М.В., Розыев А.Д. Учебные проекты по математике на генерирование практико-ориентированных задач с использованием искусственного интеллекта // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 3 (43). С. 36–52. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-36-52

Права: © М.В. Шабанова, А.Д. Розыев (2026). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И.А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

Введение

Начиная с 2010 года (переход на обучение по ФГОС ООО, 2010, а затем и по ФГОС СОО, 2012) включение обучающихся общеобразовательных школ в проектно-исследовательскую деятельность является обязательной составляющей образовательного процесса. Этот вид деятельности рассматривается как ведущее условие достижения метапредметных результатов обучения и профессионального самоопределения учащихся старших классов.

В школах проектно-исследовательская деятельность организуется в разных формах. В рамках урочной деятельности – это использование элементов технологий исследовательского и проектного обучения: постановка проектных и исследовательских задач, организация мини-проектов и мини-исследований. В рамках внеурочной деятельности – это подготовка групповых, сетевых или индивидуальных проектов, или проведение исследований, которые заканчиваются выступлениями учащихся на научных конференциях разных уровней, подготовкой научных публикаций и даже оформлением патентных заявок. В старших классах защита индивидуального проекта является сегодня обязательной частью государственной итоговой аттестации выпускника средней общеобразовательной школы. 16-летний опыт школ по организации обязательной проектно-исследовательской деятельности учащихся позволил уточнить и закрепить в методических рекомендациях РАО (Метод. реком., 2023) содержание понятий «учебный проект» и «учебное исследование», выработать единые подходы к оценке результатов выполнения учащимися проектных и исследовательских заданий, разработать общепедагогические и методические подходы к управлению проектной деятельностью на разных ступенях обучения.

Наиболее методически сложным этапом организации учебной проектной деятельности был и остается этап постановки проектной задачи, особенно в сфере математики. Сложность состоит не только и не столько в выборе планируемого продукта деятельности, сколько в выборе актуальной проблемы, в решение которой могут внести вклад ученики. Наиболее частым выбором учителей является постановка проектных заданий на получение продуктов, значимых для профессиональной деятельности учителя: создание средств наглядного представления учебного содержания, запись образовательных видеороликов или аудио-подкастов, создание подборки задач на определенную тему и т. п.

Такие задания способствовали повышению качества предметных и метапредметных результатов обучения математике, а также освобождали учителя от части трудоемкой работы, особенно той, которая требовала владения цифровыми технологиями. Однако появление генеративного искусственного интеллекта (далее Gen AI) в свободном доступе сделало бессмысленным постановку подобных проектных заданий. Современному школьнику, владеющему этой технологией, не нужно прилагать никаких творческих и интеллектуальных усилий для выполнения подобных проектных заданий.

Приведем в качестве примера результат выполнения проектного задания учащимся на создание инфографики, наглядно представляющей применение производной к исследованию функций. Предполагалось, что такая работа будет способствовать актуализации, систематизации и творческой переработке знаний, полученных на уроках математики, но

оказалось, что для запуска генератора изображений¹ ничего из этого ученику не нужно, достаточно промпта: «Инфографика, исследование возрастания и убывания функций с помощью производной. Инфографика представляет собой комикс» (рис. 1).



Рис. 1. Результат выполнения проектного задания на создание инфографики с помощью генератора изображений

Образовательный эффект как с точки зрения совершенствования предметных, так и метапредметных результатов обучения от выполнения такого проектного задания минимален. А сам продукт, полученный подобным образом, оказался неприменим в педагогической деятельности из-за наличия в нём математических и методических ошибок. На кадре «Пример на графике» видна бессмысленность записей о знаках производных и стрелок в таблице. Такие ошибки часто не замечают ученики из-за недостатка развития критического мышления или из-за низкого уровня математической подготовки. А учитель, не владеющий цифровыми технологиями, не может их устранить самостоятельно.

Бессмысленными становятся и проектные задания на создание подборок задач. Если ранее получению продукта предшествовала длительная работа по изучению теоретических основ и методов их решения, поиск задач в разных источниках или варьирование условий ранее решенных задач, то теперь ничего из этого делать не требуется. Приведем пример выполнения учеником проектного задания на конструирование 10 задач на тему «Построение сечений многогранников плоскостью» с использованием нейросети Deepseek.

Ученику достаточно ввести запрос «Составь 10 задач на тему “Построение сечений многогранника плоскостью”» и через 20 секунд результат готов. Причём программа сама принимает решение о границах вариации условий и требования задач, о расположении их в направлении от простых к сложным. Критический анализ полученного результата показал, что из 10 сгенерированных задач две оказались некорректными. Приведем их:

Задача 1. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (вершина S) на рёбрах SA и SB взяты точки M и N соответственно, причём $SM:MA = 1:2$, $SN:NB = 1:2$. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M и N и параллельно ребру AC . Докажите, что полученное сечение – трапеция, и найдите её основания, если $AC = 6$.

¹ <https://tools.pixelpius.ru/tools/ai-images> –генератор изображений (дата обращения 10.08.2026)

Задача 2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ точки M, N и P – середины рёбер AB, CD и EF (в нижнем основании). Постройте сечение призмы плоскостью (MNP) . Определите, сколько сторон имеет многоугольник сечения, и найдите его периметр, если сторона основания равна a , а боковое ребро равно h .

Некорректность задачи 1 состоит в том, что результатом построения сечения по заданным условиям является треугольник, а не трапеция. Оценка задачи 2 как корректной или некорректной зависит от введенного в школьном курсе стереометрии понятия секущей плоскости. Так в учебнике (Атанасян, 2024) секущей названа плоскость, по обе стороны, от которой имеются точки данного геометрического тела. С этой точки зрения задача 2 не имеет решения, так как заданная плоскость совпадает с плоскостью нижнего основания призмы. В учебнике (Мерзляк, 2019) секущей считается любая плоскость, имеющая с данными геометрическим телом общие точки. Принятие этой точки зрения делает задачу разрешимой: сечением является правильный шестиугольник $ABCDEF$, но содержащей лишнее данное – длину бокового ребра.

Аналогичные факты можно найти в трудах ученых, посвященных тестированию возможностей Gen AI для поддержки учебной и научной математической деятельности. Так А.В. Гриншкун и Н.С. Корнева (Гриншкун 2023) отмечают, что общедоступные Gen AI в настоящее время неплохо справляются с генерацией школьных математических задач на заданную тему и даже упорядочивают их по уровням сложности, но их корректность и правильность решения требуют проверки, так как процент допускаемых Gen AI ошибок очень высок. К такому же выводу пришли зарубежные ученые (Drori, Zhang, Shuttleworth and str., 2022), проведя исследование в отношении возможностей Gen AI по генерации и решению задач из курсов высшей математики. На некорректность работы Gen AI обращают внимание и ученые – математики, начавшие 2 июня 2026 года процесс подписания Лейденской декларации по искусственному интеллекту и математике (Alper, Barany, Chavarri Villarelo and str., 2026).

Все вышеприведенные факты убедительно доказывают, что традиционно используемые учителями математики способы постановки проектных заданий морально устарели. Их выполнение учащимися с использованием Gen AI не имеет никакой образовательной ценности, а продукты такой проектной деятельности не могут быть использованы без предварительной проверки и корректировки. С. В. Рамзанова и А. А. Костенко (Рамзанова и Костенко, 2026) считают, что Gen AI открывает новые возможности для постановки перед учащимися проектных и исследовательских заданий, но для их реализации нельзя ограничиваться постановкой задачи только на получения продукта. Необходимо включение учащихся в дополнительные виды деятельности по проверке и корректировке результата, например, с использованием других цифровых инструментов.

Целью данной статьи является развитие идеи постановки перед учащимися проектных заданий на использование Gen AI так, чтобы не только сохранить, но и обогатить из образовательную ценность. Для этого предлагается при постановке проектных заданий перенести акцент с создания продукта, на его критический анализ и корректировку результата.

Материалы и методы

Согласно методическим рекомендациям, проектные задачи (задания) – это задания прикладного (практического) характера, ориентированные на поиск или создание продукта, значимого для решения реально существующей проблемы и обладающего заданными базовыми свойствами или функционалом. Как отмечается в этих методических рекомендациях, проектные задачи нацелены на «формирование у обучающихся умений определять оптимальный путь для решения проблемного вопроса, прогнозировать проектный результат и оформлять его в виде реального «продукта»; на формирование и развитие у обучающихся умений максимально использовать для создания проектного «продукта» имеющиеся знания и освоенные способы действий, а при их недостаточности –

искать и отбирать необходимые знания и методы (причем не только научные)» (Метод. реком., 2023, 4).

В данной статье мы ограничимся представлением способов постановки перед учащимися проектных заданий на генерацию с использованием Gen AI, последующий критический анализ и корректировку лишь *ситуативных практико-ориентированных задач*. Выбор задач этого вида в качестве объекта генерации определен актуальностью методической проблемы недостаточности средств для формирования функциональной математической грамотности учащихся 10–11 классов. Ограничение одним видом задач позволит нам достаточно полно описать параметры и методы критического анализа, которые могут стать предметом освоения учащимися в ходе выполнения проектных заданий.

Структурные особенности ситуативных практико-ориентированных задач описаны в диссертации И. В. Шутровой (Шутрова, 2025). Ею выделяются три взаимосвязанных структурных элемента: ситуативный контекст, данные, требование. Каждый из них имеет свое образовательное значение и потому должен удовлетворять определенным требованиям.

1. Ситуативный контекст раскрывает обстоятельства и мотивы обращения участников описываемой проблемной ситуации к средствам математики (принятия решения, участия в научной или производственной дискуссии и т. п.). Критический анализ контекста осуществляется по параметрам, представленным в таблице 1.

Таблица 1.
Характеристики критического анализа ситуативных контекстов

Параметры анализа	Требования (критерии)	Методы анализа
Реалистичность ситуации	Ситуация возникала или могла возникнуть в реальной жизни	Поиск свидетельств о существовании сходной ситуации в реальной жизни (прототипа)
Проблемность ситуации	Отсутствие вариантов практических действий или наличие нескольких разумных альтернативных вариантов	Проверка наличия альтернативных практических советов в открытых источниках или в субъектном опыте
Разрешимость ситуации	Разрешима доступными методами математики	Составление или выделение из представленного решения задачи перечня математических действий и теоретической базы для их осуществления с последующим сравнением с уровнем математической подготовки
Минимальность описания ситуации	Отсутствие сведений ненужных для понимания ситуации	Проверка избыточности описания частичным исключением сведений

2. Данные задачи в ситуационном контексте обеспечивают возможность разрешения проблемной ситуации на достигнутом уровне математической подготовки. Критический анализ набора данных осуществляется по параметрам, представленным в таблице 2.

Таблица 2.

Характеристики критического анализа набора данных

Параметры анализа	Требования	Методы анализа
Реалистичность данных	Данные должны быть реальными или являться приближенными значениями реальных данных	Проверка по надёжным источникам согласованности данных задачи с данными реальной ситуации – прототипа
Доступность данных	Данные должны быть доступны участникам описанной ситуации, представлены в аутентичной форме или форме, близкой к ней	Оценка возможности получения данных в представленной форме участниками реальной ситуации – прототипа
Достаточность данных	Данных должно быть достаточно для разрешения ситуации методами математики	Проверка решением или воспроизведением представленного решения
Непротиворечивость набора данных	Избыточный набор не должен включать противоречивых данных	Проверка согласованности результатов при математической обработке разных наборов необходимых и достаточных данных

3. Требование задачи представляет (прямо или косвенно) математический результат, от которого зависит разрешение представленной контекстом проблемной ситуации. Критический анализ требования задачи осуществляется по параметрам, представленным в таблице 3.

Таблица 3.

Характеристики критического анализа требования задачи

Параметры анализа	Требования	Методы анализа
Практическая значимость	Математический результат должен быть значим для разрешения проблемной ситуации	Проверка согласованности с результатом, используемым для разрешения реальной ситуации – прототипа

В соответствии с положениями теории Л. С. Выготского о взаимосвязи процессов обучения и развития (Выготский, 2025) для придания проектным заданиям развивающего характера необходимо включать учащихся деятельность, отнесенную к зоне ближайшего развития их критического мышления.

Нормативное закрепление определения понятия «критическое мышление (critical thinking)» осуществлено Советом по совершенству в критическом мышлении в 1987 году: «Критическое мышление – это интеллектуально дисциплинированный процесс активной и умелой концептуализации, применения, анализа, синтеза и/или оценки информации, собранной или возникшей в результате наблюдения, опыта, рефлексии, рассуждений или коммуникации, используемой в качестве ориентира к убеждениям и действиям. В своей образцовой форме она основана на универсальных интеллектуальных ценностях, выходящих за рамки разделений по предмету, как-то: ясность, точность, последовательность, актуальность, убедительные доказательства, веские причины, глубина, широта и справедливость» (Elder, 2025, 4). Во ФГОС СОО развитость критического мышления

включена в перечень планируемых метапредметных результатов обучения, который выявляется в ходе защиты индивидуального проекта (ФГОС СОО, 2012, 27), но смысл данного термина в нормативных документах об образовании не раскрывается. В связи с этим в ходе проведения исследования мы исходили из определения, принятого на международном уровне.

В качестве теоретической основы решения этой задачи была выбрана модифицированная уровневая шкала развития критического мышления, описанная в работе (Paul, Elder, 2014) и соотнесенная нами с результатами теста Старки (Starkey, 2015):

1. Низший уровень – индивид не делает попыток критического анализа результатов работы Gen AI (Unreflective Thinker, < 20 %).

2. Уровень ниже базового – индивид признает необходимость критического анализа результатов работы Gen AI, но затрудняется в его проведении в отсутствии чётких инструкций и алгоритма действий (Challenged Thinker, 21 % – 40 %).

3. Базовый уровень – индивид владеет базовыми методами проведения критического анализа результатов работы Gen AI, но затрудняется в определении условий их применения (Beginning Thinker, 41 % – 70 %).

4. Повышенный уровень – индивид практикует критический анализ результатов работы Gen AI и стремится к расширению параметров и методов его проведения (Practicing Thinker, 71 % – 90 %).

5. Высокий уровень – индивид свободно ориентируется в методах критического анализа, использует свой творческий потенциал в улучшении результатов работы Gen AI, использует Gen AI как вспомогательный инструмент проектной деятельности (Advanced Thinker, 91 % – 100 %).

Результаты

Результатом исследования стала реализация описанных выше теоретических положений при постановке проектных заданий, отнесенных к учебному модулю: «Логарифмическая функция. Логарифмические уравнения и неравенства» (Алгебра и начала математического анализа, 11 класс).

Проектные задания состояли из трёх частей: 1) генерация практические задачи на использование указанной математической модели с использованием Gen AI; 2) проведение критического анализа сгенерированной задачи с использованием чек-листов; 3) устранение выявленных недостатков сгенерированной задачи через ведение диалога с Gen AI. Приведем в качестве примера результат выполнения одного из таких заданий учеником с низким уровнем развития критического мышления (для выполнения задания ему нужны чёткие указания о назначении, параметрах критического анализа и методах его осуществления).

С помощью DeepSeek по исходному промпту: «сгенерируй контекстную практико-ориентированную задачу на решение логарифмического уравнения» была получена задача 1.

Задача 1. Контекст: Екатерина – 29-летняя преподавательница вокала в музыкальной школе. Она живёт в Москве в панельной девятиэтажке и готовится к важному городскому конкурсу со своими учениками. Но каждую ночь сосед сверху, Сергей, слушает музыку так громко, что у Екатерины не получается выспаться и восстановить голос. Екатерина вызывает полицию. Участковый говорит: «Ночным шумом считается уровень свыше 40 дБ. Принесите нам расчёт, во сколько раз интенсивность звука в вашей квартире выше допустимого, и мы сразу выпишем штраф Сергею».

Данные: Екатерина измеряет шум в своей квартире с помощью приложения на телефоне – 55 дБ. Формула: $L = 10 \lg \frac{I}{I_0}$, где $I_0 = 10^{-12} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2}$ – порог слышимости.

Задание для Екатерины (и для вас как её помощника):

1. Найдите, во сколько раз интенсивность шума у Екатерины выше порога слышимости.

2. Найдите, во сколько раз интенсивность шума в её квартире выше, чем допустимая ночная норма.

3. Напишите короткое обоснование для полиции: «Превышение допустимой интенсивности составляет _____ раз(а). Прошу принять меры в отношении Сергея».

В таблицах 4, 5 и 6 приведены результаты проверки сгенерированной задачи по чек-листам (части таблицы содержащие указания выделены серым цветом).

Таблица 4.

Чек – лист проверки контекста задачи

Параметр анализа (основной вопрос)	Вывод : +/±/-	Метод анализа	Подтверждающие факты
Реалистичность (Возникла ли или могла ли возникнуть в реальной жизни такая ситуация?)	±	Найдите в надёжных источниках описание данной или сходной ситуации (прототипа), данные, доказывающие ее возможность/невозможность возникновения.	ПАО ДОМ.РФ. Что делать, если ночью шумят соседи? ² . Допустимый максимум шума: 55 дБ – днем (от 7:00 до 23:00) и 45 дБ ночью (от 23:00 до 7:00). (СанПиН 1.2.3685-21 таб.5.35) ³ . Обещание и требования участкового не соответствуют установленному порядку работы с жалобами граждан ⁴
Проблемность ситуации (Является ли описанная в задаче ситуация проблемной?)	–	Найдите описание потребностей персонажа и трудностей в их удовлетворении или укажите на их отсутствие.	Персонаж хочет подать жалобу в полицию на шумного соседа и располагает всеми фактами, подтверждающими превышение нормы ночного шума (55 дБ).
Разрешимость (Требуется ли описанная в задаче ситуация применения изучаемых методов математики для её разрешения?)	–	Сформулируйте цель применения математики, достижение которой позволит персонажу преодолеть затруднения.	Получить ответ на вопрос «превышает уровень ночного шума в соседней квартире нормативно установленную верхнюю границу?». Результаты измерения уровня шума выражены в тех же единицах, что и нормативно установленная верхняя граница, следовательно, применение знаний логарифмов не требуется, достаточно сравнить два натуральных числа.
Минимальность описания (Все ли сведения в описании ситуации необходимы для понимания сути проблемы персонажа?)	–	Разбейте описание на части, проверяйте необходимость исключением частей.	Лишние сведения: возраст персонажа, её профессия, информация о подготовке к конкурсу учеников.

² <https://xn--h1alcedd.xn--d1aqf.xn--p1ai/> - информационная страница «Что делать, если ночью шумят соседи?» ПАО ДОМ РФ (дата обращения 10.08.2026).

³ https://sudact.ru/law/postanovlenie-glavnogo-gosudarstvennogo-sanitarnogo-vracha-rf-ot_1430/sanpin-1.2.3685-21/ - СанПиН 1.2.3685-21 «Гигиенические нормативы и требования к обеспечению безопасности и (или) безвредности для человека факторов среды обитания» (дата обращения 10.08.2026).

⁴ <https://trud-prav.ru/yuridicheskaya-pomoshh/Deistviia-Uchastkovogo-Politsii-pri-Zhalobe-Grazhdanina-ai01ex/> - сайт Trud-Prav.ru. Вопросы и ответы (дата обращения 10.08.2026)

Таблица 5.
Чек – лист проверки данных задачи

Параметр анализа (основной вопрос)	Вывод: +/-/±	Метод анализа	Подтверждающие факты
Реалистичность (Являются ли употребимыми в реальной практике приведенные данные?)	±	Найдите в надёжных источниках свидетельства употребимости приведенных терминов, формул, единиц измерения и значений величин.	Сходная формула указана в ГОСТ 23337-2014 Шум ⁵ п.3.21: $L_E = 10 \lg \left(\frac{E}{E_0} \right)$, где E – звуковое воздействие на временном интервале T , $(\text{Па})^2 \cdot \text{с}$, $E_0 = 4 \cdot 10^{-10} (\text{Па})^2 \cdot \text{с}$. Формула применяется для представления в удобном для интерпретации виде результатов измерения уровня шумового воздействия.
Доступность (Доступны ли приведенные данные персонажу в реальной ситуации?)	+	Проверьте, может ли персонаж осуществить описанные в условии задачи действия по получению приведенной информации, соответствует ли форма предоставления в этих источниках информации, указанной в задаче.	Приложение «Шумомер» существует ⁶ . Приложение предоставляет сведения о текущем значении уровня звукового воздействия в дБ, о среднем и максимальном значениях с указанием промежутка времени измерения. ГОСТ, содержащий формулу, находится в открытом доступе.
Достаточность (Достаточно ли данных для удовлетворения потребности персонажа с использованием методов математики?)	+	Перечислите математические данные, нужные для удовлетворения потребности персонажа в описанной ситуации, подберите формулы, теоремы, с помощью которых можно получить требуемый результат, оцените достаточно ли данных для получения результата.	Данные: уровень шумового воздействия в комнате Екате- рины 55 дБ; допустимый уро- вень шумового воздействия в ночное время свыше 40 дБ; порог слышимости $I_0 = 10^{-12} \text{Вт/м}^2$. Данных достаточно для проведения расчётов по представленной формуле.
Непротиворечивость (Согласуются ли данные с нормативными и научными данными и друг другом?)	+	Сравните данные задачи в научными и нормативными. В случае необходимости приведите их к одному виду, удобному для сравнения, привлекая дополнительную информацию.	$E = P^2 \cdot T$; $I = \frac{P^2}{\rho_{\text{среды}} \cdot v_{\text{звука}}}$ Следовательно, $\frac{E}{E_0} = \frac{I}{I_0}$ и $L_E = 10 \lg \left(\frac{E}{E_0} \right) = 10 \lg \left(\frac{I}{I_0} \right)$. Данные о пороговых значениях согласованы. Если $P_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{Па}$, то $E_0 = (2 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 1 = 4 \cdot 10^{-10}$ и $I_0 = \frac{(2 \cdot 10^{-5})^2}{417} \approx 10^{-12}$

⁵ <https://files.stroyinf.ru/Data2/1/4293767/4293767499.pdf>. ГОСТ 23337-2014 «Шум. Методы измерения шума на селитебной территории и в помещениях жилых и общественных зданий. Москва. Стандартинформ, 2019. (дата обращения 10.08.2026).

⁶ https://play.google.com/store/apps/details?id=com.ktwapps.soundmeter&pcampaignid=web_share Шумомер. Google Play (дата обращения 10.08.2026).

Таблица 6.

Чек – лист проверки требований задачи

Параметр анализа (основной вопрос)	Вывод: +/-/±/-	Метод анализа	Подтверждающие факты
Практическая значимость (Является ли указанный в требовании задачи результат применения методов математики значимым для разрешения проблемы?)	–	Описать разрешение проблемы с использованием требуемых результатов или объяснить, почему эти результаты не могут быть использованы для решения проблемы.	Для подачи жалобы на ночной шум нужны сведения в превышении установленной нормы громкости звука. Требования, описанные в задаче, не соответствуют реальным. Следовательно, результаты вычислений не являются практически значимыми.

Третья часть проектной работы состояла в корректировке ранее сгенерированной задачи с использованием промпта, который включал список выявленных недостатков. Шаблон промпта для коррекции задачи также выдавался ученику в готовом виде. В приведенном ниже примере курсивом выделены части текста, дополненные учеником:

«Исправь задачу. Во-первых, из контекста задачи исключи информацию о возрасте и месте работы Екатерины, так как она не имеет отношения к описанной ситуации; добавь информацию о правдоподобных источниках знаний Екатериной формулы. Информацию о действиях Екатерины согласуй с установленным порядком подачи жалоб доступными ей цифровыми ресурсами: приложение для смартфонов «Шумомер» – позволяет измерять уровень шума и сайтом «Госуслуги», который позволяет подавать жалобы с подтверждающими документами; действия участкового согласуй с установленным порядком работы с жалобами граждан. Во-вторых, математические данные задачи и формы их представления включи в контекст задачи. В-третьих, требование задачи измени так, чтобы применение в ней указанной формулы имело практическое значение для разрешения описанной в контексте ситуации».

Анализ протокола диалога ученика с DeepSeek показал, что ввод представленного выше промпта недостаточен для получения качественной задачи, так как изменения задачи для ликвидации одних недостатков часто приводят к появлению новых. Опыт проведения критического анализа, приобретенный учеником на втором этапе выполнения проектного задания, позволяет ему вести корректирующий диалог с Gen AI, приводящий в конце концов к приемлемому результату. Приведем пример задачи 2, полученной в результате этого диалога.

Задача 2. *Контекст и данные:* Екатерина – студентка первого курса. Она живёт в Москве в многоквартирном доме. Каждую ночь сосед сверху, Сергей, включает музыку так громко, что Екатерина не может уснуть.

Екатерина обратилась участковому. Он объяснил ей, что по закону в Москве ночной нормой считается уровень звука до 45 дБ, а жалобу можно подать через сайт «Госуслуги». При подаче жалобы нужно указать, насколько децибел фактический шум превышает эту норму и предоставить подтверждения замеров. Екатерина в течение недели ночью измеряла уровень шума в своей комнате с помощью приложения Шумомер на своем смартфоне. Приложение показало средний уровень шума 75 дБ. Во вкладке «Справка» она прочла следующую информацию

Справка:

Децибел (дБ) — это единица измерения уровня интенсивности звука (уровня шума). Шкала децибел устроена логарифмически: увеличение уровня на 10 дБ означает, что

физическая интенсивность звука (мощность звуковой волны) возрастает в 10 раз. Например, звук в 50 дБ в 10 раз интенсивнее звука в 40 дБ, а звук в 60 дБ — в 100 раз интенсивнее, чем 40 дБ.

На занятиях по физике Екатерина как раз проходит раздел акустики и знает, как уровень шума в децибелах L связан с интенсивностью звука I :

$$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad (1)$$

где $I_0 = 10^{-12} \text{ Вт/м}^2$ – порог слышимости, а I – интенсивность звуковой волны (Вт/м^2).

Екатерина решила воспользоваться этой формулой, чтобы указать в заявлении не только, на сколько дБ превышает шум из соседней квартиры предельно допустимый уровень (А), но и во сколько раз при этом увеличивается интенсивность звука (Б).

Задание. Помогите ей провести необходимые расчёты и дополнить ими заявление:

«Прошу вас привлечь к административной ответственности лицо, проживающее по адресу ..., которое ежедневно нарушает закон города Москвы "О соблюдении покоя граждан и тишины в городе Москве". Замеры уровня шума в моей комнате, произведенные мной в течение недели, показывают, что в среднем норма ночного шума превышена на (А) _____ дБ, что соответствует увеличению интенсивности звука в (Б) _____ раз».

Решение

Пункт А. Нахождение превышения в децибелах

Разность между фактическим уровнем шума и нормативом:

$$\Delta L = 75 - 45 = 30 \text{ дБ.}$$

Пункт Б. Сравнение интенсивностей звука

Найдем отношение $\frac{I_{75}}{I_{45}}$, используя свойства логарифмов.

Запишем выражение для разности уровней шума ΔL :

$$\Delta L = L_{75} - L_{45}$$

$$30 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_{75}}{I_0}\right) - 10 \cdot \lg\left(\frac{I_{45}}{I_0}\right)$$

Разделим обе части равенства на 10:

$$3 = \lg\left(\frac{I_{75}}{I_0}\right) - \lg\left(\frac{I_{45}}{I_0}\right)$$

Применим свойство разности логарифмов: $\lg a - \lg b = \lg\left(\frac{a}{b}\right)$:

$$3 = \lg\left(\frac{\frac{I_{75}}{I_0}}{\frac{I_{45}}{I_0}}\right)$$
$$3 = \lg\left(\frac{I_{75}}{I_{45}}\right)$$

По определению десятичного логарифма:

$$\frac{I_{75}}{I_{45}} = 10^3 = 1000$$

Ответ: *«Прошу вас привлечь к административной ответственности лицо, проживающее по адресу ..., которое ежедневно нарушает закон города Москвы "О соблюдении покоя граждан и тишины в городе Москве". Замеры уровня шума в моей комнате, произведенные мной в течение недели показывают, что в среднем норма ночного*

шума превышена на (А) 30 дБ, что соответствует увеличению интенсивности звука в (Б) 1000 раз».

Представленный в статье способ постановки проектных заданий получен в 2025–2026 учебном году в процессе работы с фокус-группой учащихся 11 класса Совместной туркмено-русской средней общеобразовательной школы им. А. С. Пушкина. Теоретические основы применения метода фокус-групп описаны в монографии (Штейнберг, 2014). Это качественный метод исследования, позволивший сделать респондентов не только первыми испытуемыми, но и соавторами разрабатываемых учебных материалов. В соответствии с методологией данного метода была сформирована группа из 5 человек, в которую было включено по одному представителю от учащихся с разными уровнями развития критического мышления. Для подбора респондентов использовался тест Л. Старки, адаптированный Е. Л. Луценко (Луценко, 2014) и частично переработанный нами⁷ с целью его лучшей кросс-культурной ориентации и учёта возрастных особенностей и интересов учащихся выпускных классов Туркменистана. На первом этапе работы учащиеся включались в деятельность выполнения проектного задания на генерацию, критический анализ и корректировку практико-ориентированной задачи. В ходе выполнения этого задания учащимся разрешалось взаимодействовать с интервьюером, и между собой, затем организовывалась групповая дискуссия, имеющая целью определить направления доработки апробируемых инструктивных материалов и чек-листов, помогающих в выполнении задания.

После доработки материалы вновь предлагались к использованию участникам фокус-группы, но уже для получения контекстных практико-ориентированных задач по другой теме школьного курса, и работа повторялась. В результате включенного наблюдения за работой учащихся по выполнению проектных заданий было установлено, что в зависимости от их уровня развития критического мышления при постановке заданий необходимо варьировать следующие параметры проектного задания: прямое/косвенное указание на проведение критического анализа; количество задаваемых параметров критического анализа; наличие/отсутствие описания методов. Проектные задания предлагались учащимся к исполнению дважды, при изучении учебных модулей «Логарифмические функции. Логарифмические уравнения и неравенства» и «Тела вращения».

Заключение. Представленное исследование находится лишь на начальной стадии, но уже сейчас ясно, что проблемы, вызванные делегированием учащимися Gen AI проектных заданий, могут быть решены не только с сохранением их образовательного потенциала, но и с его расширением. Проектные задания, подобные представленному в статье, позволяют:

- расширять кругозор учащихся в области приложений изучаемых вопросов математики, так как её предлагает Gen AI в процессе генерирования практико-ориентированных задач;
- формировать функциональную математическую грамотность не только за счёт включения учащихся в деятельность решения контекстно поставленных практико-ориентированных задач, но и за счёт проверки сгенерированных Gen AI на реалистичность;
- совершенствовать универсальные умения по работе с информацией, так как в ходе выполнения таких проектных заданий учащиеся должны осуществлять поиск источников информации, выбирать её информацию, анализировать и оценивать по предложенным критериям с использованием указанных методов;
- развивать критическое мышление учащихся.

Дальнейшее исследование будет направлено на получение статистических данных, подтверждающих эти выводы, и на расширение спектра учебных модулей постановки подобных проектных заданий.

⁷ <https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLScGwRZZEpeSIB03YDiLO2F-k5LWbHnS8YTMotgUQkt3k-Ю9A/viewform> – переработанный тест Старки (дата обращения 29.08.2026).

Список литературы

- Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., Кадомцев С.Б. и др. Геометрия 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни. 12-е изд., стереотип. М.: Просвещение, 2024.
- Выготский Л.С. Психология развития. Избранные работы. М.: Издательство Юрайт, 2025. URL: <https://urait.ru/bcode/562567> (дата обращения: 09.08.2026).
- Гриншкун А.В., Корнева Н.С. Влияние генеративных нейронных сетей на обучение математике // Информатизация образования и методика электронного обучения: цифровые технологии в образовании: материалы VII Междунар. науч. конф. (Красноярск, 19–22 сент. 2023 г.). Красноярск: Красноярский гос. пед. ун-т им. В. П. Астафьева, 2023. С. 245–248. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_54778336_64626443.pdf (дата обращения: 09.08.2026).
- Луценко Е.Л. Адаптация теста критического мышления Л. Старки. Вісник Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна. Серія: Психологія. 2014. № 55. С. 65–70.
- Мерзляк А.Г., Номировский Д.А., Поляков В.М. Геометрия 10 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: углубленный уровень / под ред. В. Е. Подольского. 2-е изд. М.: Вентана-Граф, 2019.
- Методические рекомендации по организации учебной проектно-исследовательской деятельности в образовательных организациях. Институт содержания и методов обучения им. В. С. Леднева, 2023 [Электронный ресурс]. Режим доступа: Сайт Единое содержание общего образования (URL: <https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/metodicheskie-rekomendaczii-po-organizaczii-uchebnoj-proektno-issledovatelskoj-deyatelnosti-v-obrazovatelnyh-organizaczijah-3.pdf>) (дата обращения 10.08.2026).
- Постановление Главного государственного санитарного врача РФ от 28.01.2021 № 2 «Об утверждении санитарных правил и норм СанПиН 1.2.3685-21 "Гигиенические нормативы и требования к обеспечению безопасности и (или) безвредности для человека факторов среды обитания"» [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://sudact.ru/law/postanovlenie-glavnogo-gosudarstvennogo-sanitarnogo-vracha-rf-ot_1430/sanpin-1.2.3685-21/ (дата обращения: 09.08.2026).
- Приказ Минобрнауки России от 17.12.2010 № 1897 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования» (ред. от 11.12.2020): зарегистрировано в Минюсте России 01.02.2011 № 19644 [Электронный ресурс]. Режим доступа: официальный сайт Минобрнауки (URL <https://fgosreestr.edsoo.ru/federal-standards>). (дата обращения: 09.08.2026).
- Приказ Минобрнауки России от 17.05.2012 № 413 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования» (ред. от 12.02.2025): зарегистрировано в Минюсте России 07.06.2012 № 24480 [Электронный ресурс]. Режим доступа: официальный сайт Минобрнауки (URL: <https://fgosreestr.edsoo.ru/federal-standards>). (дата обращения: 09.08.2026).
- Рамазанова С.В., Костенко А.А. Искусственный интеллект в математическом образовании: трансформация профессиональной деятельности учителя в цифровую эпоху // Экономика и социум. 2026. № 3 (142). С. 916–921.
- Шутрова И.В., Формирование функциональной математической грамотности в процессе обучения математике на уровне основного общего образования посредством сквозных контекстных задач: диссер. на соискание уч. степ. канд. пед. наук, Елец, 2025.
- Штейнберг И., Шанин Т., Ковалев Е., Левинсон А. Качественные методы. Полевые социологические исследования. СПб: Алетейя, 2014.

- Alper, Barany, Chavarri Villarello and str., Leiden Declaration on Artificial Intelligence and Mathematics. DOI: 10.5281/zenodo.20302944. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://doi.org/10.5281/zenodo.20302944> (дата обращения: 09.08.2026).
- Drori I., Zhang R., Shuttleworth R., et al. A neural network solves, explains, and generates university math problems by program synthesis and few-shot learning at human level. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2022. Vol. 119, No. 32. e2123433119. DOI: 10.1073/pnas.2123433119.
- Elder L. *Critical Thinking Therapy: For Happiness and Self-Actualization*. Santa Barbara. The Foundation for Critical Thinking, 2025.
- Elder L, Paul R. *Critical Thinking: Tools for Taking Charge of Your Learning and Your Life*. London, Bloomsbury Publishing PLC, 2020.
- Starkey, L. B. Critical thinking skills success in 20 minutes a day, LearningExpress, 2015. URL: <https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&scope=site&db=nlebk&db=nlabk&AN=1083679>). (дата обращения: 28.08.2026).

Информация об авторах

Шабанова Мария Валерьевна; доктор педагогических наук; профессор; профессор кафедры экспериментальной математики и информатизации образования; ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова» (Российская Федерация, 163002, Архангельская область, город Архангельск, наб. Северной Двины, д.17); E-mail: shabanova.maria-pomorsu@yandex.ru; ORCID: 0000-0002-5043-0960; Scopus ID: 57221052603;

Розыев Аман Довран оглы; учитель математики; «Совместная туркмено-российская школа им. А. С. Пушкина» (Туркменистан, 744036, г. Ашхабад, ул. Гарашсызлык, д. 64); E-mail: aman.roziev.1995@gmail.com; ORCID: 0009-0004-3591-7617

EDUCATIONAL PROJECTS IN MATHEMATICS AIMED AT GENERATING PRACTICE-ORIENTED TASKS USING ARTIFICIAL INTELLIGENCE

Shabanova M. V.
Dr. Sci. (Pedagogy), Professor

Rozyyev A. D. o.
Mathematics teacher

Northern (Arctic) Federal University

Joint Turkmen-Russian Secondary School
named after A.S. Pushkin

Abstract. Problem statement and its significance for science and practice. The accessibility of generative artificial intelligence and the widespread use of its capabilities by secondary school students in project-based and research activities pose a fundamental challenge to the theory and methodology of mathematics education. This challenge concerns the need to substantially revise established methodological approaches to selecting topics for educational research, formulating project and research tasks, and assessing the results of their completion. The proposed approaches are intended to provide an alternative to the outright prohibition of artificial intelligence in educational activities as a means of addressing the problem of academic integrity, while creating methodological conditions conducive to the development of students' critical thinking at the upper-secondary level of education. *Methods used to address the problem.* The study employed theoretical modelling and the design of project-based tasks aimed at generating mathematical problems with the use of artificial intelligence, an exploratory experiment, and a methodological analysis of the

results obtained by students when completing the tasks. Main findings. The study established that tasks involving the generation of practice-oriented mathematical problems offer the greatest potential for developing students' critical thinking. Such tasks make it possible to supplement the traditional system of criteria used in mathematics for the critical evaluation of mathematical problems—namely, the necessity and sufficiency of the given data, the consistency of the conditions, and solvability by accessible methods – with additional criteria, including the reliability and realism of the data, the correctness of terminology and mathematical notation, and the practical significance of the solution obtained. At the initial stages of learning to use generative artificial intelligence for mathematical problem generation, students require step-by-step instructions describing the actions, methods, and tools needed to critically analyse and revise the generated results. Conclusions and prospects for further research. The implementation of the methodological approach proposed by the authors requires the development of project-based tasks of the type presented in this article for all topics of the school mathematics curriculum. It also requires adapting the wording of such tasks to students' current and potential levels of critical-thinking development, as well as to their levels of mathematical proficiency and mathematical literacy.

Keywords: general secondary education, mathematics education, educational project, mathematical problem generation, artificial intelligence, critical thinking

For citation: Shabanova M. V., Rozyyev A. D. o. (2026). Educational Projects aimed at Generating practice-oriented tasks using Artificial Intelligence. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 3 (43), 36–52. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-36-52

Copyright: © M. V. Shabanova, A. D. o. Rozyyev (2026). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

References

- Alper, Barany, Chavarri Villarello, & Str. (2026). Leiden Declaration on Artificial Intelligence and Mathematics. *Zenodo*. <https://doi.org/10.5281/zenodo.20302944>
- Atanasyan, L. S., Butuzov, V. F. & Kadomtsev, S. B., et al. (2024). Geometriya 10–11 klassy: ucheb. dlya obshcheobrazovat. uchrezhdeniy: bazovyy i profil. urovni [Geometry grades 10–11: textbook for general education institutions: basic and profile levels] (12th ed., stereotype). *Prosveshchenie*. (In Russ).
- Drori, I., Zhang, R., Shuttleworth, R., et al. (2022). A neural network solves, explains, and generates university math problems by program synthesis and few-shot learning at human level. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 119(32), e2123433119. <https://doi.org/10.1073/pnas.2123433119>
- Elder, L., Paul, R. (2020). *Critical Thinking: Tools for Taking Charge of Your Learning and Your Life*. Bloomsbury Publishing PLC.
- Elder, L. (2025). *Critical Thinking Therapy: For Happiness and Self-Actualization*. The Foundation for Critical Thinking.
- Grinshkun, A. V., Korneva, N. S. (2023). Vliyanie generativnykh neyronnykh setey na obuchenie matematike [Influence of generative neural networks on teaching mathematics]. In *Informatizatsiya obrazovaniya i metodika elektronnoy obucheniya: tsifrovyye tekhnologii v obrazovanii: materialy VII Mezhdunar. nauch. konf. (Krasnoyarsk, 19–22 sent. 2023 g.)* [Informatization of education and methods of e-learning: digital technologies in education: proceedings of the VII International scientific conference (Krasnoyarsk, Sept 19–22, 2023)]

- (pp. 245–248). Krasnoyarskiy gos. ped. un-t im. V. P. Astaf'eva. Retrieved August 9, 2026, from https://www.elibrary.ru/download/elibrary_54778336_64626443.pdf (In Russ).
- Institut sodержaniya i metodov obucheniya im. V.S. Ledneva. (2023). Metodicheskie rekomendatsii po organizatsii uchebnoy proektno-issledovatel'skoy deyatel'nosti v obrazovatel'nykh organizatsiyakh [Methodological recommendations on organizing educational project-research activities in educational organizations]. Retrieved August 10, 2026, from <https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/metodicheskie-rekomendaczii-po-organizaczii-uchebnoj-proektno-issledovatel'skoj-deyatelnosti-v-obrazovatel'nykh-organizacziiyah-3.pdf> (In Russ).
- Lutsenko, E. L. (2014). Adaptatsiya testa kriticheskogo myshleniya L. Starki. *Visnik Kharkivs'kogo natsional'nogo universitetu imeni V. N. Karazina. Seriya: Psikhologiya*, (55), 65–70. (In Russ).
- Merzlyak, A. G., Nomirovskiy, D. A., Polyakov, V. M. (2019). Geometriya 10 klass: ucheb. dlya obshcheobrazovat. uchrezhdeniy: uglublennyy uroven' [Geometry grade 10: textbook for general education institutions: advanced level] (2nd ed., V. E. Podolskiy, Ed.). *Ventana-Graf*. (In Russ).
- Postanovlenie Glavnogo gosudarstvennogo sanitarnogo vracha RF ot 28.01.2021 № 2. (2021). Ob utverzhdenii sanitarnykh pravil i norm SanPiN 1.2.3685-21 "Gigienicheskie normativy i trebovaniya k obespecheniyu bezopasnosti i (ili) bezvrednosti dlya cheloveka faktorov sredy obitaniya" [On approval of sanitary rules and norms SanPiN 1.2.3685-21 "Hygienic standards and requirements for ensuring safety and (or) harmlessness for humans of environmental factors"]. Retrieved August 9, 2026, from https://sudact.ru/law/postanovlenie-glavnogo-gosudarstvennogo-sanitarnogo-vracha-rf-ot_1430/sanpin-1.2.3685-21/ (In Russ).
- Prikaz Ministerstva obrazovaniya i nauki Rossiyskoy Federatsii ot 17.12.2010 № 1897. (2010). Ob utverzhdenii federal'nogo gosudarstvennogo obrazovatel'nogo standarta osnovnogo obshchego obrazovaniya [On approval of the federal state educational standard of basic general education] (as amended 11.12.2020). Retrieved August 9, 2026, from <https://fgosreestr.edsoo.ru/federal-standards> (In Russ).
- Prikaz Ministerstva obrazovaniya i nauki Rossiyskoy Federatsii ot 17.05.2012 № 413. (2012). Ob utverzhdenii federal'nogo gosudarstvennogo obrazovatel'nogo standarta srednego obshchego obrazovaniya [On approval of the federal state educational standard of secondary general education] (as amended 12.02.2025). Retrieved August 9, 2026, from <https://fgosreestr.edsoo.ru/federal-standards> (In Russ).
- Ramazanova, S. V., Kostenko, A. A. (2026). Iskusstvennyy intellekt v matematicheskom obrazovanii: transformatsiya professional'noy deyatel'nosti uchitelya v tsifrovuyu epokhu. *Ekonomika i sotsium*, 3(142), 916–921. (In Russ).
- Shutrova, I. V. (2025). *Formirovanie funktsional'noy matematicheskoy gramotnosti v protsesse obucheniya matematike na urovne osnovnogo obshchego obrazovaniya posredstvom skvoznykh kontekstnykh zadach* [PhD dissertation]. Yelets. (In Russ).
- Shtejnberg, I., Shanin, T., Kovalev, E., Levinson, A. (2014). *Kachestvennye metody. Polevye sociologicheskie issledovaniya*. SPb.: Aleteya. (In Russ).
- Vygotskiy, L. S. (2025). Psikhologiya razvitiya. Izbrannye raboty [Psychology of development. Selected works]. *Izdatel'stvo Yurayt*. Retrieved August 9, 2026, from <https://urait.ru/bcode/562567> (In Russ).
- Starkey, L. B. (2015). Critical thinking skills success in 20 minutes a day, LearningExpress. from <https://search.ebscohost.com/login.aspx?direct=true&scope=site&db=nlebk&db=nlabk&AN=1083679>

Information about the authors

Maria V. Shabanova; Doctor of Pedagogical Sciences; Professor; Professor, Department of Experimental Mathematics and Informatization of Education; Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov (Russian Federation, 163002, Arkhangelsk Region, Arkhangelsk, 17 Severnaya Dvina Embankment); E-mail: shabanova.maria-pomorsu@yandex.ru; ORCID: 0000-0002-5043-0960; Scopus ID: 57221052603;

Aman Dovran ogly Rozyev; Mathematics teacher; Joint Turkmen-Russian School named after A. S. Pushkin" (Turkmenistan, 744036, Ashgabat, Garashsyzyk st., 64); E-mail: aman.roziev.1995@gmail.com; ORCID: 0009-0004-3591-7617

Статья поступила в редакцию	10.08.2026
Принята к публикации	31.08.2026
Статья опубликована	18.09.2026

УДК
372.851**ОБУЧЕНИЕ РЕШЕНИЮ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧ
МЕТОДОМ РЕЛЕВАНТНОГО ВЫБОРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИТУАЦИИ В 7–9 КЛАССАХ****Яковлева Юлия Андреевна** | Московский педагогический
аспирант | государственный университет

Аннотация. В статье затрагивается проблема обучения решению вероятностных задач учащихся 7–9 классов в рамках учебного курса «Вероятность и статистика». На основании анализа современных исследований получен вывод о том, что школьники часто демонстрируют поверхностное владение вероятностными понятиями и испытывают трудности при самостоятельном выборе математической модели для решения задач. В учебной литературе термин «вероятностная модель» практически не используется, а вопросы обучения выбору модели в условиях обновлённых стандартов остались нераскрытыми. На основе анализа научной литературы и нормативных документов в статье выделены и систематизированы семь основных видов математических вероятностных моделей случайных экспериментов, изучаемых в основной и старшей школе. Введено понятие «метод решения вероятностных задач в 7–9 классах релевантным выбором математической модели». Предложена структурно-функциональная модель обучения, включающая целевой, методологический, содержательно-организационный и результативно-оценочный блоки. Цель обучения состоит в формировании умения решать вероятностные задачи методом релевантного выбора математической модели стохастической ситуации. В рамках модели конкретизирован план работы с вероятностной задачей (содержательный анализ задачи, выбор математической вероятностной модели или её построение, работа с математической вероятностной моделью, анализ и интерпретация результата), а также описаны приёмы визуализации (статическая и динамическая) и варьирования (переформулирование, содержательное и сюжетное варьирование). Приводятся примеры четырёх групп упражнений (на распознавание (идентификацию) вероятностной модели и её обоснованный выбор, на построение математической вероятностной модели с учётом изменяющихся условий, на выявление вероятностных закономерностей и установление изоморфизма математических моделей стохастических ситуаций, на сопоставление стохастической ситуации и математической вероятностной модели). Экспериментальное обучение показало, что предложенная методика повышает качество предметных результатов.

Ключевые слова: обучение теории вероятностей, вероятностные задачи, математическая модель, релевантный выбор, метод математического моделирования, методика обучения решению задач

Для цитирования: Яковлева Ю.А. Обучение решению вероятностных задач методом релевантного выбора математической модели стохастической ситуации в 7–9 классах // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 3 (43). С. 53–71. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-53-71

Права: © Ю. А. Яковлева (2026). Опубликовано Елецким государственным

Введение

Теория вероятностей является важным элементом школьного образования. Знакомство с основами математического описания случайности способствует овладению учащимися практическими умениями, которые необходимы им для успешной учёбы и жизни в полном неопределённости мире. Решение задач, в которых описаны подобные ситуации, развивает у учащихся такие важные личностные характеристики, как способность действовать в условиях неопределённости, устойчивость к стрессовым ситуациям, критическое мышление.

В современной системе школьного образования учебный модуль «Вероятность» входит в структуру учебного курса «Вероятность и статистика» как сквозная содержательно-методическая линия, представленная в соответствующем разделе программ 7–9, а также 10–11 классов. Результаты освоения программы названного курса, в частности, относящиеся к его вероятностной составляющей умения, проверяются на основном (ОГЭ) и едином (ЕГЭ) государственных экзаменах. На ОГЭ проверяется умение *находить вероятности случайных событий в опытах с равновероятными элементарными событиями; решать задачи методом организованного перебора и с использованием правила умножения* (ФРП ООО, базовый уровень). При проведении ЕГЭ проверяется умение *вычислять вероятность с использованием графических методов; применять для вычисления вероятностей формулы сложения и умножения, формулу полной вероятности, формулу Бернулли, комбинаторные факты и формулы; составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат* (ФРП СОО, базовый уровень).

Результаты оценочных мероприятий показывают, что, к сожалению, школьники демонстрируют преимущественно поверхностное понимание изученных понятий, а решение вероятностных задач даётся учащимся достаточно тяжело. Многие авторы сходятся во мнении, что причиной низких предметных результатов у учащихся является непонимание структуры вероятностных задач, применение готовых моделей и неспособность самостоятельно выбирать и составлять математическую модель для решения вероятностной задачи (Леонтьева, Вологжанина, 2016; Ветохин, Деза, 2023; Максимова, 2024; Яремко, Селютин, 2025; Щербатых, Покорная, Шаталова, 2026).

В учебной литературе для основного и среднего общего образования термины «вероятностная модель», «математическая модель случайного эксперимента» практически не используются, за исключением отдельных пособий. Среди них дополнительные пособия к учебникам А.Г. Мордковича для 7–9 классов (Мордкович, 2008), Е.А. Бунимовича для 5–11 классов (Бунимович, 2008), тематический тренажёр для подготовки к ЕГЭ по математике профильного уровня (Рязановский, 2019). В названных пособиях также затронута проблема обучения выбору математической модели для вычисления вероятностной случайных событий, однако этот выбор фактически сводится к выбору одной из вероятностных схем (выбор с возвращением или без возвращения, последовательный или одновременный) или к выбору способа описания пространства элементарных событий в рамках классической модели.

К настоящему времени проведено достаточно много научно-методических исследований, связанных с обучением элементам стохастики в школе.

В.В. Фирсов отмечает, что важно, чтобы учащиеся получили практику в формализации реальной ситуации и научились выбирать наиболее подходящую для решения задачи формальную модель (Фирсов, 1974, 97). Заметим, что в рамках своего исследования автор сознательно ограничился традиционной классической схемой, поэтому построение и выбор математической вероятностной модели рассматривается им исключительно в контексте обучения учащихся конструированию различных пространств элементарных

событий и выборе того, которое удовлетворяет исходному предположению о равновозможности.

В работах В.Д. Селютин (Селютин, 1985), А. Плоцки (Плоцки, 1992), Е.А. Бунимовича (Бунимович, 2004) и др. решены общие научно-методические проблемы, связанные с построением вероятностно-статистической линии в основном и среднем общем образовании. Т.А. Полякова (Полякова, 2009), С.В. Щербатых (Щербатых, 2006), С.Н. Дворяткина (Дворяткина, 2017), К.Г. Лыкова (Лыкова, 2022) и др. рассматривают прикладную направленность обучения стохастике как средство формирования вероятностного мышления, стохастического мировоззрения и культуры учащихся и касаются преимущественно уровней среднего общего и высшего образования. Т. А. Полякова отмечает, что решение вероятностных задач способствует развитию компонентов вероятностного мышления учащихся, определяет требования к системам задач в старших классах, но подробно на обучении решению вероятностных задач автор не останавливается. Роль информационных технологий в обучении элементам теории вероятностей, комбинаторике и статистике отмечена также Е.А. Бунимовичем (Бунимович, 2004), К.Г. Лыковой (Лыкова, 2022), А.Ю. Поляковой (Полякова, 2024) и др.

Таким образом, к настоящему времени разработаны научно-методические основы обучения стохастике в школе. Однако, проведённые ранее исследования преимущественно касаются старших классов или охватывают научно-методические проблемы общего характера. Ни одно из проанализированных исследований не связано с разработкой методики обучения решению вероятностных задач на основе построения или выбора математической вероятностной модели в условиях обновлённых стандартов.

Методология исследования

Вероятностная задача представляет собой словесное описание случайного эксперимента с требованием вычислить вероятность какого-то из событий этого эксперимента. Для вычисления вероятностей случайных событий используют различные математические модели, которые отражают все существенные свойства опыта. С целью выделения основных видов математических моделей случайных экспериментов, которые используются для подсчёта вероятностей событий, мы обратились к общему определению вероятностной модели.

Под математической моделью случайного эксперимента понимают вероятностное пространство – тройку объектов $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где: Ω – множество элементарных событий; $\mathcal{F}$ – алгебра подмножеств Ω (случайных событий); P – вероятность, определённая на алгебре $\mathcal{F}$ (Колмогоров, 1933; Гнеденко, 1988). Это определение включает систему аксиом теории вероятностей, которая изучается на уровнях высшего образования.

Конкретизация каждого из трёх компонентов вероятностного пространства позволила выделить в содержании учебного курса «Вероятность и статистика» семь основных видов математических моделей случайных экспериментов и представить их в виде систематизированного перечня:

1) модель случайного эксперимента с конечным числом равновозможных элементарных событий – классическая модель (8 класс); модель случайного выбора без возвращения – схема урн (8 класс, 9 класс);

2) модель случайного эксперимента с бесконечным числом равновозможных элементарных событий – геометрическая модель (9 класс);

3) модель статистической вероятности – вероятность как число, вокруг которого стабилизируется относительная частота случайного события в длинной серии опытов (7 класс, 9 класс);

4) модель случайного эксперимента, основанная на теоремах о вероятностях случайных событий (вероятность противоположного события, вероятность объединения событий, вероятность пересечения событий, условная вероятность) (8 класс);

5) модель появления k успехов в серии n независимых испытаний с двумя исходами – схема испытаний Бернулли (9 класс);

6) модель «*двухэтапного*» *случайного эксперимента* – формула полной вероятности (10 класс, углублённый уровень);

7) модель *апостериорной (послеопытной, условной)* вероятности – формула Байеса (10 класс, углублённый уровень).

Признаки, по которым осуществляется распознавание или идентификация выделенных математических вероятностных моделей, включены в их названия.

Основой обучения решению вероятностных задач с использованием предложенного систематизированного перечня является деятельность, которая получила название «релевантный выбор математической вероятностной модели». Под этим термином мы понимаем процесс и результат обоснованного выбора такой математической модели, которая адекватно отражает существенные особенности стохастической ситуации и соответствует цели решения задачи. Деятельность с точки зрения психологии представляет собой активность человека, которая направлена на достижение сознательно поставленной цели. Структура деятельности включает следующие взаимосвязанные компоненты: мотив, цель, предмет, средства, действия, результат. Любой вид деятельности осуществляется в виде системы действий, последовательное выполнение которых ведёт к достижению цели этой деятельности. Освоенный человеком способ выполнения действий, который обеспечивается совокупностью приобретённых знаний и навыков – это умение (Леонтьев, 1975). Следовательно, релевантный выбор математической вероятностной модели – это деятельность, направленная на выбор математической модели, которая адекватная описанной в задаче стохастической ситуации и позволяет решить задачу рациональным способом, а результатом овладения этой деятельностью является соответствующее умение.

С точки зрения методики обучения математики понятие «релевантный выбор математической вероятностной модели» можно раскрыть в двух аспектах:

- как метод решения вероятностных задач в 7–9 классах;
- как приём обучения методу математического моделирования.

При выполнении исследования решалась задача разработки метода решения вероятностных задач релевантным выбором математической модели стохастической ситуации, формирования у учащихся 7–9 классов соответствующего этому методу умения и определения приёмов релевантного выбора.

Компонентный состав умения решать вероятностные задачи методом релевантного выбора математической модели стохастической ситуации раскрыт через состав соответствующей деятельности и включает систему предметных действий, которая включает действия при релевантном выборе.

1. Работать с текстом задачи и выполнять его первичный анализ: выявлять все существенные свойства стохастической ситуации; выделять подзадачи; устанавливать цель решения;

2. Распознавать и обоснованно выбирать математическую вероятностную модель, которая подходит для решения задачи, а также комбинировать математические модели основных видов.

3. Составлять выбранную математическую модель и осуществлять внутримodelьное решение.

4. Проверять и анализировать решение: выполнять оценку правдоподобия ответа; искать альтернативное решение; анализировать задачу на наличие другой адекватной модели; сравнивать различные решения.

В результате анализа диссертационных исследований и общей теории математических задач получен вывод о том, вероятностные задачи обладают определёнными содержательными и процессуальными особенностями, которые ложатся в основу приёмов обучения вероятностных задач методом релевантного выбора математической модели стохастической ситуации. Прикладной характер (Фирсов, 1974) вероятностных задач обуславливает целесообразность применения метода математического моделирования

релевантным выбором математической вероятностной модели. Вероятностные задачи неформализованные (Яремко, 2025), из чего вытекает применение приёма визуализации. Визуализация предшествует этапу формализации в методе математического моделирования. Вероятностные задачи обладают так называемой «чувствительностью к деталям», в связи с чем используется приём варьирования.

Анализ работ Ю. М. Колягина, в частности, содержания этапов решения математической задачи (Колягин, 1977), позволил конкретизировать их относительно вероятностных задач. В рамках исследования этапы осмысления условия, составления плана решения, реализации плана решения и изучения найденного решения, соотнесённые с этапами с этапами математического моделирования, получили названия:

- содержательный анализ задачи;
- выбор математической вероятностной модели или её построение;
- работа с математической вероятностной моделью (внутримодельное решение);
- анализ и интерпретация результата.

Результаты теоретического исследования использованы для разработки структурно-функциональной модели обучения решению вероятностных задач методом релевантного выбора математической модели стохастической ситуации. Предлагаемая модель содержит четыре взаимосвязанных блока (целевой, методологический, содержательно-организационный и результативно-оценочный) (рис. 1).

Целевой блок сформирован на основе требований социального заказа:

- требования современного общества к подготовке учащихся, обусловленные потребностью в гражданах, владеющих основами теории вероятности и статистики и способных применять эти знания в повседневной и профессиональной деятельности;
- требования нормативных документов, указывающие на необходимость формирования умения решать вероятностные задачи.

Целью обучения является формирование умения решать вероятностные задачи методом релевантного выбора вероятностной модели стохастической ситуации.

Методологический блок представлен:

- системно-деятельностным подходом, выбор которого в качестве методологической основы продиктован необходимостью достижения приоритетных целей изучения учебного курса «Вероятность и статистика», формированием УУД;
- системой педагогических принципов, которые раскрываются с учётом специфики предметного содержания и учебной деятельности по решению вероятностных задач.

Сформированность умения решать вероятностные задачи методом релевантного выбора математической модели стохастической ситуации соотносится с предметным результатом «находить вероятности случайных событий в изученных опытах» (ФРП ООО, базовый уровень).

Формирование познавательных УУД обеспечивается выполнением учащимися действий предметного характера, которые являются конкретизацией определённых познавательных УУД: выявляют в ходе анализа описанной в задаче стохастической ситуации существенные признаки математических моделей; выполняют преобразование текста задачи; определяют, о каких вероятностных закономерностях в задаче идёт речь; осуществляют варьирование, в частности, исследуют, как изменение условий опыта может повлиять на решение задачи; моделируют стохастические ситуации графически и т.д.

Следование установленному плану при работе с каждой вероятностной задачей способствует развитию следующих регулятивных УУД: составлять план решения задачи и выбрать способ решения с учётом собственных возможностей, аргументировать и корректировать варианты решений с учетом новой информации, предвидеть трудности, которые могут возникнуть при решении задачи.

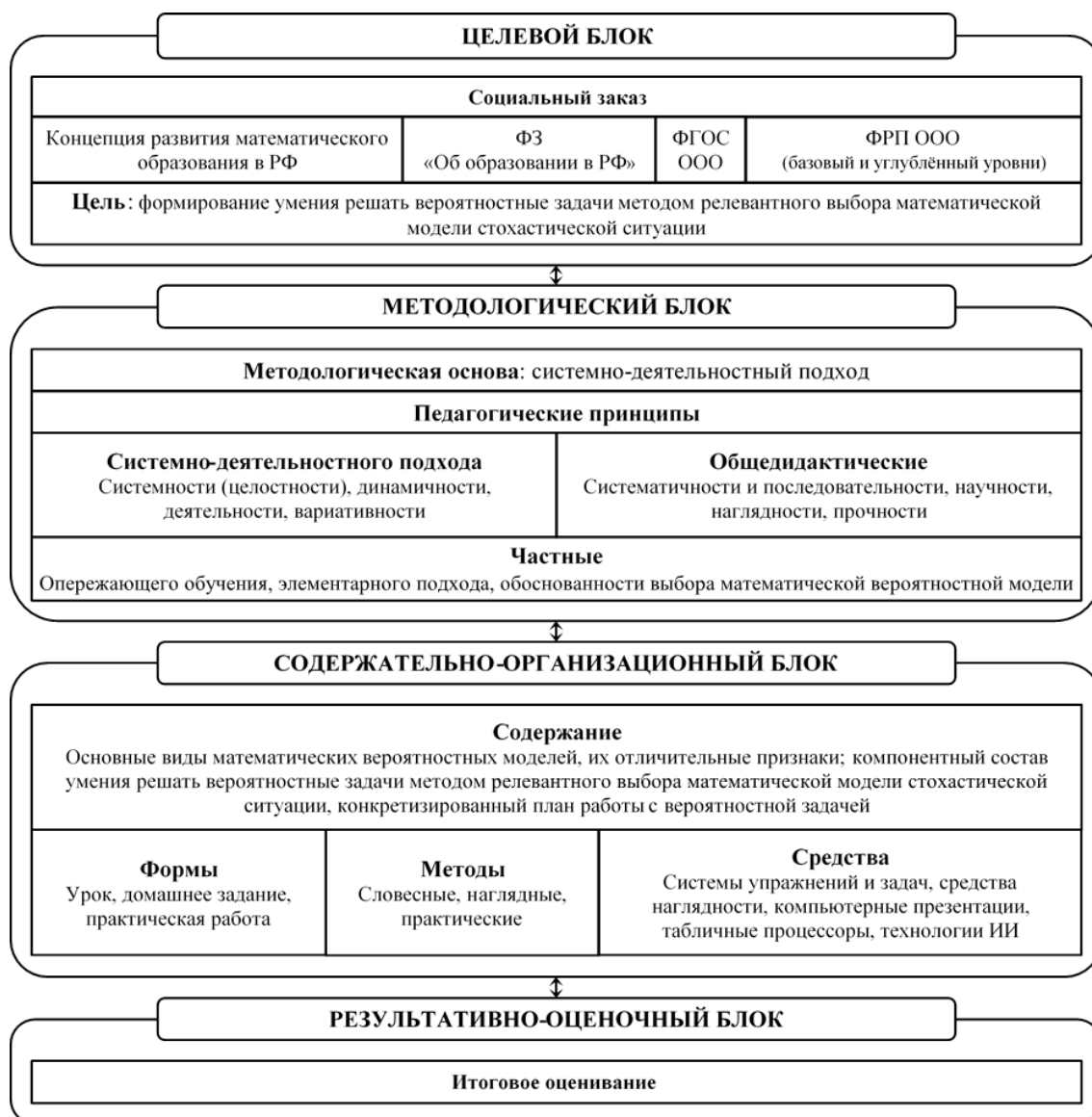


Рис. 1. Модель обучения решению вероятностных задач методом релевантного выбора математической модели стохастической ситуации в 7–9 классах

Систему принципов обучения, которые включены в модель, дополним частными принципами обучения решению вероятностных задач в 7–9 классах, сформулированными при её разработке:

- принцип опережающего обучения: для решения многих вероятностных задач могут быть выбраны разные математические модели из предложенного систематизированного перечня или предложены разные решения внутри одной модели, поэтому такие задачи можно использовать в процессе обучения многократно при изучении соответствующих моделей;
- принцип элементарного подхода: решения вероятностных задач подбираются доступные, часто упрощённые, математические модели, которые в ходе обучения постепенно усложняются;
- принцип обоснованности математической вероятностной модели: от учащихся требуется полное решение вероятностной задачи, которое содержит все необходимые пояснения, в частности, модельные допущения (равновозможность, независимость, несовместность).

Содержательно-организационный блок включает основные виды математических вероятностных моделей, их отличительные признаки, компонентный состав умения решать вероятностные задачи методом релевантного выбора математической модели стохастической ситуации, а также конкретизированный план работы с вероятностной задачей (рис. 2).



Рис. 2. Конкретизированный план работы с вероятностной задачей

В данный блок модели также включены приёмы обучения вероятностных задач методом релевантного выбора математической модели стохастической ситуации, обусловленные спецификой вероятностных задач (прикладной характер, неформализованность, чувствительность к деталям):

- визуализация (статическая и динамическая): создание визуальных (наглядных) моделей, на основе которых осуществляется формализация задачи (таблица, рисунок, диаграмма Эйлера, стохастическое дерево, единичный квадрат, симуляция (имитационная модель) и пр.);
- варьирование трёх видов: 1) изменение словесной формулировки задачи при сохранении её фабулы (сюжета) и математической структуры (переформулирование); 2) изменение отдельных элементов условия задачи, которое может как сохранять, так и изменять её математическую структуру (содержательное варьирование); 3) изменение фабулы (сюжета) задачи при сохранении её математической структуры (сюжетное варьирование).

Приведём пример применения приёма варьирования.

Исходная задача. В мешочке лежат 3 белых, 5 зелёных и 7 синих шаров. Наудачу вынимают один шар. Найти вероятность того, что это будет синий шар.

1. *Переформулирование.* В мешочке лежат шары трёх цветов: белые, зелёные и синие. Белых шаров – 3, зелёных – 5, синих – 7. Наудачу достают один шар. Найдите вероятность того, что достанут синий шар.

2. *Содержательное варьирование.* В мешочке лежат 3 белых, 5 зелёных и 7 синих шаров. Из мешочка один за другим достают два шара, не возвращая их обратно. Найдите вероятность того, что оба шара окажутся синими.

3. *Сюжетное варьирование.* В коробке лежат ёлочные шары: 3 с домиком, 5 с оленем и 7 со снежинкой. Маша наугад достает один шар. Найти вероятность того, что это будет шар со снежинкой.

Организационные формы обучения: урок, домашняя работа, практическая работа.

При реализации модели используются основные средства обучения:

- систематизированные наборы упражнений, разработанные в соответствии с компонентами формируемого умения, и наборы задач;
- средства наглядности: реальные предметы (кубики, монеты и пр.), слайды презентаций, содержащие визуальные модели к задачам и изучаемым математическим вероятностным моделям (стохастические деревья, диаграммы Эйлера, рисунки, таблицы, изображения, построенные на единичном квадрате), электронные таблицы (используются для вычислений и моделирования экспериментов), готовые модели динамических математических сред (например, 1С: Математический конструктор);
- ИИ и математические решатели (используются преимущественно учителем, например, для разработки заданий по вариантам и упражнений в соответствии с заданным запросом, проверки правильности ответа и правильности рассуждений).

Обучение по предложенной модели осуществляется в три этапа, которые соответствуют этапам формирования умения решать вероятностные задачи методом релевантного выбора математической вероятностной модели.

1. *Первый этап – ознакомительный* (7 класс) – направлен на формирование первичных представлений о стохастических ситуациях, случайных событиях, частоте события и его вероятности. На этом этапе учащиеся используют преимущественно неформальные вероятностные рассуждения, знакомятся с частотами реальных событий, оценивают вероятности событий, основываясь на собственном опыте, предполагают, как изменение условий эксперимента повлияет на частоту события, проводят эксперименты. В результате закладываются содержательная и мотивационная основы для последующего обучения решению вероятностных задач методом релевантного выбора.

2. *Второй этап – основной* (8–9 классы) – ориентирован на формирование системных знаний о математических вероятностных моделях основных видов и умений распознавать их, решать с помощью составления изученных математических моделей вероятностные задачи, осуществлять релевантный выбор математической модели стохастической ситуации. На этом этапе осуществляется переход от интуитивных представлений о случайности к формальным методам количественной оценки вероятностей.

В рамках накопительного этапа выделяются два подэтапа:

- подготовительный подэтап – формирование понятийного аппарата, необходимого для решения вероятностных задач определённого типа, а также освоение соответствующих формул и алгоритмов;
- основной подэтап – организация решения вероятностных задач согласно конкретизированному плану работы с вероятностной задачей.

Упражнения, которые используются на накопительном этапе объединены в четыре группы.

Группа 1. Упражнения на распознавание (идентификацию) вероятностной модели и её обоснованный выбор

Назначение: формирование умения выявлять существенные признаки стохастической ситуации и соотносить их с признаками известных математических вероятностных моделей.

Пример 1 (9 класс). Для каждой задачи укажите, какую математическую вероятностную модель целесообразно использовать для вычисления вероятности. Обоснуйте выбор.

1. В пенале 5 красных и 3 синих карандаша. Наугад вынимают один карандаш. Какова вероятность, что он красный?

2. В пенале 5 красных и 3 синих карандаша. Наугад один за другим вынимают три карандаша. Какова вероятность, что среди трёх вынутых карандашей будет ровно два красных?

3. В пенале 5 красных и 3 синих карандаша. Наугад одновременно вынимают три карандаша. Какова вероятность, что среди трёх вынутых карандашей будет ровно два красных?

4. В пенале 5 красных и 3 синих карандаша. Наугад вынимают один карандаш, записывают его цвет, возвращают обратно в пенал, потом снова вынимают один карандаш, записывают цвет, возвращают, и в третий раз делает то же самое. Какова вероятность, что среди трёх вынутых карандашей будет ровно два красных?

Сравните задачи 2, 3 и 4.

а) Будут ли вероятности события «ровно два красных карандаша» одинаковыми в этих трёх задачах? Ответ обоснуйте.

б) Каким условием различаются задачи 2 и 3? Влияет ли это условие на вероятность события «ровно два красных карандаша»?

в) Какую из этих задач можно решать с помощью формулы Бернулли? Почему?

Группа 2. Упражнения на построение математической вероятностной модели с учётом изменяющихся условий

Назначение: формирование умения строить математическую вероятностную модель, изменять её отдельные элементы, выполнять варьирование.

Пример 2 (8 класс). В вазе лежат персики и апельсины. Из вазы наугад один за другим вынимают два фрукта. Требуется найти вероятность того, что оба вынутых фрукта – персики.

Задание. Рассмотрите следующие случаи и для каждого из них составьте математическую модель (запишите формулу для вычисления вероятности):

а) В вазе два персика и апельсин.

б) В вазе два персика и два апельсина.

в) В вазе два персика и n апельсинов.

г) В вазе m персиков и n апельсинов.

Группа 3. Упражнения на выявление вероятностных закономерностей и установление изоморфизма математических моделей стохастических ситуаций

Назначение: формирование представлений о математическом изоморфизме и универсальности математических вероятностных моделей, умений адаптировать модель к задачам с разными сюжетами, видеть общую математическую структуру в разных по сюжету задачах.

Пример 3. (8 класс) Сравните две задачи. Объясните, почему они имеют одинаковую математическую модель (изоморфны). Какая математическая вероятностная модель используется для решения обеих задач? Составьте математическую модель (запишите формулу для вычисления вероятности).

1. В школьной столовой установлены два кулера с питьевой водой. Вероятность того, что в течение недели вода закончится в первом кулере, равна 0,3. Вероятность того, что вода закончится во втором кулере, равна 0,4. Вероятность того, что вода закончится в обоих кулерах, равна 0,15. Определить, с какой вероятностью к концу недели вода закончится хотя бы в одном кулере.

2. В торгово-развлекательном центре установили два автомата, которые продают кофе в стаканчиках. Установлено, что вероятность того, что к закрытию торгово-развлекательного центра кофе закончится в первом из них равна 0,3, что кофе закончится во втором – 0,4. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,15. Определить, с какой вероятностью к закрытию торгово-развлекательного центра кофе закончится хотя бы в одном автомате.

Группа 4. Упражнения на сопоставление стохастической ситуации и математической вероятностной модели

Назначение: формирование умения выбирать математическую вероятностную модель из основных видов математических вероятностных моделей.

Пример 4 (9 класс). Сопоставьте каждую стохастическую ситуацию (вероятностную задачу) с математической вероятностной моделью, которая её описывает. Одна из моделей лишняя укажите её. Для каждой ситуации составьте математическую модель (запишите формулу для вычисления вероятности).

1. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Считая попадания независимыми событиями, найти вероятность поражения мишени обоими стрелками.

2. В пенале 6 синих и 4 красных фломастера. Наугад вынимают один фломастер. Найти вероятность того, что он синий.

3. Вероятность того, что шариковая ручка пишет хорошо, равна 0,8. Найти вероятность того, что ручка не пишет (или пишет плохо).

4. Кнопку бросают 5 раз. Вероятность того, что при одном броске кнопка упадёт остриём вверх, равна 0,44. Найти вероятность того, что кнопка упадёт остриём вверх ровно 3 раза.

Список математических вероятностных моделей: а) классическая модель; б) вероятность противоположного события; в) схема Бернулли; г) вероятность пересечения независимых события; д) условная вероятность.

Предложенные группы упражнений встраиваются в различные темы курса и используются как для первичного усвоения только что изученной модели перед решением задач, так и при обобщении.

Решение вероятностных задач организуется в соответствии с конкретизированным планом работы с задачами такого типа (рис. 2).

Рассмотрим пример работы с задачей, которая предлагается для решения при изучении модели, основанной на теоремах о вероятностях случайных событий (правило сложения вероятностей, 8 класс).

Задача 1. В торговом центре недалеко друг от друга расположены два автомата, продающие кофе. Вероятность того, что к вечеру в первом автомате закончится кофе, равна 0,3. Такая же вероятность того, что кофе закончится во втором автомате. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность события: а) «кофе закончится хотя бы в одном из автоматов»; б) «кофе закончится только в одном из автоматов» (Высоцкий, 2023).

Работа с задачей

1. Содержательный анализ задачи

На этом этапе работы с вероятностной задачей организуется работа с её текстом: описывается случайный эксперимент и его условия (существенные свойства), приводятся примеры исходов эксперименты, определяется цель решения задачи. По результатам работы с текстом задачи может быть составлена визуальная (наглядная) модель, в которой отражены существенные свойства стохастической ситуации.

Случайный эксперимент. Определение наличия кофе в кофейных автоматах в определённый момент времени (к вечеру).

Условия случайного эксперимента

1. Есть два автомата, продающих кофе.
2. Автоматы расположены недалеко друг от друга.
3. На момент наблюдения в каждом из двух автоматов кофе может закончиться (З) или остаться (О).

4. Фиксируется наличие кофе для двух автоматов.

5. Установлено, что в первом автомате кофе к вечеру может закончиться с вероятностью, равной 0,3 и что с такой же вероятностью кофе к вечеру может закончиться во втором автомате; в двух автоматах (и в первом, и во втором) кофе к вечеру может закончиться с вероятностью, равной 0,12.

Примеры возможных исходов (не обязательно элементарных). «Кофе закончится в первом автомате, но останется во втором», «кофе останется в первом автомате, но

закончится во втором», «кофе закончится в обоих автоматах», «кофе закончится только в одном автомате», «кофе закончится хотя бы в одном автомате», «кофе останется в обоих автоматах» и т. д.

Случайные события, вероятности которых требуется найти: а) «кофе закончится хотя бы в одном из автоматов»; б) «кофе закончится только в одном из автоматов».

Визуальная (наглядная) модель – диаграмма Эйлера (рис. 3). Заметим, что такая модель изначально может не содержать математических обозначений и дополняется в процессе работы с задачей.

2. Выбор математической вероятностной модели или её построение

На этом этапе в совместной деятельности с учителем учащиеся выясняют, что в случайном эксперименте можно выделить четыре элементарных события. Это четыре пары состояний автоматов: ZO, Z3, O3, OO. Тогда событию «кофе закончится хотя бы в одном из автоматов» благоприятствует три элементарных события (ZO, Z3, O3); а событию «кофе закончится только в одном из автоматов» – два элементарных события (ZO, O3). Учащиеся замечают, что элементарные события не являются равновероятными, поэтому формулу $P(A) = \frac{N(A)}{N}$ применять нельзя.

Для вычисления вероятностей интересующих случайных событий можно попробовать найти и сложить вероятности элементарных событий, благоприятствующих каждому из этих событий, а можно выбрать более простую модель, в которой одни случайные события выражаются через другие. Такая модель не требует явного обращения к множеству элементарных событий и вычисления их вероятностей, достаточно только понимать, о каком множестве идёт речь. Таким образом, обоснованно выбирается модель 4 из систематизированного перечня (модель случайного эксперимента, основанная на теоремах о вероятностях случайных событий).

После этого строится выбранная математическая модель.

Пусть $A = \{\text{к вечеру в первом автомате закончится кофе}\}$, $B = \{\text{к вечеру во втором автомате закончится кофе}\}$, тогда $A \cap B = \{\text{к вечеру кофе закончится в двух автоматах}\}$.

а) Событие «кофе закончится хотя бы в одном из автоматов» – объединение двух событий A и B , т. е. событие $A \cup B$ (рис. 3 (а)).

Поскольку события A и B совместны, то вероятность их объединения вычисляется по правилу сложения вероятностей для совместных событий:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Вероятности событий A , B и $A \cap B$ известны: $P(A) = P(B) = 0,3$, $P(A \cap B) = 0,12$.

Таким образом, вероятность события $A \cup B$ равна $P(A \cup B) = 0,3 + 0,3 - 0,12$.

б) Событие «кофе закончится только в одном из автоматов» – объединение двух событий A и B , исключающее событие $A \cap B$ (рис. 3 (б)). Обозначим это событие X .

Вероятность события X равна $P(X) = P(A \cup B) - P(A \cap B)$ (формула составляется с опорой на диаграмму Эйлера).

Вероятность события $A \cap B$ известна: $P(A \cap B) = 0,12$.

Таким образом, вероятность события X равна $P(X) = P(A \cup B) - 0,12$.

Таким образом, математическая модель вероятностной задачи построена.

3. Работа с математической вероятностной моделью

а) $P(A \cup B) = 0,3 + 0,3 - 0,12 = 0,48$.

б) $P(X) = 0,48 - 0,12 = 0,36$.

4. Анализ и интерпретация результата

0,48 – вероятность того, что кофе закончится хотя бы в одном из автоматов.

0,36 – вероятность того, что кофе закончится только в одном из автоматов.

Оба полученных ответа правдоподобны и соответствуют условию задачи.

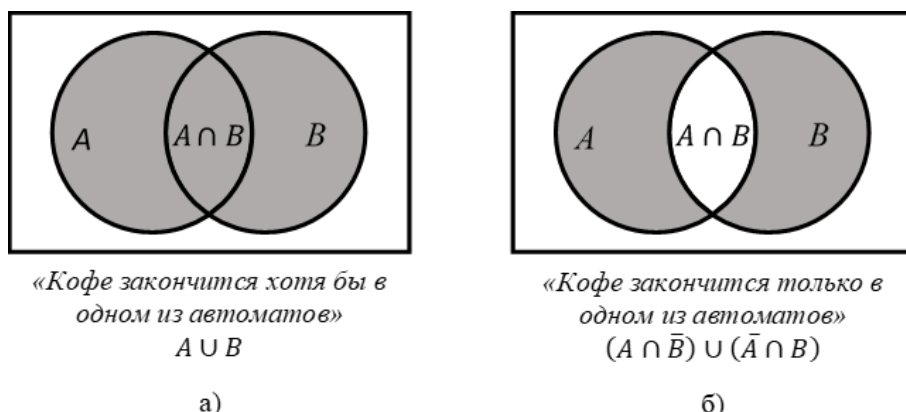


Рис. 3. Иллюстрация к задаче 1

3. Третий этап – реализующий (9 класс) – направлен на обобщение и систематизацию накопленных на втором этапе представлений об основных видах математических вероятностных моделях, их отличительных признаках. После того, как изучены все модели, включая геометрическое определение вероятности, комбинаторные формулы, а также схему Бернулли, учащиеся демонстрируют умение решать вероятностные задачи на основе релевантного выбора математической модели стохастической ситуации

В рамках реализующего этапа (или на ознакомительном этапе в 8 классе на уроке обобщения и повторения) может быть предложена, работа по решению вероятностных задач с использованием разных моделей и сравнению полученных решений. Например, в ходе фронтальной беседы проводится содержательный анализ задачи и предполагается, какие модели могут быть использованы для её решения. Далее класс делится на группы, каждая из которых выбирает для решения одну модель и решает задачу. После этого организуется обсуждение решений. Рассмотрим пример задачи.

Задача 2. В коробке «Ассорти» – 20 неразличимых по виду конфет, из которых 12 с шоколадной начинкой и 8 с фруктовой начинкой. Тане разрешили взять две конфеты (предполагается, что конфеты выбирают либо одновременно или последовательно без возвращения). Какова вероятность того, что обе конфеты окажутся с разными начинками? (Мордкович, 2008).

Задача предлагается для решения в 8 классе. В результате групповой работы учащиеся предлагают пять различных решений.

1. *Строится классическая модель.*

Предполагается, что все 20 конфет различимы и конфеты выбирают последовательно (порядок учитывается) без возвращения. Элементарное событие – упорядоченная пара конфет. Множество элементарных событий – всевозможные упорядоченные пары конфет.

Число элементарных событий конечно, элементарные события равновозможны.

Пусть $A = \{\text{обе конфеты с разными начинками}\}$.

Вероятность события A вычисляется по формуле $P(A) = \frac{N(A)}{N}$.

$$P(A) = \frac{12 \cdot 8 + 8 \cdot 12}{20 \cdot 19} \approx 0,505.$$

2. *Строится классическая модель*

Предполагается, что все 20 конфет различимы и конфеты выбирают одновременно (порядок не учитывается). Элементарное событие – неупорядоченная пара конфет. Множество элементарных событий – всевозможные неупорядоченные пары конфет.

Число элементарных событий конечно, элементарные события равновозможны.

Пусть $A = \{\text{обе конфеты с разными начинками}\}$.

Вероятность события A вычисляется по формуле $P(A) = \frac{N(A)}{N}$.

$$P(A) = \frac{12 \cdot 8 \cdot 2}{20 \cdot 19} \approx 0,505.$$

3. Строится модель, основанная на теоремах о вероятностях случайных событий.

Пусть $A = \{\text{Первая конфета с шоколадной начинкой, вторая – с фруктовой}\}$,
 $B = \{\text{Первая конфета с фруктовой начинкой, вторая – с шоколадной}\}$.

$A \cup B = \{\text{Обе конфеты с разными начинками}\}$.

Вероятность события $A \cup B$ вычисляется по правилу сложения вероятностей для несовместных событий: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Для вычисления вероятностей $P(A)$ и $P(B)$ строится классическая модель.

Предполагается, что все 20 конфет различимы и конфеты выбирают последовательно (порядок учитывается) без возвращения. Элементарное событие – упорядоченная пара конфет. Множество элементарных событий – всевозможные упорядоченные пары конфет.

Вероятность события A вычисляется по формуле $P(A) = \frac{N(A)}{N}$.

Вероятность события B вычисляется по формуле $P(B) = \frac{N(B)}{N}$.

Вероятность события $A \cup B$ вычисляется по формуле $P(A \cup B) = \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N}$.

$$P(A \cup B) = \frac{12 \cdot 8}{20 \cdot 19} + \frac{8 \cdot 12}{20 \cdot 19} \approx 0,505.$$

5. Строится модель, основанная на теоремах о вероятностях случайных событий.

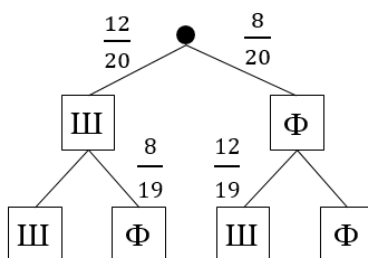


Рис. 4. Иллюстрация к задаче 2

Пусть $A = \{\text{Первая конфета с шоколадной начинкой}\}$, $B = \{\text{Вторая конфета с шоколадной начинкой}\}$.

Тогда $\bar{A} = \{\text{Первая конфета с фруктовой начинкой}\}$, $\bar{B} = \{\text{Вторая конфета с фруктовой начинкой}\}$.

$X = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B) = \{\text{Обе конфеты с разными начинками}\}$.

Решение осуществляется с опорой на наглядную модель (рис. 4).

Вероятность события X вычисляется по правилу сложения вероятностей для несовместных событий: $P(X) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$.

Вероятности событий $A \cap \bar{B}$ и $\bar{A} \cap B$ вычисляются по правилу умножения для зависимых событий: $P(A \cap \bar{B}) = P(A)P(\bar{B}|A)$, $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A})P(B|\bar{A})$.

Для вычисления вероятностей $P(A)$ и $P(\bar{A})$ строится классическая модель.

Предполагается, что все 20 конфет различимы и конфеты выбирают последовательно (порядок учитывается) без возвращения. Элементарное событие – упорядоченная пара конфет. Множество элементарных событий – всевозможные упорядоченные пары конфет.

Вероятность события A вычисляется по формуле $P(A) = \frac{N(A)}{N}$. $P(A) = \frac{12}{20}$.

Вероятность события $\bar{A}$ вычисляется по формуле $P(\bar{A}) = \frac{N(\bar{A})}{N}$. $P(\bar{A}) = \frac{8}{20}$.

После того как вынули одну шоколадную конфету (событие A), в коробке остаётся 19 конфет, из которых 8 фруктовых. Поэтому $P(\bar{B}|A) = \frac{8}{19}$.

После того как вынули одну фруктовую конфету (событие $\bar{A}$), в коробке остаётся 19 конфет, из которых 12 шоколадных. Поэтому $P(B|\bar{A}) = \frac{12}{19}$.

$$P(A \cap \bar{B}) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19}.$$

$$P(\bar{A} \cap B) = \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19}.$$

$$P(X) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19} + \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19} \approx 0,505.$$

5. Задача решается с помощью дерева случайного эксперимента (рис. 4).

Предполагается, что конфеты различаются только по начинке и конфеты выбирают последовательно (порядок учитывается) без возвращения. Элементарное событие – упорядоченная пара конфет. Множество элементарных событий – ШШ, ШФ, ФШ, ФФ.

Число элементарных событий конечно, элементарные события неравновозможны.

Пусть $A = \{\text{обе конфеты с разными начинками}\}$.

Вероятность события A вычисляется по формуле $P(A) = P(\text{ШФ}) + P(\text{ФШ})$.

Вероятности элементарных событий ШФ и ФШ вычисляются перемножением условных вероятностей вдоль соответствующей цепочки.

$$P(A) = \frac{12}{20} \cdot \frac{8}{19} + \frac{8}{20} \cdot \frac{12}{19} = \frac{96}{380} + \frac{96}{380} = \frac{96}{190} \approx 0,505.$$

Сравнивая предложенные решения, учащиеся приходят к выводу, что все они приводят к одному и тому же ответу (0,505) и являются верными, т. е. все выбранные модели адекватны стохастической ситуации.

Результаты

Разработанная методика апробирована на базе МБОУ СОШ №60 г. Брянска при изучении раздела «Вероятность» в 7 и 8 классах. Для проверки результативности методики были сформированы две группы учащихся 8-х классов. Контрольную группу составили 55 школьников (8 «А» и 8 «Б»), экспериментальную – 58 школьников (8 «В» и 8 «Г»). Решение каждой вероятностной задачи в экспериментальной группе проводилось в соответствии с описанными этапами, в процессе обучения использовались предложенные группы упражнений. Применялись приёмы визуализации и варьирования. В контрольной группе обучение велось традиционно – после изучения теоретического материала задачи решались по образцу из учебника.

По результатам экспериментального обучения в конце учебного года учащиеся выполнили проверочную работу. Отметки распределились так, как показано на рис. 5.

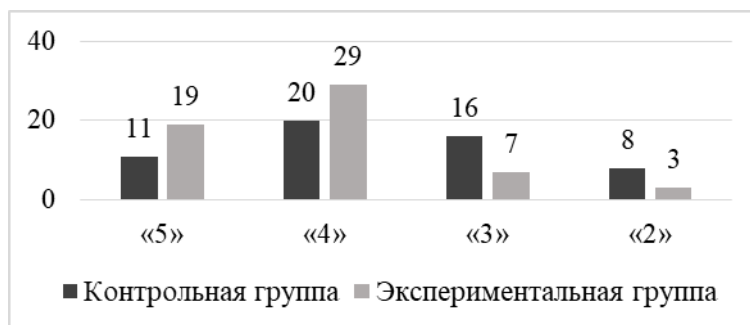


Рис. 5. Отметки за проверочную работу

При выставлении отметок учитывалась правильность ответа, наличие краткой или схематической записи и обоснованность решения.

Статистическая обработка результатов проведена по методике «Определение достоверности различий по критерию χ^2 ». Наблюдаемое значение оказалось равным 9,7 и превысило критическое значение, равное 7,8, при уровне значимости 0,05.

Обучение было продолжено в 9 классе, и исходя из анализа рассуждений учащихся при изучении геометрической вероятности и схемы Бернулли получен вывод, что школьники стали значительно лучше ориентироваться в решении вероятностных задач, проводить обоснованное решение. Это позволило сделать вывод, что предложенная методика решению вероятностных задач методом релевантного выбора математической модели стохастической ситуации в 7–9 классах результативна и повышает качество предметных результатов обучения.

Заключение

Научная новизна выполненного исследования состоит в систематизации основных видов математических вероятностных моделей, изучаемых в рамках курса «Вероятность и статистика» в 7–9 и 10 классах, разработке метода решения вероятностных задач релевантным выбором математической модели стохастической ситуации, определении соответствующих этому приёму умений и приёмов, конкретизации плана работы с вероятностной задачей и разработке соответствующей структурно-функциональной модели.

Предложенная методика обучения решению вероятностных задач способствует формированию у учащихся осознанного подхода к выбору способа решения такого типа задач, что позволяет повысить уровень их предметных знаний. Кроме того, внедрение разработанной модели оказывает положительное влияние на мотивацию учащихся за счёт создания условий для самостоятельного выбора рационального способа решения вероятностной задачи, соответствующего уровню владения предметным материалом. Следование конкретизированному плану работы с вероятностной задачей и выполнение упражнений предложенных видов способствует развитию регулятивных универсальных учебных действий, что проявляется в умении учащихся самостоятельно разрабатывать план и обосновывать решение, определять влияние изменения условий на математическую модель, видеть альтернативные способы решения.

Апробация разработанной методики проводилась на базе МБОУ СОШ №60» г. Брянска–при изучении математических тем, относящихся к содержательно-методической линии «Вероятность» в 7–9 классах. Полученные результаты свидетельствуют об эффективности методики в рамках указанного содержания, однако требуют дальнейшей проверки на выборке большего объёма.

Перспективы исследования связаны с адаптацией разработанной методики для 10–11 классов на соответствующем содержании вероятностно-статистической линии, разработкой цифровых инструментов, в частности динамических моделей для использования на уроках при решении вероятностных задач, а также созданием методических рекомендаций по применению технологий искусственного интеллекта в обучении теории вероятностей.

Список литературы

- Бунимович Е.А. Методическая система изучения вероятностно-статистического материала в основной школе: автореф. дис... канд. пед. наук. М., 2004.
- Бунимович Е.А., Булычев В.А. Основы статистики и вероятность: 5–11 классы: учебное пособие. Москва: Дрофа, 2008.
- Ветохин А.Н., Деза Е.И. О месте теоретико-вероятностных задач в математической подготовке школьников // Наука и школа. 2023. № 2. С. 214–226. DOI: 10.31862/1819-463X-2023-2-214-226.

- Высоцкий И.Р., Яценко И.В. Математика. Вероятность и статистика: 7–9-е классы: углублённый уровень: учебное пособие: в 2 частях. Под ред. И.В. Яценко. М.: Просвещение, 2024. Ч. 2.
- Высоцкий И.Р., Яценко И.В. Математика. Вероятность и статистика: 7–9-е классы: углублённый уровень: учебное пособие: в 2 частях. Под ред. И.В. Яценко. М.: Просвещение, 2024. Ч. 1.
- Гнеденко Б.В. Курс теории вероятности. М.: Наука, 1988.
- Дворяткина С.Н. Развитие вероятностного стиля мышления студентов в обучении математике на основе диалога культур: автореф. дис. ... докт. пед. наук. Елец, 2012.
- Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.
- Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике. Ч.2. Обучение математике через задачи и обучение решению задач. М.: Просвещение, 1977.
- Леонтьев А.Н. Деятельность, сознание, личность. М.: Политиздат, 1975.
- Леонтьева Н.В., Вологжанина Н.Ю. Элементы теории вероятностей в курсе средней школы в рамках подготовки к ОГЭ // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2016. Т. 9.
- Лыкова К.Г. Формирование стохастического мировоззрения старшеклассников в условиях цифровизации математического образования: дис. ... канд. пед. наук. Елец, 2022.
- Максимова О.В. О математических моделях на примере решения некоторых школьных вероятностных задач // Математика в школе. 2024. №1. С. 24–32. DOI: 10.47639/0130-9358_2024_1_24.
- Мордкович А.Г., Семенов П.В. События. Вероятности. Статистическая обработка данных: дополнительные параграфы к курсу алгебры 7–9 классов общеобразовательных учреждений. М.: Мнемозина, 2008.
- Плоцки А. Стохастика в школе как математика в стадии созидания и как новый элемент математического и общего образования: автореф. дисс. ... д-ра пед. наук. Санкт-Петербург, 1992.
- Полякова Т.А. Прикладная направленность обучения стохастике как средство развития вероятностного мышления учащихся на старшей ступени школы в условиях профильной дифференциации: автореф. дис. ... канд. пед. наук. Омск, 2009.
- Полякова А.Ю. Методика формирования стохастической культуры обучающихся в условиях цифровой трансформации общего математического образования: автореф. дис. ... канд. пед. наук. Елец, 2024.
- Рязановский А.Р. ЕГЭ. Тематический тренажёр. Математика. Профильный уровень. Теория вероятностей и элементы статистики / А.Р. Рязановский [и др.]. М.: Экзамен, 2019.
- Селютин В.Д. Методика формирования первоначальных статистических представлений учащихся при обучении математике: автореф. дис. ... канд. пед. наук. Москва, 1985.
- Фирсов В.В. Некоторые проблемы обучения теории вероятностей как прикладной дисциплине: дис. ... канд. пед. наук. Москва, 1974.
- Щербатых С.В. Прикладная направленность обучения стохастике в старших классах средней школы: автореф. дис. ... канд. пед. наук. Елец, 2006.
- Щербатых С.В., Покорная И.Ю., Шаталова А.А. Методика проведения и модели школьного эксперимента по теме «Вероятность» // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 1 (41). С. 36–45. DOI: 10.24888/2500-1957-2026-1-36-45.
- Яремко Н.Н., Селютин В.Д. Методические приемы обучения школьников решению вероятностных задач // Наука и школа. 2025. № 6. С. 234–244. DOI: 10.31862/1819-463X-2025-6-234-244.
- Яремко Н.Н., Яковлева Ю.А. Базовые математические модели школьного курса теории вероятностей // Творчество студентов и школьников в области математики и информатики и методы его развития: материалы 44-го Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Минск, 25–27 сентября 2025 г. Минск: Издательство

Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка, 2025. С. 182–185.

Информация об авторе

Яковлева Юлия Андреевна; аспирант кафедры теории и методики обучения математике и информатике; ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет» (Российская Федерация, 119435, г. Москва, ул. Малая Пироговская, д. 1, строение 1); E-mail: mayflower2299@gmail.com; ORCID: 0009-0008-1020-3449.

TEACHING PROBABILITY PROBLEM SOLVING IN GRADES 7–9 USING THE METHOD OF RELEVANT CHOICE OF A MATHEMATICAL MODEL FOR A STOCHASTIC SITUATION

Yakovleva Yu. A. | Moscow Pedagogical State University
graduate student

Abstract. The article deals with the problem of teaching probability problem solving to students in grades 7–9 within the educational course "Probability and Statistics." Based on an analysis of contemporary research, it is concluded that schoolchildren often demonstrate a superficial understanding of probabilistic concepts and experience difficulties when independently choosing a mathematical model for solving problems. In educational literature, the term "probabilistic model" is practically unused, and the issues of teaching to choose a mathematical model under updated educational standards remain unexplored. Based on an analysis of scientific literature and regulatory documents, the article identifies and systematizes seven basic mathematical models of the school course of probability theory. The concept of "the method of solving probability problems in grades 7–9 using the relevant choice of a mathematical model" is introduced. A structural-functional teaching model is proposed, comprising target, methodological, content-organizational, and effective blocks. The goal of teaching is to develop the ability to solve probability problems using the method of relevant choice of a mathematical model for a stochastic situation. Within the framework of the model, a detailed plan for working with a probability problem is specified (content analysis of the problem, selection or construction of a mathematical probabilistic model, work with the mathematical probabilistic model, analysis and interpretation of the result), as well as visualization techniques (static and dynamic) and variation techniques (reformulation, content variation, and plot variation). Examples of four groups of exercises are provided: (1) recognition (identification) of a probabilistic model and its justified selection; (2) construction of a mathematical probabilistic model under changing conditions; (3) identification of probabilistic regularities and establishing isomorphism of mathematical models of stochastic situations; (4) matching a stochastic situation with a mathematical probabilistic model. Experimental teaching showed that the proposed methodology improves the quality of subject-specific learning outcomes.

Keywords: probability theory, probability problems, mathematical model, relevant choice, method of mathematical modeling, methods of teaching problem solving

For citation: Yakovleva Yu. A. (2026). Teaching probability problem solving in grades 7–9 using the method of relevant choice of a mathematical model for a stochastic

situation. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 3 (43), 53–71.
doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-53-71

Copyright: © Yu. A. Yakovleva (2026). Published by Bunin Yelets State University.
Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

References

- Bunimovich, E. A. (2004). *Metodicheskaya sistema izucheniya veroyatnostno-statisticheskogo materiala v osnovnoj shkole* [Candidate Thesis]. Moscow. (In Russ.).
- Bunimovich, E. A., Bulychev V. A. (2008). *Osnovy statistiki i veroyatnost': 5-11 klassy: uchebnoe posobie*. Moscow: Drofa. (In Russ.).
- Dvoryatkina, S. N. (2012). *Razvitie veroyatnostnogo stilya myshleniya studentov v obuchenii matematike na osnove dialoga kul'tur* [Doctor Thesis]. Yelets. (In Russ.).
- Firsov, V. V. (1974). *Nekotorye problemy obucheniya teorii veroyatnostej kak prikladnoj distsipline* [Candidate Dissertation]. Moscow. (In Russ.).
- Gnedenko, B. V. (1988). *Kurs teorii veroyatnosti*. Moscow: Nauka. (In Russ.).
- Kolmogorov A. N. (1974). *Osnovnye ponyatiya teorii veroyatnostej*. Moscow: Nauka. (In Russ.).
- Kolyagin, Yu. M. (1977). *Zadachi v obuchenii matematike. Ch. 2. Obuchenie matematike cherez zadachi i obuchenie resheniyu zadach*. Moscow: Prosveshchenie. (In Russ.).
- Leont'ev, A. N. (1975). *Deyatel'nost', soznanie, lichnost'*. Moscow: Politizdat. (In Russ.).
- Leont'eva, N. V., Vologzhanina N. Yu. (2016). Elementy teorii veroyatnostej v kurse srednej shkoly v ramkakh podgotovki k OGE. *Nauchno-metodicheskij elektronnyj zhurnal "Kontsept"*, (9).
- Lykova, K. G. (2022). *Formirovanie stokhasticheskogo mirovozzreniya starsheklassnikov v usloviyakh tsifrovizatsii matematicheskogo obrazovaniya* [Candidate Dissertation]. Yelets. (In Russ.).
- Maksimova, O. V. (2024). On mathematical models on the example of solving some school problems of probability theory. *Mathematics at School*, (1), 24-32. DOI: 10.47639/0130-9358_2024_1_24. (In Russ., abstract in Eng.).
- Mordkovich, A. G., Semenov P. V. (2008). *Sobytiya. Veroyatnosti. Statisticheskaya obrabotka dannykh: dopolnitel'nye paragrafy k kursu algebry 7-9 klassov obshcheobrazovatel'nykh uchrezhdenij*. Moscow: Mnemozina. (In Russ.).
- Plotski, A. (1992) *Stokhastika v shkole kak matematika v stadii sozidaniya i kak novyy element matematicheskogo i obshchego obrazovaniya* [Doctor Thesis]. Saint Petersburg. (In Russ.).
- Polyakova, A. Yu. (2024). Metodika formirovaniya stokhasticheskoy kul'tury obuchayushchikhsya v usloviyakh tsifrovoj transformatsii obshchego matematicheskogo obrazovaniya [Candidate Thesis]. Yelets. (In Russ.).
- Polyakova, T. A. (2009). *Prikladnaya napravlennost' obucheniya stokhastike kak sredstvo razvitiya veroyatnostnogo myshleniya uchashchikhsya na starshej stupeni shkoly v usloviyakh profil'noj differentsiatsii* [Candidate Thesis]. Omsk. (In Russ.).
- Ryazanovskiy, A. R. (2019). *EGE. Tematicheskij trenazhyor. Matematika. Profil'nyy uroven'. Teoriya veroyatnostey i elementy statistiki*. Moscow: Ekzamen. (In Russ.).
- Selyutin, V. D. (1985). *Metodika formirovaniya pervonachal'nykh statisticheskikh predstavlenij uchashchikhsya pri obuchenii matematike* [Candidate Thesis]. Moscow. (In Russ.).
- Shcherbatykh, S. V. (2006). *Prikladnaya napravlennost' obucheniya stokhastike v starshikh klassakh srednej shkoly* [Candidate Thesis]. Yelets. (In Russ.).
- Shcherbatykh, S. V., Pokornaya, I. Yu., Shatalova, A. A. (2026). Methodology of Conducting School Experiments on the Topic of "Probability". *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 1 (41), 36-45. DOI: 10.24888/2500-1957-2026-1-36-45. (In Russ., abstract in Eng.).

- Vetokhin, A. N., Deza, E. I. (2023). On the place of probabilistic problems in the mathematical training of schoolchildren. *Nauka i shkola*, (2), 214-226. DOI: 10.31862/1819-463X-2023-2-214-226. (In Russ., abstract in Eng.).
- Vysockij, I. R., Jashhenko, I. V. (2024). *Matematika. Veroyatnost' i statistika: 7-9-e klassy: uglubljonnyj uroven': uchebnoe posobie: v 2 chastjah*. Moscow: Prosveshhenie, Ch.1. (In Russ.).
- Vysockij, I. R., Jashhenko, I. V. (2024). *Matematika. Veroyatnost' i statistika: 7-9-e klassy: uglubljonnyj uroven': uchebnoe posobie: v 2 chastjah*. Moscow: Prosveshhenie, Ch.2. (In Russ.).
- Yaremko, N. N., Selutin, V. D. (2025). Methodological Techniques of Teaching Schoolchildren to Solve Probability Problems. *Nauka i shkola*, (6), 234-244. DOI: 10.31862/1819-463X-2025-6-234-244. (In Russ., abstract in Eng.).
- Yaremko, N. N., Yakovleva, Yu. A. (2025). Bazovye matematicheskie modeli shkol'nogo kursa teorii veroyatnostej [Basic mathematical models of the school course of probability theory]. *Tvorchestvo studentov i shkol'nikov v oblasti matematiki i informatiki i metody ego razvitiya: materialy 44-go Mezhdunarodnogo nauchnogo seminara prepodavatelej matematiki i informatiki universitetov i pedagogicheskikh vuzov* (pp. 182-185). Minsk: Izdatel'stvo Belorusskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta imeni Maksima Tanka. (In Russ.).

Information about the author

Yulia A. Yakovleva; graduate student of the Department of Theory and Methods of Teaching Mathematics and Computer Science; Moscow Pedagogical State University (Malaya Pirogovskaya Street, 1 (1), Moscow, 119435, Russian Federation); E-mail: mayflower2299@gmail.com; ORCID: 0009-0008-1020-3449

Статья поступила в редакцию	09.06.2026
Принята к публикации	21.07.2026
Статья опубликована	18.09.2026

ТЕОРИИ, МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-3-72-95

УДК
378.147:004

**ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДВУМЕРНЫХ
ДАННЫХ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫХ
КОМПЕТЕНЦИЙ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ НА ОСНОВЕ
ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕДАКТОРА ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ
MICROSOFT EXCEL**

Богун Виталий Викторович
к.п.н., доцент

Ярославский государственный педагогический университет им. К. Д. Ушинского;
Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Ярославский филиал;
Международный университет бизнеса и новых технологий (МУБиНТ), г. Ярославль

Аннотация. В рамках реализации образовательного процесса в вузе одной из основных составляющих является выполнение обучаемыми расчетных проектов по учебным дисциплинам с точки зрения актуализации вопросов проведения статистического анализа получаемых многомерных массивов числовых данных в целом и двумерных массивов числовых данных в частности с целью выяснения наличия возможной взаимосвязи между соответствующими одномерными массивами данных. С математической точки зрения для выполнения необходимых расчетов наблюдается интеграция работы с математическими объектами, рассматриваемыми при изучении вузовской математики. В статье наглядно представлены соответствующие аспекты математического и информационного моделирования при проведении исследования совокупности из значений двух признаков или атрибутов конечного множества объектов в виде формируемых одномерных массивов данных с отражением последовательных переходов от исходных данных к результатам расчетов. В ракурсе использования информационно-коммуникационных технологий для автоматизации выполнения необходимых статистических расчётов, реализуемых над формируемыми двумерными массивами данных с точки зрения совокупностей двух одномерных массивов данных, продемонстрированы различные аспекты применения редактора электронных таблиц Microsoft Excel с целью наглядного отображения значений параметров исходных данных, промежуточных и итоговых результатов расчётов. Показаны основные составляющие комплексного матричного представления соответствующих итоговых расчетных компонентов через призму выявления необходимых аспектов возможной взаимосвязи между одномерными массивами данных в процессе проведения корреляционного анализа с определением характера и силы связи между двумя исследуемыми признаками или атрибутами рассматриваемого конечного множества объектами. Применение данного

цифрового инструмента позволяет сформировать у студентов вузов совокупную интеграционную теоретическую и практическую базу математических и информационных компетенций через призму реализации обучаемыми детального корреляционного анализа совокупности из двух исследуемых одномерных массивов данных.

Ключевые слова: проектная деятельность студентов вузов, многомерный анализ данных, методы математической статистики, информационно-коммуникационные технологии, редактор электронных таблиц Microsoft Excel

Для цитирования: Богун В.В. Применение статистического анализа двумерных данных для формирования профессиональных компетенций студентов вузов на основе использования редактора электронных таблиц Microsoft Excel // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 3 (43). С. 72–95. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-72-95

Права: © В.В. Богун (2026). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И. А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

Введение

По состоянию на настоящее время с точки зрения наметившихся тенденций в рамках высшего образования особую значимость приобретают методики, обеспечивающие не просто передачу теоретических знаний и практических умений, но и формирование у студентов устойчивых навыков работы с цифровыми инструментами в профессиональной деятельности. ФГОС 3++ акцентирует внимание на формировании общепрофессиональных и профессиональных компетенций, среди которых важное место занимает способность обрабатывать и интерпретировать массивы данных с использованием современных информационных технологий. Однако, как показывает практика, студенты часто испытывают затруднения при переходе от математической формулы к её реализации в цифровой среде, что порождает формальное знание без понимания сути алгоритмов.

При выполнении научно-исследовательской деятельности студентами вузов часто встает вопрос об определении взаимосвязей между параметрами, что выводит на задачи регрессионного и кластерного анализа (Ломовский, 2023; Богун, 2026). Ключевая задача корреляционного анализа – понимание логики алгоритмов для выстраивания цепочки от исходных данных к результатам расчетов и их интерпретации. Предлагаемый подход позволяет студентам не просто получить значение показателя, а вникнуть в суть его природы через пошаговое выполнение необходимых вычислительных алгоритмов, базирующихся в своей атомарной структуре на интеграции реализуемых в различных вариациях линейных, разветвляющихся и циклических алгоритмов (Богун, 2026; Мхитарян, 2025).

Цель настоящей статьи заключается разработке методических аспектов формирования у студентов вузов необходимых профессиональных компетенций в ракурсе реализации анализа двумерных данных на основе применения редактора электронных таблиц Microsoft Excel. Данная методика базируется на интеграции аналитического (непосредственный вывод формул для отдельно взятых расчетных параметров), числового итеративного (поэтапные вычисления значения расчетных параметров в редакторе Microsoft Excel без использования встроенных функций) и агрегированном (автоматизированное получение результатов в виде значений расчетных параметров с применением встроенных функций) подходов к анализу совокупности из одномерных массивов данных в ракурсе рассмотрения ее как формируемого двумерного массива данных. Реализация подхода формирует вычислительное мышление и доверие к инструменту (Богун, 2026; Дворяткина, 2023; Щукина, 2023; Быкова, 2024). В статье на примере корреляционного анализа двух одномерных выборок данных при

исследовании конечного множества объектов показана практическая реализация предложенной методики с применением редактора Microsoft Excel (Богун, 2026; Христидис, 2023).

Основная часть

Проектирование методики обучения статистическому анализу данных в условиях цифровизации образования требует учёта двух взаимосвязанных аспектов. К ним следует отнести содержательный (математическая сущность методов) и процессуальный (способы деятельности с цифровыми инструментами). Как показывает педагогическая практика, традиционное обучение часто ограничивается либо абстрактной теорией, либо поверхностным освоением программных средств, что ведёт к формированию разрозненных, неинтегрированных знаний. Студент может знать формулу коэффициента корреляции, но не понимать, как она реализована в электронной таблице, или, напротив, уметь получить результат в Excel, но не осознавать, какой именно статистический параметр был вычислен и как его интерпретировать. Преодоление этого разрыва составляет ключевую методическую проблему, решению которой посвящена данная статья.

Предлагаемый подход базируется на идее поэтапного формирования умственных действий (П. Я. Гальперин) и принципах компетентностно-ориентированного обучения. В соответствии с этим, овладение корреляционным анализом рассматривается как процесс последовательного прохождения студентом трёх уровней – от теоретического осмысления через практическое алгоритмическое действие к рефлексивной проверке и интерпретации. Реализация этого процесса в редакторе электронных таблиц Microsoft Excel позволяет использовать цифровой инструмент не как «чёрный ящик», производящий расчёты «сам в себе» согласно реализации принципа инкапсуляции, являющегося одной из основных парадигм объектно-ориентированного подхода, а как средство визуализации и осмысления вычислительной логики, что соответствует современным требованиям к формированию функциональной грамотности и цифровых компетенций будущих специалистов.

При исследовании определённых процессов часто возникает необходимость сравнительного анализа двух выборок данных для выявления взаимосвязей между параметрами. Такой анализ проводится на основе выборочного коэффициента корреляции Пирсона. Для этого требуется найти и интерпретировать числовые значения коэффициентов, сопоставляя параметры объектов с учётом их привязки к конкретным объектам.

Пусть для конечного множества объектов с точки зрения исследуемых двух количественных параметров (атрибутов, признаков, характеристик) X_1 и X_2 , взятых из генеральной совокупности данных, получены две одномерные выборки данных соответствующих объектам вариантов значений $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n}$ и вариантов значений $x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n}$ одинакового определённого объёма ($n = n_1 = n_2 = 23$), что отражено в таблице 1.

Таблица 1.

Представление значений двух параметров конечного множества объектов

Порядковый номер	Обозначение параметра 1	Значение параметра 1	Обозначение параметра 2	Значение параметра 2
1	x_{11}	51	x_{21}	35
...	...	...	...	...
n	x_{1n}	43	x_{2n}	58

Выполнение сравнительного анализа двух сформированных одномерных выборок данных с точки зрения исследования наличия возможной взаимосвязи между двумя признаками или атрибутами рассматриваемого конечного множества объектов с применением выборочного исправленного коэффициента корреляции Пирсона подразумевает их интеграцию в ракурсе получаемой и также подлежащей исследованию соответствующей двумерной выборки числовых данных. Для применения выборочных

характеристик рассматриваемых массивов данных необходимо наличие достаточного количества объектов и нормального распределения данных в обеих выборках (Богун, 2026; Мхитарян, 2025).

Исходные выборки могут быть сгруппированы в вариационные ряды с указанием частот f_{v1j} и f_{v2k} для каждого уникального значения, при этом объёмы выборок определяются как суммы частот:

$$n = n_1 = \sum_{j=1}^{m_1} f_{v1j} = f_{v11} + \dots + f_{v1m_1}, \quad n = n_2 = \sum_{k=1}^{m_2} f_{v2k} = f_{v21} + \dots + f_{v2m_2}.$$

Реализация полноценного статистического анализа представляемых в рамках рассматриваемого конечного множества объектов двух одномерных выборок данных с точки зрения данной публикации в методическом плане подразумевает интеграцию математического (аналитическое и числовое представление с отражением необходимых компонентов) и информационного (применение редактора электронных таблиц Microsoft Excel) подходов. На рис. 1 представлены исходные исследуемые одномерные выборки данных, отражающие числовые значения рассматриваемых в рамках исследования двух признаков или атрибутов исходного конечного множества объектов, и соответствующие им получаемые сгруппированные вариационные ряды.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Исходные данные для статистического анализа совокупности из двух одномерных выборок данных												
2	Наименование параметра	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение								
3	Количество объектов одномерных данных (объем выборки)	$n_{01} = n_0$	23	$n_{02} = n_0$	23								
4	Наименование параметра	Вариант параметра 1 (Одмерная выборка данных)	Вариант параметра 2 (Одмерная выборка данных)	Вариант параметра 1 (Сгруппированный вариационный ряд)	Частота варианта параметра 1 (Сгруппированный вариационный ряд)	Вариант параметра 2 (Сгруппированный вариационный ряд)	Частота варианта параметра 2 (Сгруппированный вариационный ряд)						
5	Номер позиции	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение	Обозначение	Значение
6	1	x_{11}	51	x_{21}	35	xv_{11}	38	fv_{11}	4	xv_{21}	35	fv_{21}	4
7	2	x_{12}	43	x_{22}	43	xv_{12}	43	fv_{12}	5	xv_{22}	41	fv_{22}	4
8	3	x_{13}	59	x_{23}	43	xv_{13}	51	fv_{13}	7	xv_{23}	43	fv_{23}	6
9	4	x_{14}	51	x_{24}	41	xv_{14}	54	fv_{14}	4	xv_{24}	51	fv_{24}	4
10	5	x_{15}	51	x_{25}	41	xv_{15}	59	fv_{15}	3	xv_{25}	55	fv_{25}	3
11	6	x_{16}	38	x_{26}	43					xv_{26}	58	fv_{26}	2
12	7	x_{17}	54	x_{27}	58								
13	8	x_{18}	43	x_{28}	43								
14	9	x_{19}	51	x_{29}	41								
15	10	x_{110}	38	x_{210}	41								
16	11	x_{111}	51	x_{211}	43								
17	12	x_{112}	43	x_{212}	35								
18	13	x_{113}	38	x_{213}	51								
19	14	x_{114}	38	x_{214}	35								
20	15	x_{115}	43	x_{215}	55								
21	16	x_{116}	54	x_{216}	51								
22	17	x_{117}	51	x_{217}	51								
23	18	x_{118}	59	x_{218}	55								
24	19	x_{119}	54	x_{219}	35								
25	20	x_{120}	51	x_{220}	51								
26	21	x_{121}	54	x_{221}	43								
27	22	x_{122}	59	x_{222}	55								
28	23	x_{123}	43	x_{223}	58								
29	Количество объектов одномерных данных (объем выборки)	$n_{01} = n_0$	23	$n_{02} = n_0$	23			$n_{01} = n_0$	23			$n_{02} = n_0$	23

Рис. 1. Значения двух атрибутов объектов в виде одномерных выборок данных (сгруппированных вариационных рядов)

Представим детальную информацию по реализации вычислительных алгоритмов для получения ключевых с точки зрения проведения статистического анализа сформированных двух одномерных выборок данных (сгруппированных одномерных вариационных рядов) числовых значений следующих характеристик (показателей) положения (мер центральной тенденции):

1. **Выборочные средние (выборочные начальные моменты первого порядка),** обозначаются $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$, изначально равные значения данного расчетного параметра для отдельно взятых выборок данных равного объема ($n = n_1 = n_2$) и получаемых из них сгруппированных вариационных рядов в рамках каждого из исследуемых признаков конечного мно-

жества объектов определяются как результаты нахождения средних арифметических с точки зрения одномерных выборок данных всех значений вариантов и произведений различных значений на их частоты с точки зрения получаемых сгруппированных вариационных рядов:

$$\overline{X_1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{1i}}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{m_1} x_{v1j} \cdot f_{v1j}}{n}, \quad \overline{X_2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{2i}}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{m_2} x_{v2k} \cdot f_{v2k}}{n}.$$

Расчёты значений выборочных средних или выборочных начальных моментов первого порядка для каждой из двух исследуемых выборок данных равного объема ($n = n_1 = n_2 = 23$) имеют следующую реализацию с представлением результатов расчётов в виде дробей:

$$\begin{aligned} \overline{X_1} &= \overline{\alpha_{11}} = \frac{\sum_{i=1}^{23} x_{1i}}{23} = \frac{51 + \dots + 43}{23} = \frac{1117}{23}, \\ \overline{X_2} &= \overline{\alpha_{12}} = \frac{\sum_{i=1}^{23} x_{2i}}{23} = \frac{35 + \dots + 58}{23} = \frac{1047}{23}. \end{aligned}$$

2. Выборочные средние квадраты (выборочные начальные моменты второго порядка) обозначаются $\overline{X_1^2}$ и $\overline{X_2^2}$, изначально равные значения данного расчетного параметра для отдельно взятых выборок данных равного объема ($n = n_1 = n_2$) и получаемых из них сгруппированных вариационных рядов в рамках каждого из исследуемых признаков конечного множества объектов определяются как результаты нахождения средних арифметических с точки зрения одномерных выборок данных квадратов всех значений вариантов и произведений квадратов различных значений на их частоты с точки зрения получаемых сгруппированных вариационных рядов:

$$\overline{X_1^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{1i}^2}{n} = \frac{\sum_{j=1}^{m_1} x_{v1j}^2 \cdot f_{v1j}}{n}, \quad \overline{X_2^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{2i}^2}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{m_2} x_{v2k}^2 \cdot f_{v2k}}{n}$$

Расчёты значений выборочных средних квадратов или выборочных начальных моментов второго порядка для каждой из двух исследуемых выборок данных равного объема ($n = n_1 = n_2 = 23$) имеют следующую реализацию с представлением результатов расчётов в виде дробей:

$$\begin{aligned} \overline{X_1^2} &= \overline{\alpha_{21}} = \frac{\sum_{i=1}^{23} x_{1i}^2}{n} = \frac{51^2 + \dots + 43^2}{23} = \frac{2601 + \dots + 1849}{23} = \frac{55335}{23}, \\ \overline{X_2^2} &= \overline{\alpha_{22}} = \frac{\sum_{i=1}^{23} x_{2i}^2}{n} = \frac{35^2 + \dots + 58^2}{23} = \frac{1225 + \dots + 3364}{23} = \frac{48925}{23}. \end{aligned}$$

Представим детальную информацию по реализации вычислительных алгоритмов для получения ключевых с точки зрения проведения статистического анализа сформированных двух одномерных выборок данных (сгруппированных одномерных вариационных рядов) числовых значений следующих **характеристик (показателей) вариации (мер изменчивости)**:

1. Выборочные исправленные дисперсии (выборочные исправленные центральные моменты второго порядка), обозначаются $\overline{D_1}$ и $\overline{D_2}$, изначально равные значения данного расчетного параметра для отдельно взятых выборок данных равного объема ($n = n_1 = n_2$) и получаемых из них сгруппированных вариационных рядов в рамках каждого из исследуемых признаков конечного множества объектов определяются как результаты нахождения средних арифметических с точки зрения одномерных выборок данных квадратов разностей между значениями и полученной ранее соответствующей выборочной средней для всех значений вариантов и произведений квадратов разностей между различными значения-

ми и соответствующей выборочной средней на их частоты в рамках получаемых сгруппированных вариационных рядов с учетом корректировки с поправками на исправленные варианты реализации:

$$\begin{aligned}\overline{D_1} = \overline{\mu_{21}} &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \overline{X_1})^2}{n-1} = \frac{\sum_{j=1}^{m_1} (x_{v1j} - \overline{X_1})^2 \cdot f_{v1j}}{n-1} \\ \overline{D_2} = \overline{\mu_{22}} &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_{2i} - \overline{X_2})^2}{n-1} = \frac{\sum_{k=1}^{m_2} (x_{v2k} - \overline{X_2})^2 \cdot f_{v2k}}{n-1}.\end{aligned}$$

Значения выборочных исправленных дисперсий для каждой из двух представленных одномерных выборок данных и, следовательно, соответствующих сгруппированных вариационных рядов, можно получить как с точки зрения последовательного наращивания значений обозначенных выше компонентов, так и без реализации обозначенного алгоритма агрегации в виде разности между полученными ранее итоговыми значениями выборочных средних квадратов и квадратов выборочных средних для исходных выборок данных с учетом поправки на выборочный вариант нахождения значения:

$$\begin{aligned}\overline{D_1} = \overline{\mu_{21}} &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \overline{X_1})^2}{n-1} = \frac{\sum_{j=1}^{m_1} (x_{v1j} - \overline{X_1})^2 \cdot f_{v1j}}{n-1} = \frac{n}{n-1} \cdot (\overline{X_1^2} - (\overline{X_1})^2), \\ \overline{D_2} = \overline{\mu_{22}} &= \frac{\sum_{j=1}^n (x_{2j} - \overline{X_2})^2}{n-1} = \frac{\sum_{k=1}^{m_2} (x_{v2k} - \overline{X_2})^2 \cdot f_{v2k}}{n-1} = \frac{n}{n-1} \cdot (\overline{X_2^2} - (\overline{X_2})^2).\end{aligned}$$

Расчёты значений выборочных исправленных дисперсий или выборочных исправленных центральных моментов второго порядка для двух исходных исследуемых одномерных выборок данных равного объема ($n = n_1 = n_2 = 23$) в рамках рассматриваемых двух признаков или атрибутов обозначенного конечного множества объектов в соответствии с обозначенными аналитическими выкладками с учетом скорректированных вариантов реализации осуществляется согласно следующим выражениям, в которых в соответствии с проверкой правильности получаемого числового выражения исключительно при наличии одновременно всех целочисленных значений представленных исходных данных должно выполняться сокращение числителя и знаменателя получаемой дроби на значение равного для обеих выборок объема, как раз отражающего количество исследуемых объектов в совокупности:

$$\begin{aligned}\overline{D_1} = \overline{\mu_{21}} &= \frac{\sum_{i=1}^{23} (x_{1i} - \overline{X_1})^2}{23-1} = \frac{\left(51 - \frac{1117}{23}\right)^2 + \dots + \left(43 - \frac{1117}{23}\right)^2}{22} = \frac{575368}{22 \cdot 23^2} = \frac{25016}{22 \cdot 23}, \\ \overline{D_2} = \overline{\mu_{22}} &= \frac{\sum_{i=1}^{23} (x_{2i} - \overline{X_2})^2}{23-1} = \frac{\left(35 - \frac{1047}{23}\right)^2 + \dots + \left(58 - \frac{1047}{23}\right)^2}{22} = \frac{668518}{22 \cdot 23^2} = \frac{29066}{22 \cdot 23}.\end{aligned}$$

2. Выборочные исправленные средние квадратические отклонения (квадратные корни из выборочных исправленных центральных моментов второго порядка), обозначаются $\overline{\sigma_1}$ и $\overline{\sigma_2}$, изначально равные значения данного расчетного параметра для отдельно взятых выборок данных равного объема ($n = n_1 = n_2$) и получаемых из них сгруппированных вариационных рядов в рамках каждого из исследуемых признаков конечного множества объектов определяются как линейные аналоги выборочных исправленных дисперсий в силу нахождения значений квадратных корней из соответствующих значений выборочных исправленных дисперсий:

$$\bar{\sigma}_1 = \sqrt{\bar{D}_1} = \sqrt{\bar{\mu}_{21}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{X}_1)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{m_1} (x_{v1j} - \bar{X}_1)^2 \cdot f_{v1j}}{n-1}},$$

$$\bar{\sigma}_2 = \sqrt{\bar{D}_2} = \sqrt{\bar{\mu}_{22}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{X}_2)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{m_2} (x_{v2k} - \bar{X}_2)^2 \cdot f_{v2k}}{n-1}}.$$

Расчёты значений выборочных исправленных средних квадратических отклонений или квадратных корней из выборочных исправленных центральных моментов второго порядка для исходных исследуемых двух одномерных выборок данных равного объема ($n = n_1 = n_2 = 23$) осуществляется согласно следующим вариантам реализации:

$$\bar{\sigma}_1 = \sqrt{\bar{D}_1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{23} (x_{1i} - \bar{X}_1)^2}{23-1}} = \sqrt{\frac{25016}{22 \cdot 23}}, \quad \bar{\sigma}_2 = \sqrt{\bar{D}_2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{23} (x_{2i} - \bar{X}_2)^2}{23-1}} = \sqrt{\frac{29066}{22 \cdot 23}}.$$

N	O	P	Q	R	S	T	U	V
4								
5	Выборка 1	Выборка 2	Описательная статистика (Выборка 1)			Описательная статистика (Выборка 2)		
6	51	35						
7	43	43	Выборка 1			Выборка 2		
8	59	43						
9	51	41	Среднее	48,56521739		Среднее	45,52173913	
10	51	41	Стандартная ошибка	1,466120809		Стандартная ошибка	1,580350646	
11	38	43	Медиана	51		Медиана	43	
12	54	58	Мода	51		Мода	43	
13	43	43	Стандартное отклонение	7,03126839		Стандартное отклонение	7,579095444	
14	51	41	Дисперсия выборки	49,43873518		Дисперсия выборки	57,44268775	
15	38	41	Экссесс	-1,161107419		Экссесс	-1,15340757	
16	51	43	Асимметричность	-0,204428072		Асимметричность	0,225577779	
17	43	35	Интервал	21		Интервал	23	
18	38	51	Минимум	38		Минимум	35	
19	38	35	Максимум	59		Максимум	58	
20	43	55	Сумма	1117		Сумма	1047	
21	54	51	Счет	23		Счет	23	
22	51	51	Наибольший(1)	59		Наибольший(1)	58	
23	59	55	Наименьший(1)	38		Наименьший(1)	35	
24	54	35	Уровень надежности(95,0%)	3,040548459		Уровень надежности(95,0%)	3,277446642	
25	51	51						
26	54	43						
27	59	55						
28	43	58						

Рис. 2. Выведенные в наглядном виде результаты использования инструмента «Описательная статистика» редактора Microsoft Excel для одномерных выборок данных

При организации учебного процесса, направленного на выполнение студентами вузов статистического анализа, во-первых, одномерных массивов данных с точки зрения нахождения значений необходимых характеристик или показателей положения (мер центральной тенденции) и вариации (мер изменчивости) обозначенных выше расчетных параметров, а, во-вторых, двумерных массивов данных в рамках нахождения значений в определенной степени аналогичных характеристик или показателей положения (мер центральной тенденции) и вариации (мер изменчивости), для полноценного формирования у обучаемых компетенции «понимание алгоритмов обработки одномерных и двумерных массивов данных» студентам по умолчанию необходимо выполнять детальные пошаговые

вычислительные операции с отражением соответствующих последовательных расчётных компонентов с последующим нахождением и визуальным представлением итоговых значений расчётных статистических характеристик или показателей на основе применения как «обычных» атомарных по своей сути формул с применением относительной и абсолютной адресации ячеек, так и с использованием библиотек встроенных функций в автоматическом виде с точки зрения редактора электронных таблиц Microsoft Excel, сравнительный анализ которых позволит подтвердить или опровергнуть выдвигаемую гипотезу о соответствии реализуемых «вручную» или автоматически алгоритмов применения определенных агрегирующих функций к исследуемым одномерным или двумерным массивам данных через призму совокупности двух одномерных массивов данных.

В Microsoft Excel для получения этих параметров можно использовать инструмент «Описательная статистика», результаты которого представлены на рис. 2.

С точки зрения рассмотрения двумерной выборки данных через призму совокупности представленных двух одномерных выборок данных, отражающих значения двух признаков или атрибутов рассматриваемого конечного множества объектов, для полноценного проведения корреляционного анализа данных можно составить представленную ниже в рамках таблицы 2 корреляционную таблицу распределения сгруппированных различных значений вариантов и частот одновременного наличия данных значений вариантов для совокупности двух исследуемых выборок.

На рис. 3 представлена детализация расчётных алгоритмов в рамках формирования таблицы и соответствующего двумерного массива одновременного совокупного распределения различных значений исследуемых двух признаков или атрибутов рассматриваемого конечного множества объектов через призму, с одной стороны, полученных ранее сгруппированных вариационных рядов для каждой из двух выборок, а, с другой стороны, учитывая частоты одновременного получения соответствующей композиции двух уникальных значений вариантов в рамках каждой из выборок, с применением редактора электронных таблиц Microsoft Excel на основе реализации соответствующих алгоритмов.

Таблица 2.

Задание совокупного двумерного сгруппированного вариационного ряда

Обозначения параметров				
X_{v1j}/X_{v2k}	X_{v21}	...	X_{v2m_2}	f_{v1j}
X_{v11}	$f_{v11,21}$	...	$f_{v11,2m_2}$	f_{v11}
...	...	...	...	...
X_{v1m_1}	$f_{v1m_1,21}$	...	$f_{v1m_1,2m_2}$	f_{v1m_1}
f_{v2k}	f_{v21}	...	f_{v2m_2}	$\sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} f_{v1j,2k} = \sum_{j=1}^{m_1} f_{v1j} = \sum_{k=1}^{m_2} f_{v2k}$
Числовые значения параметров				
X_{v1j}/X_{v2k}	35	...	58	f_{v1j}
38	1	...	0	4
...	...	...	...	...
59	0	...	0	3
f_{v2k}	4	...	2	23

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
189										
190	Таблица распределения значений вариантов и частот вариантов для совокупности из двух выборок данных									
191										
192	Обозначение	Вариант 2	xv ₂₁	xv ₂₂	xv ₂₃	xv ₂₄	xv ₂₅	xv ₂₆	Частота Варианта 1	
193	Вариант 1	Значение	35	41	43	51	55	58	Обозначение	Значение
194	xv ₁₁	38	1	1	1	1	0	0	fv ₁₁	4
195	xv ₁₂	43	1	0	2	0	1	1	fv ₁₂	5
196	xv ₁₃	51	1	3	1	2	0	0	fv ₁₃	7
197	xv ₁₄	54	1	0	1	1	0	1	fv ₁₄	4
198	xv ₁₅	59	0	0	1	0	2	0	fv ₁₅	3
199	Частота	Обозначение	fv ₂₁	fv ₂₂	fv ₂₃	fv ₂₄	fv ₂₅	fv ₂₆	Суммы	23
200	Варианта 2	Значение	4	4	6	4	3	2	23	23

Рис. 3. Формируемая таблица распределения вариантов и частот для двумерной выборки данных с точки зрения совокупности из двух одномерных выборок данных

На рис. 4 отражены расчетные формулы, которые, во-первых, используются для определения количества одновременно присутствующих уникальных комбинаций пар числовых значений признаков или атрибутов конечного множества объектов в рамках рассматриваемой совокупности исследуемых одномерных выборок данных с точки зрения получения соответствующей таблицы или матрицы значений, а, во-вторых, позволяют проверить полученные значения с точки зрения получаемых сгруппированных вариационных рядов для одномерных выборок данных, с применением встроенных в редактор электронных таблиц Microsoft Excel отражённых на данном рисунке функций.

	A	B	C
189	Адрес ячейки	Формула	
190	Последовательные расчеты по таблице распределения значений частот вариантов		
191	Ячейка F194	=СЧЁТЕСЛИМН(\$C\$6:\$C\$28;\$E194;\$E\$6:\$E\$28;F\$193)	
192	Ячейка K194	=СЧЁТЕСЛИМН(\$C\$6:\$C\$28;\$E194;\$E\$6:\$E\$28;K\$193)	
193	Ячейка F198	=СЧЁТЕСЛИМН(\$C\$6:\$C\$28;\$E198;\$E\$6:\$E\$28;F\$193)	
194	Ячейка K198	=СЧЁТЕСЛИМН(\$C\$6:\$C\$28;\$E198;\$E\$6:\$E\$28;K\$193)	
195	Ячейка M194	=СУММ(F194:K194)	
196	Ячейка M198	=СУММ(F198:K198)	
197	Ячейка M199	=СУММ(M194:M198)	
198	Ячейка F200	=СУММ(F194:F198)	
199	Ячейка K200	=СУММ(K194:K198)	
200	Ячейка L200	=СУММ(F200:K200)	
201	Ячейка M200	=СУММ(F194:K198)	

Рис. 4. Применение функций редактора Microsoft Excel для формирования совокупности сгруппированных вариационных рядов данных

С точки зрения реализации корреляционного анализа двумерного массива данных в рамках рассмотрения совокупности двух исходных одномерных выборок данных выделим следующие характеристики.

Представим детальную информацию по реализации вычислительных алгоритмов для получения ключевого с точки зрения проведения статистического анализа совокупности сформированных двух одномерных выборок данных (сгруппированных одномерных вариационных рядов) числового значения следующей **характеристики (показателя) положения (меры центральной тенденции)**:

1. Общее выборочное среднее (выборочный корреляционный момент), обозначается $\bar{X}_1 \cdot \bar{X}_2$ или $\bar{X}_2 \cdot \bar{X}_1$, изначально равные значения данного расчетного параметра вне зависимости от порядка рассмотрения входящих в двумерную совокупность одномерных выборок данных равного объема ($n = n_1 = n_2$) и получаемых из них сгруппированных вариационных рядов с точки зрения исследуемой совокупности признаков конечного множества объектов определяются как результаты нахождения среднего арифметического с точки зре-

ния совокупного рассмотрения двух исходных одномерных выборок данных произведений всех соответствующих объектам значений вариантов и произведений различных значений вариантов на частоты их одновременного совместного появления в рамках получаемого двумерного совокупного сгруппированного вариационного ряда:

$$\overline{X_1 \cdot X_2} = \overline{X_2 \cdot X_1} = \overline{\alpha_{112}} = \overline{\alpha_{121}} = \frac{\sum_{i=1}^n x_{1i} \cdot x_{2i}}{n} = \frac{x_{11} \cdot x_{21} + \dots + x_{1n} \cdot x_{2n}}{n},$$

$$\left(\overline{X_1 \cdot X_2} = \overline{X_2 \cdot X_1} = \overline{\alpha_{112}} = \overline{\alpha_{121}} = \frac{\sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} x_{v1j} \cdot x_{v2k} \cdot f_{v1j,2k}}{n} = \right.$$

$$\left. = \frac{x_{v11} \cdot x_{v21} \cdot f_{v11,21} + \dots + x_{v1m_1} \cdot x_{v2m_2} \cdot f_{v1m_1,2m_2}}{n} \right).$$

Расчёт значения общего выборочного среднего или выборочного корреляционного момента первого порядка для совокупности из двух исследуемых выборок данных равного объема ($n = n_1 = n_2 = 23$) имеет следующую реализацию с представлением результатов расчётов в виде дроби:

$$\overline{X_1 \cdot X_2} = \overline{X_2 \cdot X_1} = \overline{\alpha_{112}} = \overline{\alpha_{121}} = \frac{\sum_{i=1}^{23} x_{1i} \cdot x_{2i}}{n} = \frac{51 \cdot 35 + \dots + 43 \cdot 58}{23} = \frac{1785 + \dots + 2494}{23} = \frac{51100}{23}.$$

Аналогично расчёт значения общего выборочного среднего или выборочного корреляционного момента первого порядка для совокупности соответствующих сгруппированных вариационных рядов имеет следующую реализацию с представлением результатов расчётов в виде дроби:

$$\overline{X_1 \cdot X_2} = \overline{X_2 \cdot X_1} = \overline{\alpha_{112}} = \overline{\alpha_{121}} = \frac{\sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^6 x_{v1j} \cdot x_{v2k} \cdot f_{v1j,2k}}{n} = \frac{38 \cdot 35 \cdot 1 + \dots + 59 \cdot 58 \cdot 0}{23} = \frac{51100}{23}.$$

Результаты расчетов общего выборочного среднего могут быть представлены в виде симметричной квадратной матрицы выборочных средних второго порядка, элементы главной диагонали которой соответствуют выборочным средним квадратов, входящих в рассматриваемую двумерную выборку данных двух исходных одномерных выборок данных, тогда как элементы побочной диагонали отражают равные значения общего выборочного среднего непосредственно представленной двумерной выборки данных:

$$\overline{M_{VS}} = \begin{pmatrix} m_{VS11} & m_{VS12} \\ m_{VS21} & m_{VS22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\alpha_{21}} & \overline{\alpha_{112}} \\ \overline{\alpha_{121}} & \overline{\alpha_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{X_1^2} & \overline{X_1 \cdot X_2} \\ \overline{X_2 \cdot X_1} & \overline{X_2^2} \end{pmatrix}.$$

Получим следующие дробные числовые значения соответствующих элементов данной симметричной квадратной матрицы выборочных средних второго порядка с возможностью выноса за матрицу в целом числового коэффициента, обратного по значению объёму одномерных выборок или количеству рассматриваемых объектов ($n = n_1 = n_2 = 23$):

$$\overline{M_{VS}} = \begin{pmatrix} m_{VS11} & m_{VS12} \\ m_{VS21} & m_{VS22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{55335}{23} & \frac{51100}{23} \\ \frac{51100}{23} & \frac{48925}{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{23} \cdot \begin{pmatrix} 55335 & 51100 \\ 51100 & 48925 \end{pmatrix}$$

Представим детальную информацию по реализации вычислительных алгоритмов для получения ключевых с точки зрения проведения статистического анализа совокупности сформированных двух одномерных выборок данных (сгруппированных одномерных вариационных рядов) числовых значений следующих **характеристик (показателей) вариации (мер изменчивости)**:

1. Выборочная исправленная ковариация (выборочный ковариационный момент), обозначается $\overline{Cov(X_1, X_2)}$ или $\overline{Cov(X_2, X_1)}$, изначально равные значения данного расчетного параметра вне зависимости от порядка рассмотрения входящих в двумерную совокупность одномерных выборок данных равного объема ($n = n_1 = n_2 = 23$) и получаемых из них сгруппированных вариационных рядов с точки зрения исследуемой совокупности признаков конечного множества объектов определяются как результаты нахождения среднего арифметического с точки зрения совокупного рассмотрения двух исходных одномерных выборок данных произведений всех соответствующих объектам разностей между значениями и полученными ранее соответствующими им выборочным средним и произведений разностей между различными значениями вариантов и их выборочных средних на частоты их одновременного совместного появления в рамках получаемого двумерного совокупного сгруппированного вариационного ряда:

$$\begin{aligned}\overline{Cov(X_1, X_2)} &= \overline{Cov(X_2, X_1)} = \overline{\mu_{112}} = \overline{\mu_{121}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \overline{X_1}) \cdot (x_{2i} - \overline{X_2})}{n - 1} = \\ &= \frac{(x_{11} - \overline{X_1}) \cdot (x_{21} - \overline{X_2}) + \dots + (x_{1n} - \overline{X_1}) \cdot (x_{2n} - \overline{X_2})}{n - 1}, \\ \left(\overline{Cov(X_1, X_2)} = \overline{Cov(X_2, X_1)} = \overline{\mu_{112}} = \overline{\mu_{121}} = \frac{\sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} (x_{v1j} - \overline{X_1}) \cdot (x_{v2k} - \overline{X_2}) \cdot f_{v1j,2k}}{n - 1} = \right. \\ &\left. = \frac{(x_{v11} - \overline{X_1}) \cdot (x_{v21} - \overline{X_2}) \cdot f_{v11,21} + \dots + (x_{v1m_1} - \overline{X_1}) \cdot (x_{v2m_2} - \overline{X_2}) \cdot f_{v1m_1,2m_2}}{n - 1} \right)\end{aligned}$$

Значение выборочной исправленной ковариации для двумерной выборки данных, представляющей совокупность из исходных одномерных выборок данных и, следовательно, соответствующих сгруппированных вариационных рядов, можно получить как с точки зрения последовательного наращивания совокупных значений обозначенных выше компонентов, так и без реализации обозначенного алгоритма агрегации в виде разности между полученными ранее итоговыми значениями общего выборочного среднего для двумерной выборки данных и произведения выборочных средних для исходных одномерных выборок данных с учетом поправки на выборочный вариант нахождения значения:

$$\begin{aligned}\overline{Cov(X_1, X_2)} &= \overline{Cov(X_2, X_1)} = \overline{\mu_{112}} = \overline{\mu_{121}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \overline{X_1}) \cdot (x_{2i} - \overline{X_2})}{n - 1} = \\ &= \frac{n}{n - 1} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} \cdot x_{2i})}{n} - \overline{X_1} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_{2i}}{n} - \overline{X_2} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_{1i}}{n} + \frac{\sum_{i=1}^n (\overline{X_1} \cdot \overline{X_2})}{n} \right) = \\ &= \frac{n}{n - 1} \cdot \left(\overline{X_1 \cdot X_2} - \overline{X_1} \cdot \overline{X_2} - \overline{X_2} \cdot \overline{X_1} + \frac{n \cdot \overline{X_1} \cdot \overline{X_2}}{n} \right) = \frac{n}{n - 1} \cdot (\overline{X_1 \cdot X_2} - \overline{X_1} \cdot \overline{X_2}).\end{aligned}$$

Необходимо отметить, что по аналогии с выборочными исправленными дисперсиями для рассматриваемых выше двух одномерных выборок данных в процессе нахождения выборочной исправленной ковариации (выборочного ковариационного момента) в рамках рассмотрения двумерной выборки данных с точки зрения совокупности из двух исследуемых одномерных выборок данных равного объема или соответствующих сгруппированных вариационных рядов при наличии всех целочисленных значений рассматриваемых признаков или атрибутов обозначенного конечного множества объектов с учётом соответствующих определенных ранее значений выборочных средних в виде дробей получим сокращение изначально равных объёмов выборок в рамках формируемых числовых значений в числителе и знаменателе, что, во-первых, объясняется получением, по сути, в

чистом виде квадрата объёма выборки в рамках знаменателя, правда, с учётом получения скорректированной оценки, а, во-вторых, является проверкой правильности нахождения числового целочисленного итогового значения в рамках числителя дроби.

Представим доказательство сформированного утверждения в аналитическом виде как с точки зрения исходной формулы для нахождения выборочной исправленной ковариации, так и в рамках её определения через разность общего выборочного среднего для совокупности из двух исследуемых выборок данных и произведения выборочных средних для каждой из исходных одномерных выборок данных с учетом скорректированного варианта реализации:

$$\begin{aligned}
 \overline{Cov(X_1, X_2)} &= \overline{Cov(X_2, X_1)} = \overline{\mu_{112}} = \overline{\mu_{121}} = \frac{\sum_{i=1}^n \left(x_{1i} - \frac{\sum_{i=1}^n x_{1i}}{n} \right) \cdot \left(x_{2i} - \frac{\sum_{i=1}^n x_{2i}}{n} \right)}{n-1} = \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{(x_{1i} \cdot n - \sum_{i=1}^n x_{1i}) \cdot (x_{2i} \cdot n - \sum_{i=1}^n x_{2i})}{n^2}}{n-1} = \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} \cdot n - \sum_{i=1}^n x_{1i}) \cdot (x_{2i} \cdot n - \sum_{i=1}^n x_{2i})}{n^2 \cdot (n-1)} = \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} \cdot x_{2i} \cdot n^2) - \sum_{i=1}^n (x_{1i} \cdot n \cdot \sum_{i=1}^n x_{2i}) - \sum_{i=1}^n (x_{2i} \cdot n \cdot \sum_{i=1}^n x_{1i}) + \sum_{i=1}^n (\sum_{i=1}^n x_{1i} \cdot \sum_{i=1}^n x_{2i})}{n^2 \cdot (n-1)} = \\
 &= \frac{n^2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_{1i} \cdot x_{2i}) - n \cdot \sum_{i=1}^n (x_{1i} \cdot \sum_{i=1}^n x_{2i}) - n \cdot \sum_{i=1}^n (x_{2i} \cdot \sum_{i=1}^n x_{1i}) + \sum_{i=1}^n (\sum_{i=1}^n x_{1i} \cdot \sum_{i=1}^n x_{2i})}{n^2 \cdot (n-1)} = \\
 &= \frac{n^2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_{1i} \cdot x_{2i}) - n \cdot \sum_{i=1}^n x_{1i} \cdot \sum_{i=1}^n x_{2i} - n \cdot \sum_{i=1}^n x_{2i} \cdot \sum_{i=1}^n x_{1i} + n \cdot (\sum_{i=1}^n x_{1i} \cdot \sum_{i=1}^n x_{2i})}{n^2 \cdot (n-1)} = \\
 &= \frac{n^2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_{1i} \cdot x_{2i}) - 2 \cdot n \cdot \sum_{i=1}^n x_{1i} \cdot \sum_{i=1}^n x_{2i} + n \cdot \sum_{i=1}^n x_{1i} \cdot \sum_{i=1}^n x_{2i}}{n^2 \cdot (n-1)} = \\
 &= \frac{n^2 \cdot \sum_{i=1}^n (x_{1i} \cdot x_{2i}) - n \cdot \sum_{i=1}^n x_{1i} \cdot \sum_{i=1}^n x_{2i}}{n^2 \cdot (n-1)} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_{1i} \cdot x_{2i}) - \sum_{i=1}^n x_{1i} \cdot \sum_{i=1}^n x_{2i}}{n \cdot (n-1)} = \\
 &= \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_{1i} \cdot x_{2i}) - \sum_{i=1}^n x_{1i} \cdot \sum_{i=1}^n x_{2i}}{n \cdot (n-1)}.
 \end{aligned}$$

Понимание фактора получения кратности числовых значений в числителе и знаменателе получаемой дроби с точки зрения объёма выборки объясняется представленным ниже равенством при условии одновременного наличия всех целочисленных значений в каждой отдельно взятой одномерной выборке данных, совокупность которых образует исходную двумерную выборку данных:

$$\overline{Cov(X_1, X_2)} = \overline{Cov(X_2, X_1)} = \overline{\mu_{112}} = \overline{\mu_{121}} = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_{1i} \cdot x_{2i}) - \sum_{i=1}^n x_{1i} \cdot \sum_{i=1}^n x_{2i}}{n \cdot (n-1)}.$$

Аналогично получим:

$$\overline{Cov(X_1, X_2)} = \overline{Cov(X_2, X_1)} = \overline{\mu_{112}} = \overline{\mu_{121}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \overline{X_1}) \cdot (x_{2i} - \overline{X_2})}{n-1} =$$

$$= \frac{n}{n-1} \cdot (\overline{X_1 \cdot X_2} - \overline{X_1} \cdot \overline{X_2}) = \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} \cdot x_{2i})}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n x_{1i}}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_{2i}}{n} \right) =$$

$$= \frac{n}{n-1} \cdot \left(\frac{n \cdot \sum_{i=1}^n (x_{1i} \cdot x_{2i}) - \sum_{i=1}^n x_{1i} \cdot \sum_{i=1}^n x_{2i}}{n^2} \right) = \frac{1}{(n-1) \cdot n} \cdot (n \cdot \sum_{i=1}^n (x_{1i} \cdot x_{2i}) - \sum_{i=1}^n x_{1i} \cdot \sum_{i=1}^n x_{2i}).$$

Расчёт значения выборочной исправленной ковариации или выборочного ковариационного момента для совокупности из двух исследуемых выборок данных равных объемов ($n = n_1 = n_2 = 23$) в рамках рассматриваемых двух признаков или атрибутов обозначенного конечного множества объектов в соответствии с обозначенными аналитическими выкладками с учетом скорректированного варианта реализации осуществляется согласно следующему выражению, в котором в соответствии с проверкой правильности получаемого числового выражения исключительно при наличии одновременно всех целочисленных значений исходных данных должно выполняться сокращение числителя и знаменателя получаемой дроби на значение равного для обеих входящих в совокупность выборок объема, отражающего количество исследуемых объектов в совокупности:

$$\overline{Cov(X_1, X_2)} = \overline{Cov(X_2, X_1)} = \overline{\mu_{112}} = \overline{\mu_{121}} = \frac{\sum_{i=1}^{23} (x_{1i} - \overline{X_1}) \cdot (x_{2i} - \overline{X_2})}{n-1} =$$

$$= \frac{\left(51 - \frac{1117}{23}\right) \cdot \left(35 - \frac{1047}{23}\right) + \dots + \left(43 - \frac{1117}{23}\right) \cdot \left(58 - \frac{1047}{23}\right)}{22} = \frac{23 \cdot 5801}{22 \cdot 23^2} = \frac{5801}{22 \cdot 23}.$$

Аналогично расчёт значения выборочной исправленной ковариации или выборочного ковариационного момента для совокупности из двух соответствующих сгруппированных вариационных рядов реализуется в виде обозначенной ниже цепочки равенств с представлением результата расчётов в виде дроби:

$$\overline{Cov(X_1, X_2)} = \overline{Cov(X_2, X_1)} = \overline{\mu_{112}} = \overline{\mu_{121}} = \frac{\sum_{j=1}^5 \sum_{k=1}^6 (x_{v1j} - \overline{X_1}) \cdot (x_{v2k} - \overline{X_2}) \cdot f_{v1j,2k}}{n-1} =$$

$$= \frac{\left(38 - \frac{1117}{23}\right) \cdot \left(35 - \frac{1047}{23}\right) \cdot 1 + \dots + \left(59 - \frac{1117}{23}\right) \cdot \left(58 - \frac{1047}{23}\right) \cdot 0}{22} = \frac{23 \cdot 5801}{22 \cdot 23^2} = \frac{5801}{22 \cdot 23}.$$

Результаты расчетов выборочной исправленной ковариации могут быть представлены в виде симметричной квадратной матрицы выборочных исправленных ковариаций второго порядка, элементы главной диагонали которой соответствуют выборочным исправленным дисперсиям входящих в рассматриваемую двумерную выборку данных двух исходных одномерных выборок данных, тогда как элементы побочной диагонали отражают равные значения выборочной исправленной ковариации непосредственно представленной двумерной выборки данных:

$$\overline{M_{VC}} = \begin{pmatrix} m_{VC11} & m_{VC12} \\ m_{VC21} & m_{VC22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\mu_{21}} & \overline{\mu_{112}} \\ \overline{\mu_{121}} & \overline{\mu_{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{D_1} & \overline{Cov(X_1, X_2)} \\ \overline{Cov(X_2, X_1)} & \overline{D_2} \end{pmatrix}.$$

Получим следующие дробные числовые значения соответствующих элементов данной симметричной квадратной матрицы выборочных исправленных ковариаций второго порядка с возможностью выноса за матрицу в целом числового коэффициента, обратного по значению произведению объема выборки на самого себя за вычетом единицы с точки зрения количества рассматриваемых объектов ($n = n_1 = n_2 = 23$):

$$\overline{M_{VC}} = \begin{pmatrix} m_{VC11} & m_{VC12} \\ m_{VC21} & m_{VC22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{25016}{22 \cdot 23} & \frac{5801}{22 \cdot 23} \\ \frac{5801}{22 \cdot 23} & \frac{29066}{22 \cdot 23} \end{pmatrix} = \frac{1}{22 \cdot 23} \cdot \begin{pmatrix} 25016 & 5801 \\ 5801 & 29066 \end{pmatrix}$$

С точки зрения исследования взаимосвязи между рассматриваемыми в рамках конечной совокупности объектов двух признаков или атрибутов, представленных в виде соответствующих одномерных массивов данных, выборочная исправленная ковариация является в целом качественной характеристикой, знак которой определяет характер определяемой связи.

Возможны следующие варианты интерпретации знакового компонента выборочной исправленной ковариации (соотношения между значениями общего выборочного среднего для совокупности из двух исследуемых выборок данных и произведения выборочных средних исходных одномерных данных выборок):

– Если значение выборочной исправленной ковариации является положительным числом ($\overline{Cov(X_1, X_2)} > 0$), то есть значение общего выборочного среднего двумерной выборки данных больше значения произведения выборочных средних одномерных выборок данных ($\overline{X_1 \cdot X_2} > \overline{X_1} \cdot \overline{X_2}$), получаем прямой характер связи в рамках определения единого направления динамики изменения значений исследуемой совокупности двух выборок данных (одновременное увеличение или уменьшение значений).

– Если значение выборочной исправленной ковариации является отрицательным числом ($\overline{Cov(X_1, X_2)} < 0$), то есть значение общего выборочного среднего двумерной выборки данных меньше значения произведения выборочных средних одномерных выборок данных ($\overline{X_1 \cdot X_2} < \overline{X_1} \cdot \overline{X_2}$), получаем обратный характер связи в рамках определения противоположного направления динамики изменения значений исследуемой совокупности двух выборок данных (противоположная динамика в плане увеличения или уменьшения значений для выборок).

– Если значение выборочной исправленной ковариации равно нулю ($\overline{Cov(X_1, X_2)} = 0$), то есть значение общего выборочного среднего двумерной выборки данных равно значению произведения выборочных средних одномерных выборок данных ($\overline{X_1 \cdot X_2} = \overline{X_1} \cdot \overline{X_2}$), получаем отсутствие знакового компонента в значении и, как следствие, характера связи в целом в рамках определения направления изменения динамики значений исследуемых в рамках совокупности двух выборок данных (хаотичная динамика в плане одновременного или противоположного уменьшения или увеличения значений для рассматриваемых в рамках совокупности выборок данных), что говорит о наличии изначально независимых одномерных выборок с точки зрения исследуемых двух признаков или атрибутов рассматриваемого конечного множества объектов.

2. Выборочный исправленный коэффициент корреляции Пирсона, обозначается $r(X_1, X_2)$ или $r(X_2, X_1)$, изначально равные значения данного расчетного параметра вне зависимости от порядка рассмотрения входящих в двумерную совокупность одномерных выборок данных равных объемов ($n = n_1 = n_2 = 23$) и получаемых из них сгруппированных вариационных рядов с точки зрения исследуемой совокупности признаков конечного множества объектов определяются как результаты отношения значения выборочной исправленной ковариации для формируемой двумерной выборки данных к произведению выборочных средних квадратических отклонений входящих в двумерную выборку исходных одномерных выборок данных также с поправкой на исправленный вариант реализации (в силу сокращения ключевых компонентов корректировки данная поправка теряет смысл в целом):

$$r(X_1, X_2) = r(X_2, X_1) = \frac{\overline{Cov(X_1, X_2)}}{\overline{\sigma_1} \cdot \overline{\sigma_2}} = \frac{\overline{Cov(X_2, X_1)}}{\overline{\sigma_1} \cdot \overline{\sigma_2}} = \frac{\overline{\mu_{112}}}{\sqrt{\overline{\mu_{21}}} \cdot \sqrt{\overline{\mu_{22}}}} = \frac{\overline{\mu_{121}}}{\sqrt{\overline{\mu_{21}}} \cdot \sqrt{\overline{\mu_{22}}}} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{X}_1) \cdot (x_{2i} - \bar{X}_2)}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{X}_1) \cdot (x_{2i} - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{X}_1)^2}{n-1}} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{X}_2)^2}{n-1}}} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{X}_1) \cdot (x_{2i} - \bar{X}_2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - \bar{X}_1)^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{2i} - \bar{X}_2)^2}} \\
 &\left(\overline{r(X_1, X_2)} = \overline{r(X_2, X_1)} = \frac{\overline{Cov(X_1, X_2)}}{\bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2} = \frac{\overline{Cov(X_2, X_1)}}{\bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2} = \frac{\overline{\mu_{112}}}{\sqrt{\overline{\mu_{21}}} \cdot \sqrt{\overline{\mu_{22}}}} = \frac{\overline{\mu_{121}}}{\sqrt{\overline{\mu_{21}}} \cdot \sqrt{\overline{\mu_{22}}}} = \right. \\
 &\quad \left. = \frac{\sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} (x_{v1j} - \bar{X}_1) \cdot (x_{v2k} - \bar{X}_2) \cdot f_{v1j,2k}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m_1} (x_{v1j} - \bar{X}_1)^2 \cdot f_{v1j}} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{m_2} (x_{v2k} - \bar{X}_2)^2 \cdot f_{v2k}}} \right)
 \end{aligned}$$

Расчёт значения выборочного исправленного коэффициента корреляции Пирсона для совокупности из двух исследуемых выборок данных равного объема ($n = n_1 = n_2 = 23$) в рамках рассматриваемой совокупности из двух признаков или атрибутов обозначенного конечного множества объектов в соответствии с обозначенными аналитическими выкладками с учетом скорректированного варианта реализации осуществляется согласно следующему выражению:

$$\begin{aligned}
 \overline{r(X_1, X_2)} &= \frac{\overline{Cov(X_1, X_2)}}{\bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{23} (x_{1i} - \bar{X}_1) \cdot (x_{2i} - \bar{X}_2)}{23-1}}{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{23} (x_{1i} - \bar{X}_1)^2}{23-1}} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{23} (x_{2i} - \bar{X}_2)^2}{23-1}}} = \frac{\frac{5801}{22 \cdot 23}}{\sqrt{\frac{25016}{22 \cdot 23}} \cdot \sqrt{\frac{29066}{22 \cdot 23}}} = \\
 &= \frac{5801}{\sqrt{25016 \cdot 29066}}.
 \end{aligned}$$

Аналогично расчёт значения выборочного исправленного коэффициента корреляции Пирсона для совокупности из двух соответствующих сгруппированных вариационных рядов осуществляется согласно следующей цепочке равенств с представлением результата расчётов в виде дроби:

$$\begin{aligned}
 \overline{r(X_1, X_2)} &= \overline{r(X_2, X_1)} = \frac{\overline{Cov(X_1, X_2)}}{\bar{\sigma}_1 \cdot \bar{\sigma}_2} = \\
 &= \frac{\sum_{j=1}^{m_1} \sum_{k=1}^{m_2} (x_{v1j} - \bar{X}_1) \cdot (x_{v2k} - \bar{X}_2) \cdot f_{v1j,2k}}{n-1} = \\
 &= \frac{\sum_{j=1}^{m_1} (x_{v1j} - \bar{X}_1)^2 \cdot f_{v1j}}{n-1} \cdot \frac{\sum_{k=1}^{m_2} (x_{v2k} - \bar{X}_2)^2 \cdot f_{v2k}}{n-1} = \\
 &= \frac{\frac{5801}{22 \cdot 23}}{\sqrt{\frac{25016}{22 \cdot 23}} \cdot \sqrt{\frac{29066}{22 \cdot 23}}} = \frac{\frac{5801}{22 \cdot 23}}{\frac{\sqrt{25016} \cdot \sqrt{29066}}{22 \cdot 23}} = \frac{5801}{\sqrt{25016 \cdot 29066}}.
 \end{aligned}$$

Результаты расчетов выборочного исправленного коэффициента корреляции Пирсона могут быть представлены в виде симметричной квадратной матрицы выборочных исправленных коэффициентов корреляции второго порядка, элементы главной диагонали которой являются единичными значениями, получаемыми в силу реализации сокращений выборочных исправленных дисперсий входящих в рассматриваемую двумерную выборку данных двух исходных одномерных выборок данных на квадраты их выборочных исправленных средних квадратических отклонений, тогда как элементы побочной диагонали отражают равные значения выборочного исправленного коэффициента корреляции Пирсона непосредственно представленной двумерной выборки данных:

$$\begin{aligned} \overline{M}_{VR} = \begin{pmatrix} m_{VR11} & m_{VR12} \\ m_{VR21} & m_{VR22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\overline{\mu_{21}}}{\sqrt{\overline{\mu_{21}} \cdot \sqrt{\overline{\mu_{21}}}}} & \frac{\overline{\mu_{112}}}{\sqrt{\overline{\mu_{21}} \cdot \sqrt{\overline{\mu_{22}}}}} \\ \frac{\overline{\mu_{121}}}{\sqrt{\overline{\mu_{22}} \cdot \sqrt{\overline{\mu_{21}}}}} & \frac{\overline{\mu_{22}}}{\sqrt{\overline{\mu_{22}} \cdot \sqrt{\overline{\mu_{22}}}}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\overline{\mu_{21}}}{\overline{\mu_{21}}} & \frac{\overline{\mu_{112}}}{\sqrt{\overline{\mu_{21}} \cdot \sqrt{\overline{\mu_{22}}}}} \\ \frac{\overline{\mu_{121}}}{\sqrt{\overline{\mu_{22}} \cdot \sqrt{\overline{\mu_{21}}}}} & \frac{\overline{\mu_{22}}}{\overline{\mu_{22}}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\overline{D_1}}{\overline{\sigma_1 \cdot \sigma_1}} & \frac{\overline{Cov(X_1, X_2)}}{\overline{\sigma_1 \cdot \sigma_2}} \\ \frac{\overline{Cov(X_2, X_1)}}{\overline{\sigma_2 \cdot \sigma_1}} & \frac{\overline{D_2}}{\overline{\sigma_2 \cdot \sigma_2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\overline{D_1}}{\overline{D_1}} & \frac{\overline{Cov(X_1, X_2)}}{\overline{\sigma_1 \cdot \sigma_2}} \\ \frac{\overline{Cov(X_2, X_1)}}{\overline{\sigma_2 \cdot \sigma_1}} & \frac{\overline{D_2}}{\overline{D_2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \overline{r(X_1, X_2)} \\ \overline{r(X_2, X_1)} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Получим числовые значения соответствующих элементов данной симметричной квадратной матрицы выборочных исправленных коэффициентов корреляции второго порядка:

$$\overline{M}_{VR} = \begin{pmatrix} m_{VR11} & m_{VR12} \\ m_{VR21} & m_{VR22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5801}{\sqrt{25016 \cdot 29066}} \\ \frac{5801}{\sqrt{25016 \cdot 29066}} & 1 \end{pmatrix}.$$

С точки зрения исследования взаимосвязи между рассматриваемыми в рамках конечной совокупности объектов двух признаков или атрибутов, представленных в виде соответствующих одномерных массивов данных, выборочный исправленный коэффициент корреляции Пирсона является в целом количественной характеристикой, абсолютное числовое значение которой определяет силу или мощность определяемой связи.

Интерпретация значения выборочного исправленного коэффициента корреляции Пирсона, отражающего степень, мощность или силу взаимосвязи или характера определенной ранее связи между исследуемыми в рамках единой совокупности двух выборок данных, с точки зрения непосредственно числового компонента в сочетании со знаковым компонентом, выбирается согласно представленной в таблице 3 классификации.

Таблица 3.

Интерпретация значения выборочного исправленного коэффициента корреляции Пирсона

Сила связи	Характер связи	
	Прямая (+)	Обратная (–)
Связь отсутствует	$\overline{r(X_1, X_2)} = \overline{r(X_2, X_1)} = 0$	$\overline{r(X_1, X_2)} = \overline{r(X_2, X_1)} = 0$
Слабая связь	$0 < \overline{r(X_1, X_2)} = \overline{r(X_2, X_1)} \leq 0,3$	$-0,3 \leq \overline{r(X_1, X_2)} = \overline{r(X_2, X_1)} < 0$
Связь средней силы	$0,3 < \overline{r(X_1, X_2)} = \overline{r(X_2, X_1)} < 0,7$	$-0,7 < \overline{r(X_1, X_2)} = \overline{r(X_2, X_1)} < -0,3$
Сильная связь	$0,7 \leq \overline{r(X_1, X_2)} = \overline{r(X_2, X_1)} < 1$	$-1 < \overline{r(X_1, X_2)} = \overline{r(X_2, X_1)} \leq -0,7$
Строгая функциональная связь	$\overline{r(X_1, X_2)} = \overline{r(X_2, X_1)} = 1$	$\overline{r(X_1, X_2)} = \overline{r(X_2, X_1)} = -1$

	A	B	C
268	Характеристики (показатели) вариации (меры изменчивости) для совокупности из двух выборок данных		
269	Выборочная исправленная ковариация (Выборочный исправленный ковариационный момент) для совокупности из двух выборок данных		
270	Наименование параметра	Нарастание компонент выборочной ковариации (Совокупность выборок данных 1 и 2)	
271	Номер позиции	Обозначение	Значение
272	1	Cov ₁₂₁	-13552
273	2	Cov ₁₂₂	-6128
274	3	Cov ₁₂₃	-20048
275	4	Cov ₁₂₄	-25872
276	5	Cov ₁₂₅	-31696
277	6	Cov ₁₂₆	-17602
278	7	Cov ₁₂₇	18273
279	8	Cov ₁₂₈	25697
280	9	Cov ₁₂₉	19873
281	10	Cov ₁₂₁₀	45145
282	11	Cov ₁₂₁₁	41897
283	12	Cov ₁₂₁₂	72873
284	13	Cov ₁₂₁₃	42255
285	14	Cov ₁₂₁₄	101061
286	15	Cov ₁₂₁₅	73157
287	16	Cov ₁₂₁₆	88907
288	17	Cov ₁₂₁₇	95963
289	18	Cov ₁₂₁₈	148283
290	19	Cov ₁₂₁₉	118033
291	20	Cov ₁₂₂₀	125089
292	21	Cov ₁₂₂₁	117839
293	22	Cov ₁₂₂₂	170159
294	23	Cov ₁₂₂₃	133423
295	Выборочная исправленная ковариация для совокупности из двух выборок данных (до сокращения)	Cov ₀₁₂₁	133423
296	Выборочная исправленная ковариация для совокупности из двух выборок данных (после сокращения)	Cov ₀₁₂₂	5801
297	Выборочная исправленная ковариация для совокупности из двух выборок данных (после деления)	Cov ₁₂	11,46442688
298	Выборочная исправленная ковариация для совокупности из двух выборок данных (Excel) Вариант 1	Cov ₁₂	11,46442688
299	Выборочная исправленная ковариация для совокупности из двух выборок данных (Excel) Вариант 2	Cov ₁₂	11,46442688
300	Выборочная исправленная ковариация для совокупности из двух выборок данных (Excel) Вариант 3	Cov ₁₂	11,46442688
301	Выборочная исправленная ковариация для совокупности из двух выборок данных через выборочные средние	Cov ₁₂	11,46442688
302	Выборочная исправленная ковариация для совокупности из двух выборок данных через выборочные средние (Excel)	Cov ₁₂	11,46442688
303	Характер связи между двумя выборками одномерных данных	Char Rel	Прямая
304	Выборочный исправленный коэффициент корреляции Пирсона для совокупности из двух выборок данных	Ro ₁₂	0,215130158
305	Выборочный исправленный коэффициент корреляции Пирсона для совокупности из двух выборок данных (Excel)	Ro ₁₂	0,215130158
306	Сила связи между двумя выборками одномерных данных	Pow Rel	Слабая

Рис. 5. Детализация расчётов выборочных исправленных ковариации и коэффициента корреляции Пирсона для совокупности из двух исходных одномерных выборок данных

На рис. 5 представлена детализация расчётов и последующей интерпретации значений выборочных исправленных ковариации и коэффициента корреляции Пирсона для совокупности из двух исследуемых одномерных выборок данных равного объема ($n = n_1 = n_2 = 23$), тогда как на рис. 6 представлены соответствующие формулы и функции, реализующие вычисление выборочных исправленных ковариации и коэффициента корреляции Пирсона для совокупности из двух одномерных выборок данных.

	A	B	C
307	Адрес ячейки формулы	Формула	
308	Последовательные расчеты для совокупности двух выборок данных		
309	Ячейка C272	=(C6*\$C\$3-\$C\$58)*(E6*\$E\$3-\$E\$58)	
310	Ячейка C273	=C272+(C7*\$C\$3-\$C\$58)*(E7*\$E\$3-\$E\$58)	
311	Ячейка C294	=C293+(C28*\$C\$3-\$C\$58)*(E28*\$E\$3-\$E\$58)	
312	Ячейка C295	=C294	
313	Ячейка C296	=C295/C3	
314	Ячейка C297	=C296/(C3*(C3-1))	
315	Последовательные расчеты по таблице частных значений компонентов выборочной исправленной ковариации		
316	Ячейка F276	=(E276*\$C\$3-\$C\$58)*(F\$275*\$E\$3-\$E\$58)*F194	
317	Ячейка K276	=(E276*\$C\$3-\$C\$58)*(K\$275*\$E\$3-\$E\$58)*K194	
318	Ячейка F280	=(E280*\$C\$3-\$C\$58)*(F\$275*\$E\$3-\$E\$58)*F198	
319	Ячейка K280	=(E280*\$C\$3-\$C\$58)*(K\$275*\$E\$3-\$E\$58)*K198	
320	Ячейка M276	=СУММ(F276:K276)	
321	Ячейка M280	=СУММ(M276:M280)	
322	Ячейка F282	=СУММ(F276:F280)	
323	Ячейка L282	=СУММ(F282:K282)	
324	Ячейка M282	=СУММ(F276:K280)	
325	Последовательные расчеты по таблице наращивания компонентов значений выборочной исправленной ковариации		
326	Ячейка F288	=F276	
327	Ячейка K288	=J288+K276	
328	Ячейка F292	=K291+F280	
329	Ячейка K292	=J292+K280	
330	Ячейка M288	=K288	
331	Ячейка M293	=M292	
332	Ячейка F294	=F292	
333	Ячейка L294	=K294	
334	Ячейка M294	=K292	
335	Итоговые расчеты по таблицам компонентов значений выборочной исправленной ковариации		
336	Ячейка E295	=M294	
337	Ячейка E296	=E295/C3	
338	Ячейка E297	=E296/(C3*(C3-1))	
339	Расчет выборочной исправленной ковариации через выборочные средние		
340	Ячейка C301	=(C3/(C3-1))*(C232-C60*E60)	
341	Расчет выборочного исправленного коэффициента корреляции Пирсона		
342	Ячейка C304	=C298/(C160*E160)	
343	Применение функций редактора Excel для выборочной исправленной ковариации		
344	Ячейка C298	=СУММПРОИЗВ((C6:C28-C60);(E6:E28-E60))/(C3-1)	
345	Ячейка E298	=СУММПРОИЗВ(МУМНОЖ(E194:E198-C60;F193:K193-E60);F194:K198)/(C3-1)	
346	Ячейка C299	=МУМНОЖ(ТРАНСП(C6:C28-C60);E6:E28-E60)/(C3-1)	
347	Ячейка C300	=КОВАРИАЦИЯ.В(C6:C28;E6:E28)	
348	Применение функций редактора Excel для выборочной исправленной ковариации через выборочные средние		
349	Ячейка C302	=(C3/(C3-1))*(СУММПРОИЗВ(C6:C28;E6:E28)/C3-СРЗНАЧ(C6:C28)*СРЗНАЧ(E6:E28))	
350	Применение функций редактора Excel для выборочного исправленного коэффициента корреляции Пирсона		
351	Ячейка C305	=КОРРЕЛ(C6:C28;E6:E28)	
352	Интерпретация выборочной исправленной ковариации (Определение характера связи)		
353	Ячейка C303	=ЕСЛИ(C297<0;"Обратная";ЕСЛИ(C297=0;"Отсутствует"; ЕСЛИ(C297>0;"Прямая";0)))	
354	Интерпретация выборочной исправленной ковариации (Определение силы связи)		
355	Ячейка C306	=ЕСЛИ(ABS(C304)=0;"Отсутствует"; ЕСЛИ(И(ABS(C304)>0;ABS(C304)<=0,3);"Слабая"; ЕСЛИ(И(ABS(C304)>0,3;ABS(C304)<0,7);"Средняя";ЕСЛИ(И(ABS(C304)>=0,7;ABS(C304)<1);"Сильная"; ЕСЛИ(ABS(C304)=1;"Строгая";0))))))	

Рис. 6. Используемые формулы и функции редактора Microsoft Excel с целью определения и интерпретации значений выборочных исправленных ковариации и коэффициента корреляции Пирсона для совокупности из двух выборок данных

Верификация итоговых значений выборочных исправленных ковариации и коэффициента корреляции Пирсона может быть выполнена не только с помощью отдельных функций КОВАР и КОРРЕЛ, но и с использованием встроенных инструментов анализа данных «Ковариация» и «Корреляция», которые автоматически формируют ковариационную и корреляционную матрицы для двумерной совокупности исследуемых одномерных выборок данных, что позволяет студенту сопоставить полученные вручную значения с результатами автоматизированного расчёта и убедиться в их идентичности. На рис. 7 представлены результаты применения указанных инструментов для рассматриваемых двумерной и соответствующих одномерных выборок данных.

	N	O	P	Q	X	Y	Z
4							
5		Выборка 1	Выборка 2		Ковариационная матрица (Excel)		
6		51	35				
7		43	43			<i>Выборка 1</i>	<i>Выборка 2</i>
8		59	43		Выборка 1	47,28922495	
9		51	41		Выборка 2	10,96597353	54,94517958
10		51	41				
11		38	43		Ковариационная матрица (Выборочная)		
12		54	58				
13		43	43			<i>Выборка 1</i>	<i>Выборка 2</i>
14		51	41		Выборка 1	49,43873518	11,46442688
15		38	41		Выборка 2	11,46442688	57,44268775
16		51	43				
17		43	35		Корреляционная матрица (Excel)		
18		38	51				
19		38	35			<i>Выборка 1</i>	<i>Выборка 2</i>
20		43	55		Выборка 1	1	0,215130158
21		54	51		Выборка 2	0,215130158	1
22		51	51				
23		59	55				
24		54	35				
25		51	51				
26		54	43				
27		59	55				
28		43	58				

Рис. 7. Результаты применения инструментов анализа данных «Ковариация» и «Корреляция» редактора Microsoft Excel для совокупности исследуемых выборок данных

Методические аспекты преодоления типичных ошибок студентов при освоении корреляционного анализа в цифровой среде

В практике преподавания статистических методов с применением цифровых инструментов можно выделить несколько групп устойчивых ошибок, обусловленных разрывом между математической формализацией и практической реализацией в редакторе электронных таблиц Microsoft Excel.

Ошибки идентификации расчётных параметров. Студенты часто смешивают выборочные и генеральные дисперсии, ковариации и корреляции, не осознавая, что в рассматриваемом в статье редакторе Microsoft Excel по умолчанию применяются несмещённые (выборочные) оценки, а встроенные функции ДИСП и КОВАР реализуют именно их. Предложенный в статье аналитический уровень (вывод формул с акцентом на поправку $n - 1$) позволяет снять эту проблему до этапа работы в рамках данного цифрового инструмента.

Ошибки «слепого доверия» к автоматическим расчётам. Получение итогового коэффициента корреляции через функцию КОРРЕЛ без понимания промежуточных этапов (вычисление выборочных средних, отклонений, ковариации) формирует формальное знание.

Числовой итеративный уровень методики (пошаговое накопление сумм в столбцах) эмулирует циклический вычислительный процесс и принудительно «проявляет» для студента все элементы формулы выборочного коэффициента корреляции Пирсона, делая алгоритм прозрачным.

Ошибки интерпретации знака и силы связи. Наиболее критичная группа: студенты правильно вычисляют $r(X_1, X_2) \approx 0,68$, но затрудняются с ответом на вопросы «Что это значит для исследуемого процесса?», «Почему связь средней силы, а не сильная?». Агрегированный уровень (верификация через «Описательную статистику», «Ковариацию» и «Корреляцию») и последующее сопоставление с таблицей интерпретации позволяют преодолеть этот разрыв. Студент учится видеть связь между числовым значением, его знаком, величиной и содержательным смыслом задачи.

Ошибки при работе со сгруппированными данными. Переход от исходных выборок к вариационным рядам с частотами требует понимания взвешенных оценок. Демонстрация в статье идентичности расчётов для исходных и сгруппированных данных служит дидактическим приёмом, показывающим инвариантность алгоритмов.

Для проверки правильности ручных итеративных расчётов студентам предлагается сопоставить полученные значения с результатами работы встроенных в редактор электронных таблиц Microsoft Excel функций. Использование встроенных функций КОВАР и КОРРЕЛ на агрегированном уровне методики позволяет студенту осуществить верификацию полученных ранее значений и убедиться в корректности выполненных расчётов.

Предложенная трёхуровневая структура методики (аналитический → числовой итеративный → агрегированный) имеет глубокое педагогическое обоснование и коррелирует с психологическими этапами усвоения знаний. Аналитический уровень, на котором осуществляется вывод формул и доказательство свойств, соответствует этапу «знание — понимание» (по таксономии Блума) и формирует у студентов теоретическую базу. Числовой итеративный уровень, предполагающий пошаговое накопление сумм в электронной таблице, реализует этапы «применение – анализ»: студент не просто запоминает формулу, а осваивает алгоритм через практическое действие, «проживая» каждый шаг вычислений. Агрегированный уровень, на котором происходит верификация результатов с помощью встроенных функций и инструментов анализа данных, выводит студента на этап «синтез — оценка»: он учится сопоставлять результаты, делать выводы об их достоверности и интерпретировать полученные значения в контексте исследовательской задачи. Такое проектирование учебного процесса позволяет последовательно формировать у студентов как предметные (математико-статистические), так и метапредметные (информационные, алгоритмические, рефлексивные) компетенции, что соответствует требованиям компетентностно-ориентированного образования и задачам цифровой трансформации обучения.

Заключение

В рамках данной статьи на примере реализации корреляционного анализа для совокупности двух одномерных массивов данных в наглядном виде на основе математического и информационного моделирования продемонстрирован разработанный автором трёхуровневый интеграционный подход к обучению студентов вузов механизмам выполнения статистических расчетов на примере рассмотрения двумерной выборки данных с точки зрения ее рассмотрения через призму совокупности соответствующих одномерных выборок данных с применением редактора электронных таблиц Microsoft Excel на следующих уровнях: аналитическом (непосредственный вывод формул для отдельно взятых расчетных параметров), числовой итеративный (поэтапные вычисления значения расчетных параметров в редакторе Microsoft Excel без использования встроенных функций) и агрегированный (автоматизированное получение результатов в виде значений расчетных параметров с применением встроенных функций).

По итогу представленный в статье интегративный по своей сути методический подход позволяет студенту, во-первых, полноценно и комплексно понять природу каждого применяемого при реализации расчетов статистического показателя, во-вторых, освоить принципы итеративных вычислений, направленных на поэтапную реализацию агрегатных функций, важность которых определяется с точки зрения изучения базовых алгоритмических конструкций в программировании, в-третьих, научиться верифицировать результаты выполняемых расчетов с точки зрения комплексной оценки (ручной расчёт = функция = аналитика), и, в-четвертых, избежать типовых ошибок при работе с одномерными и двумерными массивами данных (смещение дисперсий, неверная минимизация, работа со сгруппированными данными).

Представленный дидактический материал позволяет студенту научиться корректно проводить комплексный анализ возможных причинно-следственных связей между исходными данными и получаемыми статистическими параметрами на основе итеративного подхода применительно к реализации корреляционного анализа совокупности из двух одномерных выборок данных, рассматриваемых в рамках двумерной выборки данных, с точки зрения исследования исходного конечного множества изначально взятых из генеральной совокупности исследуемых объектов в рамках рассматриваемой предметной области исследования.

Практическая значимость представленного в статье исследования состоит в том, что предложенные автором материалы могут быть непосредственно использованы при проведении лабораторных работ по курсам «Статистика», «Информационные технологии в профессиональной деятельности», «Математические методы обработки данных», «Анализ данных».

Разработанная трёхуровневая методика может служить основой для проектирования учебных занятий по статистическим дисциплинам в условиях цифровой трансформации образования.

Список литературы

- Анализ данных: учебник для вузов / под редакцией В. С. Мхитаряна. М.: Издательство Юрайт, 2025. (Высшее образование). Текст: электронный. Образовательная платформа Юрайт [сайт]. URL: <https://urait.ru/bcode/560311> (дата обращения: 18.03.2026).
- Богун В.В. Анализ данных с применением Microsoft Excel: Учебное пособие. М.: Прометей, 2026.
- Богун В.В. Формирование профессиональных компетенций студентов вузов в области анализа одномерных данных с применением редактора электронных таблиц Microsoft Excel // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 2 (42). С. 45–71. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-45-71
- Быкова А.С. Принципы развития инфокоммуникативных умений в проектной деятельности студентов / А. С. Быкова // Вестник Оренбургского государственного университета, 2024. № 3 (243). С. 11–16.
- Дворяткина С.Н., Трофимец Е.Н. Практика преподавания высшей математики в вузах МЧС России в условиях цифровой трансформации образования // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2023. № 4 (32). С. 55–67. DOI: 10.24888/2500-1957-2023-4-55-67
- Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика как фундамент новой комплексной прикладной дисциплины «Анализ данных» // Современная математика и концепции инновационного математического образования. 2019. Т. 6. №. 1. С. 333–337.
- Ломовской Р.А. Статистический анализ данных: методы и приложения в научных исследованиях // Актуальные исследования. 2023. № 15-1(145). С. 29–34.

- Христидис Т.В., Новашина М.С. Методы математической статистики в педагогических исследованиях: теория и практика применения // Вестник МГУКИ. 2023. №2 (112). С. 111–122.
- Шитакова О.Ю., Гуськов А.Ю., Горбачева Н.Е., Орлов Р.В., Сидорина Т.В. Математическая статистика в исследовании: педагогический аспект // Современное педагогическое образование. 2025. Т. 15. №2. С. 324–334. DOI: 10.20913/2618-7515-2025-2-14
- Щукина Н.В., Харитонов Н.Д. Изучение дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» с использованием дистанционных образовательных технологий // Вестник Сибирского института бизнеса и информационных технологий. 2023. Т. 12. № 4. С. 51–57. DOI: 10.24412/2225-8264-2023-4-51-57

Информация об авторе

Богун Виталий Викторович; кандидат педагогических наук; доцент; доцент кафедры математического анализа, теории и методики обучения математике; ФГБОУ ВО «Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д. Ушинского» (Российская Федерация, 150000, г. Ярославль, ул. Республиканская, д. 108/1); Финансовый университет при Правительстве Российской Федерации, Ярославский филиал (Российская Федерация, 150003, г. Ярославль, ул. Кооперативная, д. 12А.); Международный университет бизнеса и новых технологий (МУБиНТ) (Российская федерация, 150003, г. Ярославль, ул. Советская, д. 80); E-mail: vvital@mail.ru; ORCID: 0009-0003-6274-5104

USING STATISTICAL ANALYSIS OF TWO-DIMENSIONAL DATA TO DEVELOP UNIVERSITY STUDENTS' PROFESSIONAL COMPETENCIES BASED ON THE USE OF MICROSOFT EXCEL SPREADSHEET EDITOR

Bogun V. V.
Ph. D. (Pedagogy),
Associate Professor

Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky;
Financial University under the Government of the Russian Federation, Yaroslavl branch;
International University of Business and New Technologies (MUBiNT), Yaroslavl

Abstract. As part of the educational process at the university, one of the key components is the completion of computational projects by students in academic disciplines. This project addresses the statistical analysis of multidimensional numerical data arrays in general and two-dimensional numerical data arrays in particular, with the goal of identifying possible relationships between the corresponding one-dimensional data arrays. From a mathematical perspective, performing the necessary calculations involves integrating work with mathematical objects considered in the study of university mathematics. This article clearly presents the relevant aspects of mathematical and information modeling when studying a set of values of two features or attributes of a finite set of objects in the form of generated one-dimensional data arrays, reflecting the sequential transitions from the initial data to the calculation results. In this article, we explore the use of information and communication technologies to automate the necessary statistical calculations performed on two-dimensional data arrays generated from sets of two one-dimensional data arrays. We demonstrate various aspects of using Microsoft Excel

spreadsheet software to visually display the values of initial data parameters, as well as intermediate and final calculation results. We also highlight the key components of a comprehensive matrix representation of the corresponding final calculation components through the lens of identifying the necessary aspects of a possible relationship between one-dimensional data arrays during a correlation analysis, determining the nature and strength of the relationship between two studied features or attributes of a finite set of objects. This digital tool helps university students develop a comprehensive, integrated theoretical and practical foundation of mathematical and information competencies through the lens of conducting a detailed correlation analysis of a set of two one-dimensional data arrays.

Keywords: project activities of university students, multivariate data analysis, methods of mathematical statistics, information and communication technologies, Microsoft Excel spreadsheet editor

For citation: Bogun V. V. (2026). Using Statistical Analysis of Two-dimensional DATA to Develop University Students' Professional Competencies Based on the Use of Microsoft Excel Spreadsheet Editor. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 3 (43), 72–95. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-72-95

Copyright: © V. V. Bogun (2026). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License.

References

- Analiz dannyh: uchebnik dlya vuzov* (2025). Pod redakciej V. S. Mhitaryana. Moscow: Izdatel'stvo Yurajt. (Vysshee obrazovanie). Tekst: ehlektronnyj. Obrazovatel'naya platforma Yurajt [sajt]. URL: <https://urait.ru/bcode/560311> (data obrashcheniya: 18.03.2026). (In Russ).
- Bogun, V. V. (2026). *Analiz dannyh s primeneniem Microsoft Excel: Uchebnoe posobie*. Moscow: Prometej. (In Russ).
- Bogun, V. V. (2026). Formation of Professional Competencies of University Students in the Field of One-dimensional Data Analysis Using the Microsoft Excel Spreadsheet Editor. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 2 (42), 45–71. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-2-45-71 (In Russ., abstract in Eng.)
- Bykova A. S. (2024). Principy razvitiya infokommunikativnyh umenij v proektnoj deyatel'nosti studentov. *Vestnik Orenburgskogo gosudarstvennogo universiteta*, 3 (243). – 11-16. (In Russ., abstract in Eng.)
- Dvoryatkina, S. N., Trofimets, E. N. (2023). The Practice of Teaching Higher Mathematics in Universities of the Ministry of Emergency Situations of Russia in the Context of Digital Transformation of Education. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 4(32), 55-67. DOI: 10.24888/2500-1957-2023-4-55-67 (In Russ., abstract in Eng.)
- Kremer, N. Sh. (2019). Probability Theory and Mathematical Statistics as the Foundation of a New Complex Applied Discipline "Data Analysis". *Sovremennaya matematika i koncepcii innovacionnogo matematicheskogo obrazovaniya*, 6(1), 333-337. (In Russ., abstract in Eng.)
- Lomovskoj, R.A. (2023). Statisticheskij analiz dannyh: metody i prilozheniya v nauchnyh issledovaniyah. *Aktual'nye issledovaniya*, 15-1(145). 29-34. (In Russ., abstract in Eng.)
- Hristidis, T. V. Novashina, M. S. (2023). Metody matematicheskoy statistiki v pedagogicheskikh issledovaniyah: teoriya i praktika primeneniya. *Vestnik MGUKI*, 2 (112), 111-122. (In Russ., abstract in Eng.)
- Shchukina, N. V. Haritonova, N. D. (2023). Studying the Discipline “Probability Theory and Mathematical Statistics” Using Distance Educational Technologies. *Vestnik Sibirskogo*

instituta biznesa i informacionnyh tehnologij, 12(4), 51-57. DOI: 10.24412/2225-8264-2023-4-51-57 (In Russ., abstract in Eng.)

Shitakova, O. Yu., Guskov, A. Yu., Gorbacheva, N. E., Orlov, R. V., Sidorina, T. V. (2025). Mathematical statistics in research: pedagogical aspect. *Professional education in the modern world*, 15(2), 324-334. DOI: 10.20913/2618-7515-2025-2-14 (In Russ., abstract in Eng.)

Information about the author

Vitaly V. Bogun; Candidate of Pedagogical Sciences; Associate Professor; Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Theory and Methods of Teaching Mathematics; Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Yaroslavl State Pedagogical University named after K.D. Ushinsky" (Russian Federation, 150000, Yaroslavl, Respublikanskaya St., 108/1); Financial University under the Government of the Russian Federation, Yaroslavl Branch (12A Kooperativnaya Street, Yaroslavl, 150003, Russian Federation); International University of Business and New Technologies (MUBiNT) (80 Sovetskaya Street, Yaroslavl, 150003, Russian Federation); E-mail: vvvital@mail.ru; ORCID: 0009-0003-6274-5104

Статья поступила в редакцию 03.08.2026

Принята к публикации 24.08.2026

Статья опубликована 18.09.2026

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-3-96-106

УДК
372.851

**ПОВЫШЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ОНЛАЙН-ВЗАИМНОЙ
МЕЖКУЛЬТУРНОЙ ПОДГОТОВКИ ПО МАТЕМАТИКЕ:
ПРЕДЛОЖЕНИЯ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ**

**Синамбела Пардомуан Наули Джосип
Марио**
Аспирант; Преподаватель

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России
Б. Н. Ельцина;
Государственный университет Медана,
Индонезия

Аннотация. Данное исследование посвящено анализу предложений будущих учителей математики по развитию онлайн-взаимной межкультурной учебной деятельности. В работе использованы письменные отзывы студентов с целью выявления педагогических аспектов, требующих усиленного внимания при проектировании подобных образовательных сред. Методология исследования базировалась на качественном описательном подходе, включающем обработку данных, полученных из ответов на открытые вопросы анкеты, представленных 68 студентами, проходящими подготовку по программе «Обучение математике» в Государственном университете Медана, Индонезия. Аналитика данных осуществлялась через первичное кодирование, организацию в теоретические категории и количественную характеристику по частотам и долям. Важным новшеством работы считается использование предложений студентов как базы для формирования педагогического подхода к улучшению онлайн-взаимной межкультурной математики, а не ограничение исследования прикладными результатами или теоретическими дискуссиями. В результате выявлены шесть взаимосвязанных направления рекомендаций: аутентичные межкультурные математические примеры и контексты из различных культур; структурированное межкультурное взаимодействие и сотрудничество; языковая поддержка и математические знаковые системы; интерактивные и мультимодальные средства обучения; роль преподавателя и его педагогическая активность; рефлексия и расширение глобальных перспектив. Среди них выделяются наиболее актуальные категории: аутентичные межкультурные математические контексты и примеры из различных культур (82,4% участников); организованное межкультурное взаимодействие и сотрудничество (85,0%); а также мультимедийные средства с интерактивными возможностями (66,2%). Подводя итог, можно отметить, что повышение эффективности онлайн-взаимной межкультурной математической подготовки предполагает создание интегрированной педагогической модели, в рамках которой математические идеи рассматриваются через межкультурные перспективы, активируют взаимодействие и диалог, подкрепляются четким языковым и знаковым оформлением, реализуются посредством интерактивных ресурсов, управляются посредством активной педагогической поддержки и дополняются через процессы рефлексии.

Ключевые слова: онлайн-взаимная межкультурная математика; будущие учителя математики; качественное описательное исследование; межкультурное преподавание математики с учетом культурных особенностей; межкультурное

обучение; предложения студентов

Для цитирования: Синамбела П.Н.Дж.М. Повышение Эффективности Онлайн-Взаимной Межкультурной Подготовки по Математике: Предложения Будущих Учителей Математики // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 3 (43). С. 96–106. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-96-106

Права: © Синамбела П. Н. Дж.М. (2026). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И.А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

Introduction

In today's increasingly digital and interconnected higher education environment, learning is no longer confined to mastering subject specific knowledge. Its also involves understanding local, global, and intercultural issues, valuing others' perspectives, and engaging openly, appropriately, and effectively with people from different cultural backgrounds (Sinambela & Savelyeva, 2026). The OECD identifies these abilities as central to global competence, while UNESCO emphasizes that intercultural competence involves navigating diversity, ambiguity, and difference with respect, openness, empathy, and flexibility. In Deardorff's framework, intercultural competence is a developmental process that begins with foundational attitudes such as respect, openness, and curiosity and culminates in the ability to communicate and act effectively and appropriately in intercultural contexts (Deardorff, 2019). For pre-service mathematics teachers (PMTs), this means that academic preparedness in the digital era cannot be separated from the capacity to learn, communicate, and collaborate within increasingly intercultural environments (Deardorff, 2006; OECD, 2019; UNESCO, 2013).

This issue is especially important in mathematics education because mathematics cannot be viewed as knowledge that exists entirely apart from social and cultural contexts. From the perspective of ethnomathematics, mathematical activity is always connected to the history, practices, symbols, and ways of life of particular communities. In this sense, culture is not simply a background illustration for mathematics, but medium through which mathematical meaning is formed and understood (D'Ambrosio, 1985). In line with this view, culturally responsive mathematics teaching has emerged as an essential framework for making mathematics learning more meaningful for students from diverse cultural and linguistic backgrounds (Sinambela & Savelyeva, 2026). The synthesis by (Abdulrahim & Orosco, 2020) shows that culturally responsive mathematics instruction requires attention to contextual relevance, student diversity, and inclusive pedagogical approaches. Likewise, (Bonner & Adams, 2012) argue that such teaching depends on understanding students and their contexts, maintaining effective communication, building trusting relationships, and continuously reflecting on and refining pedagogy. This suggests that the quality of mathematics learning depends not only on conceptual precision but also on how well instructional design connects mathematical ideas to authentic and meaningful cultural contexts (Abdulrahim & Orosco, 2020; Bonner & Adams, 2012; D'Ambrosio, 1985).

The growth of online learning has created new opportunities to connect mathematics education with intercultural experiences. Through virtual environments, students can interact, exchange ideas, and compare ways of thinking with others from different cultural backgrounds without relying entirely on physical mobility. However, the educational value of these virtual spaces does not arise automatically. The community of inquiry framework explains that meaningful online learning is shaped by the interaction of social presence, cognitive presence, and teaching presence (Garrison et al., 1999). In teacher education, the review by (Romijn et al., 2021) further indicates that intercultural competence develops more effectively when learning is situated in context, supported by guided reflection, and includes opportunities for enactment or practical application. Therefore, online intercultural learning should not be understood merely as transferring

interaction into digital formats, but as a pedagogical design that intentionally organizes interaction, meaning making, support, and reflection (Garrison et al., 1999; Romijn et al., 2021).

In mathematics learning, this complexity becomes even more visible. Intercultural interaction in mathematics involves not only differences in social experience, but also differences in academic language, symbols, representations, ways of expressing mathematical reasoning, and approaches to linking abstract concepts with concrete cultural contexts. UNESCO stresses the importance of sociolinguistic awareness, the ability to make implicit assumptions explicit, and sensitivity to multilingualism in intercultural communication (UNESCO, 2013). Within mathematics education, these needs directly affect how students understand terminology, interpret notation, build arguments, and make sense of problem-solving strategies. At the same time, culturally responsive mathematics teaching also requires clear communication, supportive learning relationships, and sustained pedagogical reflection (Bonner & Adams, 2012; UNESCO, 2013). Thus, online intercultural mathematics learning cannot simply rely on digital platforms. This process also requires a realistic cultural context, adequate language support and representation, interactive media, a strong role for lecturers in facilitating learning, and a space for reflection that allows students to productively understand differing perspectives (Bonner & Adams, 2012; UNESCO, 2013).

Despite growing attention to intercultural learning, online learning, and culturally responsive mathematics teaching, the existing literature tends to focus on conceptual frameworks, practice syntheses, or general competency development. These studies have not often considered student feedback as a primary basis for improving instructional design. However, research on student voice in higher education has shown that student perspectives can reveal gaps between lecturers' assumptions and their actual learning experiences, providing crucial input for curriculum and instructional development (Brooman et al., 2015). In this context, the perspectives of PMTs are crucial, as they are not only involved as learners but also begin to develop professional sensitivity to pedagogical aspects that need strengthening. The novelty of this study lies in its attempt to ground suggestions from PMTs in an analytical framework for formulating improvements in online intercultural mathematics instruction, rather than simply evaluating learning outcomes or rehashing existing conceptual frameworks. Thus, this study not only describes students' experiences but also positions their responses as a source of pedagogical knowledge for improving instructional design. Therefore, this study aims to describe PMTs suggestions for improving online intercultural mathematics teaching. Specifically, this study answers the following question: What suggestions do PMTs offer to improve online intercultural mathematics learning?

Research Method

This research uses a descriptive qualitative approach (Barada, 2013), to examine PMTs' suggestions for improving online intercultural mathematics learning. To systematically understand the research procedures and data analysis, this research flow is summarized in Figure 1.

As shown in Figure 1, this study involved 68 PMTs. Data was collected through a post-learning questionnaire with 5 open-ended questions. After all data was collected, the researcher began the familiarization phase by repeatedly reading all responses to gain a comprehensive understanding of the data.

The next stage was initial open coding, the process of assigning codes to units of meaning that included respondents' suggestions, needs, evaluations, and input on online intercultural mathematics learning. Similar codes were then grouped into final categories:

- Context and examples of authentic cross-cultural mathematics,
- Structured cross-cultural interaction and collaboration,
- Language support and mathematical representation,
- Interactive and multimodal media,
- Lecturer facilitation or teaching presence, and
- Reflection and global perspective.

After the final categories were established, the researcher calculated the number of respondents and the percentages in each category as descriptive support for the most dominant

suggestions. The next stage is analytical review, which involves reviewing the relationships between quotes, codes, categories, and themes to ensure interpretations align with the raw data. Through this series of stages, the analysis yields key themes and interpretations of the results, which serve as the basis for formulating implications and recommendations for improving online intercultural mathematics learning.

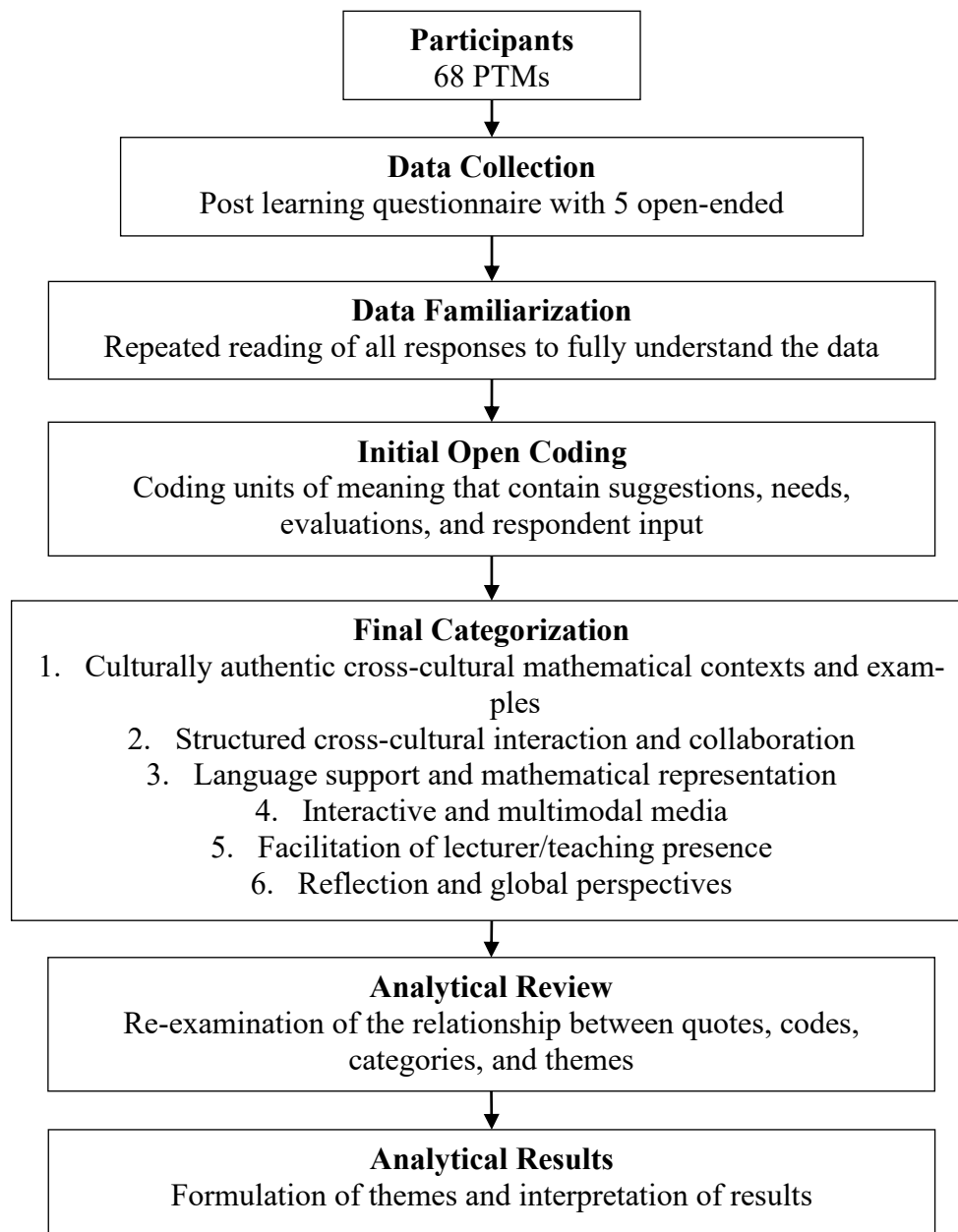


Fig. 1. Qualitative research and data analysis procedures

Results

Based on the qualitative analysis, this study yielded six final categories representing PMTs suggestions for improving online intercultural mathematics learning:

- Culturally authentic cross-cultural mathematical contexts and examples
- structured cross-cultural interaction and collaboration
- language support and mathematical representation
- interactive and multimodal media
- lecturer facilitation or teaching presence, and

- reflection and global perspective.

Although all five open-ended questions were read to understand the context of respondents' experiences, the calculation of the number of respondents and the percentage of suggestion categories focused on responses that directly included suggestions for improvement, namely answers to questions about aspects of learning that need improvement and suggestions for developing learning because each respondent could provide more than one suggestion, a single response could be assigned to more than one category.

Table 1.
PMTs' suggestion categories for enhancing online intercultural mathematics learning

Final category	Number of respondents	Percentage
Culturally authentic cross-cultural mathematical contexts and examples	56	82.4%
Structured cross-cultural interaction and collaboration	51	75.0%
Language support and mathematical representation	17	25.0%
Interactive and multimodal media	45	66.2%
Lecturer facilitation or teaching presence	19	27.9%
Reflection and global perspective	30	44.1%

The percentage in Table 1 is calculated based on 68 valid respondents. A single respondent may fall into more than one category, so the total percentages do not add up to 100%. Empirically, the most frequently occurring categories was Culturally authentic cross-cultural mathematical contexts and examples, followed by Structured cross-cultural interaction and collaboration, and interactive and multimodal media. However, the categories of findings in this section are presented in conceptual order to facilitate a more systematic interpretation.

Across the responses, the most prominent categories were culturally authentic mathematical contexts and examples from different cultures, followed by structures intercultural interaction and collaboration, and interactive and multimodal media. Even so, the categories in the presentation below are arranged conceptually to make the overall pattern of findings easier to follow systematically.

1. Culturally authentic mathematical contexts and examples across cultures

This was the strongest category, appearing in the responses of 56 out of 68 respondents (82.4%). Most respondents called for a greater use of examples, illustrations, artifacts, patterns, and cultural practices from diverse backgrounds to make mathematical concepts more concrete and relatable.

The prominence of this category shows that respondents did not support an approach to learning that stays limited to formulas and procedures. Instead, they stressed the importance of presenting mathematics through cultural contexts that students can recognize, compare, and interpret meaningfully. In this sense, cultural context was seen as a central way of clarifying mathematical ideas rather than as a purely decorative element.

2. Structures intercultural interaction and collaboration

This category appeared in the responses of 51 respondents (75.0%). Suggestions in this area highlighted the importance of active discussion, group work, strategy sharing, and collaborative projects that would allow students to engage more deeply with different cultural perspectives.

These responses suggest that participants viewed online intercultural mathematics learning as a process that should be designed dialogically. What they wanted was not simply more interaction, but interaction that was more carefully structured, so that comparing strategies, negotiating meaning, and exchanging mathematical ways of thinking could happen productively.

3. Language support and mathematical representations

This category was identified among 17 respondents (25.0%). Participants recommended clearer, simpler explanations, bilingual or multilingual support, and more explicit guidance on understanding the terms, symbols, and mathematical representations used in cross-cultural learning settings.

Although this category appeared less frequently than others, it is still important. The responses suggest that challenges in intercultural learning are not limited to cultural context but also involve how mathematical ideas are communicated. Language support and representational clarity were therefore seen as important for helping students interpret concepts, follow explanations, and express their mathematical reasoning more accurately.

4. Interactive and multimodal media

This category appeared in 45 respondents' responses (66.2%). Participants suggested using videos, visual, simulations, and more interactive digital platforms to help connect mathematical concepts with cultural contexts.

This finding indicates that learning media were seen as more than just tools for delivering content. Instead, respondents viewed interactive and multimodal media as resources that can bridge abstract concepts and more concrete forms of representation, making the relationship between symbols, ideas, and cultural contexts easier to understand.

5. Lecturer facilitation or teaching presence

This category was identified among 19 respondents (27.9%). Suggestions in this category emphasized the need for clearer guidance, more consistent support during discussions, more structured explanations, and stronger lecturer involvement in helping students work through different perspectives during the learning process.

This finding shows that respondents did not see online intercultural learning as something that could be left entirely to peer interaction. On the contrary, lecturer presence was still considered essential for keeping learning on track, clarifying its goals, and supporting deeper conceptual understanding.

6. Reflection and global perspectives

The final category appeared in 30 responses (44.1%). Participants suggested that the learning process should offer more opportunities to reflect on the relationships among mathematics, culture, and broader contexts.

This finding suggests that respondents did not only want learning experiences enriched by examples and interaction but also wanted opportunities to make sense of those experiences. Reflection was therefore seen as important for helping students understand how cultural perspectives shape how mathematics is interpreted, while also broadening their awareness of the role of mathematics in social and cultural life.

Discussion

Taken together, the findings suggest that PMTs did not view the enhancement of online intercultural mathematics learning as a matter of adding isolated cultural examples to an otherwise conventional lesson structure. Rather, the coding pattern points to broader expectations of pedagogical redesign in which cultural context, interaction, representation, facilitation, and reflection work in combination. The prominence of the first three empirically strongest categories culturally authentic mathematical contexts and examples across cultures, structured intercultural interaction and collaboration, and interactive and multimodal media indicates that respondents were primarily concerned with how mathematical meaning is constructed, communicated, and negotiated in online intercultural settings, rather than with content coverage alone. This pattern suggests that students' suggestions were oriented towards making mathematical ideas more meaningful, accessible, and dialogically engaging across cultural contexts (D'Ambrosio, 1985; Fouze & Amit, 2023).

The strongest emphasis on culturally authentic mathematical contexts and examples across cultures is especially significant. This finding implies that respondents did not regard culture as a superficial supplement to mathematics instruction, but as an important means of making concepts

interpretable and educationally meaningful. Such a pattern is consistent with ethnomathematical perspectives, which argue that mathematical activity is embedded in cultural practices and that mathematics education should recognize how mathematical ideas emerge through historically and culturally situated forms of knowing. It also aligns with research on culturally responsive mathematics teaching, which shows that meaningful mathematics learning depends not only on conceptual accuracy but also on pedagogical approaches that connect mathematical ideas to learners' cultural and linguistic worlds. From these perspectives, the respondents' calls for more culturally grounded examples can be interpreted as a demand for epistemic relevance: they wanted mathematics to be presented in ways that reveal where and how it lives in diverse cultural settings (D'Ambrasio, 1985; Kabuye Batiibwe, 2024; Sinambela & Savelyeva, 2026).

The second dominant category, structured intercultural interaction and collaboration, further suggests that respondents understood online intercultural mathematics learning as dialogic rather than transmissive process. Their emphasis on active discussion, group work, and collaborative exchange indicates that cultural diversity becomes educationally productive when learners are given structured opportunities to compare strategies, explain reasoning, and negotiate mathematical meaning with others. This interpretation resonates with the community of inquiry framework, which conceptualizes meaningful online learning as the product of an interplay among social presence, cognitive presence, and teaching presence. In this light, the respondents' suggestions imply that intercultural mathematics learning is strengthened not merely by placing students in a shared online space, but by designing tasks and interactions that enable collaborative inquiry. The result is especially important because it shows that students did not simply ask for more participation in general terms. They asked for forms of participation that could deepen mathematical understanding through structured intercultural exchange (Garrison et al., 1999).

Although language support and mathematical representations appeared less frequently than some other categories, their analytical significance should not be underestimated. The respondents' references to simpler explanations, multilingual support, and clearer handling of symbols and representations indicate that intercultural challenges in mathematics learning are also semiotic and linguistic in nature. In other words, difficulties may arise not only from unfamiliar cultural references but also from the ways mathematical ideas are encoded, explained, and interpreted. This finding is consistent with UNESCO's emphasis on sociolinguistic awareness in intercultural communication and with guidance on scaffolding multilingual students' learning in mathematics, which stresses the importance of supporting learners through coordinated use of language, symbols, visuals, and other representational resources. The respondents' suggestions, therefore, point to an important pedagogical insight. Online intercultural mathematics learning requires not only cultural openness, but also explicit support for meaning making linguistic and representational differences across (UNESCO, 2013; Sinambela & Savelyeva, 2026).

The strong presence of interactive and multimodal media in the findings reinforces this interpretation. Respondents did not appear to view digital media as neutral delivery tools. Instead, they positioned them as pedagogical mediators capable of bridging mathematical abstraction and cultural concreteness. Videos, visuals, simulations, and other interactive resources helped students see more clearly the connections among concepts, symbols, and cultural practices. This finding aligns with scholarships showing that online learning becomes more educationally meaningful when educators use the medium to support inquiry, collaboration, and representational access rather than merely transmitting information. Within the present study, the coding pattern suggests that respondents saw multimodality as a means of improving conceptual access in culturally diverse learning environments. In this sense, media use was pedagogical rather than technical (Garrison et al., 1999).

The remaining two categories, i.e., lecturer facilitation or teaching presence and reflection and global perspectives, clarify that respondents did not equate student-centered intercultural learning with the absence of instructional guidance. On the contrary, their suggestions indicate that they still regarded the lecturer as essential for framing tasks, sustaining discussion, clarifying expectations, and helping students navigate differing perspectives. This is consistent with work on

culturally responsive mathematics teaching, which identifies communication, trust, contextual knowledge, and ongoing reflection as central pedagogical cornerstones, as well as with the community of inquiry model, in which teaching presence is integral to the quality of online educational experience. At the same time, the category of reflection and global perspectives suggests that respondents wanted opportunities not only to participate in intercultural encounters, but also to interpret them. This point aligns with review evidence indicating that guided reflection and enactment are important facilitators of intercultural competence development in teacher education. Thus, the two categories together suggest that online intercultural mathematics learning should be designed not only for exposure and participation, but also for guided interpretation and professional meaning making (Bonner & Adams, 2012).

A further point of significance lies in the methodological pattern emerging from the coding itself. The six final categories are analytically distinct, yet the findings show that they are pedagogically interdependent. Respondents who called for more culturally authentic examples often also called for richer interaction or more interactive media, suggesting that these were not perceived as separate improvements but as mutually reinforcing elements of a more coherent learning design. Read in this way, the results do not support a fragmented approach in which culture, technology, language, and facilitation are treated as isolated components. Instead, they point towards an integrated model of online intercultural mathematics learning in which authentic contexts provide meaning, interaction enables negotiation, language and representation support comprehension, multimodal media enhance access, lecturer facilitation sustains direction, and reflection supports deeper intercultural understanding. This reading also strengthens the study's contribution to student voice literature. Rather than offering incidental feedback, the respondents articulated a relatively coherent pedagogical agenda for improving the design of online intercultural mathematics learning (Brooman et al., 2015; Fouze & Amit, 2023).

Overall, the discussion indicates that the respondents' suggestions extend beyond request for minor instructional adjustments. They point instead to the need for a more deliberately designed pedagogical environment in which mathematical concepts are contextualized across cultures, explored through structured interaction, supported through linguistic and multimodal scaffolding, and consolidated through lecturer guidance and reflection. In this respect, the findings position PMTs not merely as recipients of instruction, but as informed participants capable of identifying the pedagogical conditions under which online intercultural mathematics learning can become more meaningful and conceptually productive (Abdulrahim & Orosco, 2020; D'Ambrosio, 1985).

Conclusion

This study examined PMTs' suggestions for enhancing online intercultural mathematics learning. The findings indicate that six interconnected areas need meaningful improvement: culturally authentic mathematical contexts and examples across cultures, structures intercultural interaction and collaboration, language support and mathematical representations, interactive and multimodal media, lecturer facilitation or teaching presence, and reflection and global perspectives. Among these areas, PMTs placed the strongest emphasis on culturally authentic contexts, structured intercultural collaboration, and interactive multimodal media.

Taken together, these findings suggest that educators cannot strengthen online intercultural mathematics learning by adding cultural content only at a superficial level. Instead, lecturers and course designers need to develop a more coherent pedagogical design. In this design, educators contextualize mathematical concepts across cultures; students explore these concepts through purposeful interaction; lecturers support learning through clear language and representation; online resources mediate learning through interactive materials; lecturers guide the learning process through active facilitation; and students deepen their understanding through reflection. In practical terms, lecturers and course designers should prioritize culturally grounded mathematical materials, intentionally structured intercultural exchange, clearer representational support, and more meaningful use of multimodal media in online learning environments.

This study contributes to the field by positioning PMTs suggestions as a substantive source of pedagogical insight for improving online intercultural mathematics learning. Rather than treating students as passive recipients of instructional design, this study shows that students can reveal the conditions under which mathematics learning becomes more meaningful, culturally grounded, and conceptually productive across diverse contexts.

This study was delimited to written responses to open-ended questionnaire items, which enabled the systematic capture of a broad range of student suggestions. Future researchers may extend this foundation through interviews, cross-context comparisons, or implementation-based inquiry.

Информация об авторе

Синамбела Пардомуан Наули Джосип Марио; Аспирант, Уральский гуманитарный институт, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина (Российская Федерация, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19); Преподаватель, Программа обучения математическому образованию, Государственный университет Медана (Улица Виллема Искадкара, Пасар V, Медан, Северная Суматра, 2022, Индонезия); E-mail: pardomuannjmsinambela@gmail.com; ORCID: 0000-0002-6325-1013; Scopus ID: 57197823139

ENHANCING ONLINE INTERCULTURAL MATHEMATICS LEARNING: PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS' SUGGESTIONS

Sinambela Pardomuan Nauli Josip Mario
Ph.D. Student; Lecturer

Ural Federal University named after the first
President of Russia B. N. Yeltsin;
Russian Federation; State University of Medan,
Indonesia

Abstract. This study examined pre-service mathematics teachers' suggestions for improving online intercultural mathematics learning. It draws on students' written reflections to identify the pedagogical dimensions that need greater attention in the design of such learning environments. The research adopted a qualitative descriptive approach, using data from open-ended questionnaire responses collected from 68 pre-service mathematics teachers enrolled in mathematics education study program at State University of Medan, Indonesia. Data analysis involved initial open coding, theoretical categorization, and descriptive quantification through frequencies and percentages. The study's novelty lies in treating pre-service mathematics teachers' suggestion as a meaningful analytical foundation for strengthening online intercultural mathematics learning, rather than focusing only on learning outcomes or broad theoretical discussions. The findings revealed six interconnected categories of suggestions: culturally authentic mathematical contexts and examples from different culture; structured intercultural interaction and collaboration; language support and mathematical representations; interactive and multimodal media; lecturer facilitation or teaching presence; and reflection and global perspectives. Among these, the most dominant categories were culturally authentic mathematical contexts and examples from different cultures (82.4% of respondents); structured intercultural interaction and collaboration (85.0%); and interactive and multimodal media (66.2%). Overall, the study shows that improving online intercultural mathematics learning requires a more

integrated pedagogical design in which mathematical concepts are situated across cultural contexts, explores through purposeful interaction, supported by clear language and representation, delivered through interactive resources, guided by active lecturer facilitation, and enriched through reflection.

Keywords: online intercultural mathematics learning; pre-service mathematics teachers; qualitative descriptive study; culturally responsive mathematics teaching; intercultural learning; students' suggestions

For citation: Sinambela P. N. J. M. (2026). Enhancing Online Intercultural Mathematics Learning: Pre-Service Mathematics Teachers' Suggestions. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 3 (43), 96–106. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-96-106

Copyright: © P. N. J. M. Sinambela (2026). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

Список литературы / References

- Abdulrahim, N. A., Orosco, M. J. (2020). Culturally Responsive Mathematics Teaching: A Research Synthesis. *The Urban Review*, 52(1), 1–25. <https://doi.org/10.1007/s11256-019-00509-2>
- Barada, V. (2013). Sarah J. Tracy, Qualitative Research Methods: Collecting Evidence, Crafting Analysis, Communicating Impact. *Revija Za Sociologiju*, 43(1). <https://doi.org/10.5613/rzs.43.1.6>
- Bonner, E. P., Adams, T. L. (2012). Culturally responsive teaching in the context of mathematics: A grounded theory case study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15(1), 25–38. <https://doi.org/10.1007/s10857-011-9198-4>
- Brooman, S., Darwent, S., Pimor, A. (2015). The student voice in higher education curriculum design: Is there value in listening? *Innovations in Education and Teaching International*, 52(6), 663–674. <https://doi.org/10.1080/14703297.2014.910128>
- Deardorff, D. K. (2006). *Identification and Assessment of Intercultural Competence as a Student Outcome of Internationalization* (Pt. 241-266). 10(3).
- Deardorff, D. K. (2019). *Manual for Developing Intercultural Competencies: Story Circles* (1st ed.). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780429244612>
- Fouze, A. Q., Amit, M. (2023). The Importance of Ethnomathematics Education. *Creative Education*, 14(04), 729–740. <https://doi.org/10.4236/ce.2023.144048>
- Garrison, D. R., Anderson, T., Archer, W. (1999). Critical Inquiry in a Text-Based Environment: Computer Conferencing in Higher Education. *The Internet and Higher Education*, 2(2–3), 87–105. [https://doi.org/10.1016/S1096-7516\(00\)00016-6](https://doi.org/10.1016/S1096-7516(00)00016-6)
- Kabuye Batiibwe, M. S. (2024). The role of ethnomathematics in mathematics education: A literature review. *Asian Journal for Mathematics Education*, 3(4), 383–405. <https://doi.org/10.1177/27527263241300400>
- OECD. (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*. OECD Publishing. https://www.oecd.org/content/dam/oecd/en/publications/reports/2019/04/pisa-2018-assessment-and-analytical-framework_d1c359c7/b25efab8-en.pdf
- Romijn, B. R., Slot, P. L., Leseman, P. P. M. (2021). Increasing teachers' intercultural competences in teacher preparation programs and through professional development: A review. *Teaching and Teacher Education*, 98, 103236. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2020.103236>
- Sinambela, P. N. J. M., Savelyeva, N. K. (2026). Semantic Algebra: An Intercultural Perspective to Problem-Solving Assessment of High School Education. *Continuum. Maths. Informatics. Education*, 41(1), 22–35. <https://doi.org/10.24888/2500-1957-2026-1-22-35>

UNESCO. (2013). Intercultural competences: Conceptual and operational framework. UNESCO.
<https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000219768>

Information about the author

Pardomuan N. J. M. Sinambela; Ph.D. Student; Ural Institute of Humanities, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin (Mira Street, 19, Yekaterinburg, 620002, Russian Federation); Lecturer; Mathematics Education Study Program, State University of Medan (Willem Iskandar Street, Pasar V, Medan, North Sumatra, 2022, Indonesia); E-mail: pardomuannjmsinambela@gmail.com; ORCID: 0000-0002-6325-1013; Scopus ID: 57197823139

Статья поступила в редакцию	16.04.2026
Принята к публикации	20.05.2026
Статья опубликована	18.09.2026

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-3-107-116

УДК
378.146**ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ МЕТОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НА
КАЧЕСТВО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ПРИ БЕСКОНТРОЛЬНОМ
ИСПОЛЬЗОВАНИИ НЕЙРОСЕТЕВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ****Труханова Наталья Петровна**
к.п.н., ассистентРязанский государственный
радиотехнический университет
им. В. Ф. Уткина

Аннотация. В условиях массового бесконтрольного использования студентами нейросетевых инструментов возрастает академическая нечестность студентов при выполнении типовых расчетов, заданных для самостоятельной работы. Это приводит к тому, что студенты механически воспроизводят сгенерированные искусственным интеллектом решения без проверки их корректности и логической обоснованности. В связи с этим принципиально важно сформировать набор прикладных методических решений с верифицируемым эффектом для устранения выявленной проблемы в ходе ежедневной учебной работы. В данном исследовании эмпирически проверена эффективность двух методических решений: устная проверка домашнего задания у доски и проведение систематических кратких проверочных работ на практических занятиях. Для проведения эксперимента был выбран один из ключевых разделов математики – «Неопределенный интеграл». Экспериментальная часть исследования реализована в ходе семи практических занятий. На первом занятии был проведен входной контроль. В течение пяти последующих практических занятий учебный процесс был структурирован следующим образом: в начале занятия осуществлялась демонстрация студентами решений домашнего задания у доски; основная часть была посвящена отработке новых методов интегрирования для неопределенных интегралов; в конце занятия проводилась краткая проверочная работа по изученному на прошлом занятии материалу. Для самостоятельной работы студентам предлагались задачи из типового расчета, соответствующие тематике проведенного занятия. Выходной контроль осуществлялся на заключительном седьмом занятии в форме контрольной работы. Полученные результаты свидетельствуют о наличии статистически подтвержденного эффекта экспериментального воздействия, а также представляют практическую ценность для преподавателей профильных дисциплин и специалистов образовательных подразделений высших учебных заведений.

Ключевые слова: искусственный интеллект, академическая нечестность, методические решения, типовые расчеты, самостоятельная работа

Для цитирования: Труханова Н.П. Оценка влияния методических решений на качество самостоятельной работы студентов по высшей математике при бесконтрольном использовании нейросетевых инструментов // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 3 (43). С. 107–116. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-107-116

Права: © Труханова Н.П. (2026). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И. А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY

Введение

На сегодняшний день академическая нечестность распространена среди студентов многих стран и является серьезной угрозой качеству высшего образования, репутации вузов, доверию к дипломам и личностному развитию самих студентов. В отечественных и зарубежных исследованиях анализируются формы, масштабы, причины нечестного поведения, а также меры по его предотвращению.

Исследователи фиксируют следующие *формы нечестного поведения*: списывание на экзаменах, совместная работа над индивидуальными заданиями, плагиат, фальсификация данных, заказные работы, использование искусственного интеллекта (ChatGPT, DeepSeek, GitHub Copilot и других ИИ-ассистентов) для обмана системы оценивания (Бермус, 2025; Исаева, 2025; Baran, 2020; Cotton, 2024).

Масштабы нечестного поведения: по данным опросов более 50–70% студентов признаются в списывании или плагиате, а в отдельных выборках показатели доходят до 75–98% (Cleto, 2024).

Причины нечестного поведения:

1) *давление и стресс*: высокие академические требования, страх провала (Sozon, 2024; Cleto, 2024);

2) *личностные черты*: психопатические черты, особенности личности по шкале HEXACO (Baran, 2020; Wang, 2022);

3) *стремление избежать усилий, недостаток знаний, низкая мотивация, ориентация на оценки* (Surahman, 2022);

4) *снижение моральных норм*: отношение «это нормально, все так делают», слабые нормы честности (Ali, 2023);

5) *пробелы в институциональной политике* (Van, 2025);

6) *цифровые технологии*: интернет, мобильные устройства и инструменты на основе искусственного интеллекта облегчают обман (Sozon, 2024).

Также в исследованиях установлена связь между академической нечестностью студентов в настоящем и их профессиональной недобросовестностью в будущем (He, 2024; Чевтаева, 2024).

Что помогает бороться с нечестностью:

1) *образовательные программы по академической честности*, которые приводят к значительному снижению уровня плагиата и формированию более негативного отношения к мошенничеству (Perkins, 2020; Zhu, 2025);

2) *четкие правила и серьезные санкции* также снижают готовность списывать (He, 2024);

3) *формирование мотивации и самоэффективности*, предусматривающие работу с групповыми нормами и установками на честность (Baran, 2020);

4) *психологическая поддержка* – подключение к решению проблемы психологов с целью помочь студентам развить позитивное самоотношение, укрепить мотивацию к обучению, преодолеть неуверенность и найти конструктивные способы преодоления учебных трудностей, которые порой и толкают на нечестные шаги (Меркулова, 2014).

Эмпирическая база современных исследований демонстрирует устойчивую отрицательную связь между интенсивностью использования гаджетов учащимися (в том числе обусловленной смартфоном-зависимостью) и уровнем их учебных достижений (Sunday, 2021). Интересно отметить, что и сами студенты, признавая полезность цифровых технологий, одновременно осознают их потенциальный вред для профессионального становления (Щучкин, 2025).

Однако очевидно, что цифровые технологии, в том числе искусственный интеллект – это свершившаяся реальность. То, что вчера казалось фантастикой, сегодня стало обыденностью. Не имеет смысла останавливать технический прогресс, приносящий

колоссальные возможности, только из опасений негативных последствий. Вместо этого нужно разрабатывать механизмы контроля и этические стандарты.

Анализ релевантных научных публикаций демонстрирует, что на данный момент разрабатываются общие способы и рекомендации по недопущению нечестных практик применения электронных технологий со стороны обучающихся вузов. Принципиально важно сформировать набор прикладных методических решений с верифицируемым эффектом для устранения выявленной проблемы в ходе ежедневной учебной работы. Таким образом, подтверждается актуальность настоящего исследования.

В данном исследовании рассматривается такая распространенная на сегодняшний день педагогическая практика, как типовые расчеты по высшей математике с индивидуальными вариантами для каждого студента. *Типовой расчет* – это учебно-методическое задание, которое включает набор задач по конкретным темам дисциплины. Обычно задается студентам в виде домашнего задания. Его цель – закрепить теоретический материал и отработать практические навыки решения математических задач. *Индивидуальные варианты* – это разные версии одного и того же типового расчета, где числовые данные, параметры или условия задач варьируются от варианта к варианту. Применяются индивидуальные варианты для того, чтобы стимулировать самостоятельную работу студентов и тем самым объективно оценивать их знания. Еще несколько лет назад, проверяя такие работы, преподаватель был уверен, что студент выполнил работу сам, а не воспользовался чужим результатом. Все изменилось с появлением нейросетей. Конечно, есть добросовестные студенты, которые выполняют домашнюю работу самостоятельно и прибегают к ИИ-ассистентам только для того, чтобы лучше разобраться в материале или проверить правильность выполнения задания. И все же, учитывая вышеприведенный анализ научных исследований на тему академической нечестности студентов, самостоятельность выполнения типовых расчетов ставится под сомнение. Отчасти подтверждают это предположение типичные ошибки, которые допускают нейросети в решении задач и которые все чаще встречаются в работах, сданных на проверку.

Целью настоящего исследования является эмпирическая проверка эффективности двух методических решений, направленных на повышение уровня самостоятельной работы студентов при выполнении индивидуальных типовых расчетов по высшей математике. В качестве таких решений выступают: устная проверка домашнего задания у доски и систематическое проведение кратких проверочных работ на практических занятиях.

Методология исследования

В рамках проводимого исследования для организации практического занятия была разработана структура урока, предусматривающая последовательное выполнение следующих методических этапов:

1. Вводная часть (продолжительность: 10 минут). На данном этапе была организована демонстрация работы над домашним заданием двумя студентами у доски. Это обеспечило визуализацию хода рассуждений и позволило оценить степень самостоятельности обучающихся.

2. Основная часть (продолжительность: 70 минут). На данном этапе осуществлялось формирование практических навыков применения теоретических положений по новой теме посредством решения учебно-практических задач.

3. Заключительная часть (продолжительность: 10 минут). В конце каждого практического занятия проводилась краткая проверочная работа с целью оценить, насколько качественно студенты усвоили тему, изученную на предыдущем занятии, а также определить эффективность самостоятельной проработки типовых расчетов в рамках домашнего задания.

Эксперимент проводился в ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина» в рамках изучения дисциплины «Математика» во втором семестре первого курса в группах с направлениями подготовки 15.03.06 Мехатроника и робототехника, 12.05.01 Электронные и опико-электронные приборы и системы специального назначения. В качестве контрольной группы участвовали

группы с направлениями подготовки 27.03.01 Стандартизация и метрология, 12.03.01 Приборостроение. Все группы входят в состав факультета автоматики и информационных технологий в управлении.

Для проведения эксперимента был выбран один из ключевых разделов математики – «Неопределенный интеграл», который закладывает основу для дальнейшего обучения и профессиональной деятельности, объединяя теоретическую базу, практические навыки и развитие аналитического мышления.

Для анализа схожести уровня математической подготовки в экспериментальной и контрольной группах в начале эксперимента был проведен входной контроль в виде математического диктанта по производным сложных функций. Данная проверочная работа была выбрана целенаправленно, поскольку темы «Производная функции» и «Неопределенный интеграл» находятся в тесной методической и содержательной взаимосвязи; также в структуре рабочей программы изучение производных предшествует освоению интегрального исчисления. Математический диктант включал 18 задач и был реализован в форме раздаточного материала, структурированного в виде таблицы с двумя колонками: в первой колонке размещались задания, во второй – предусматривалось свободное пространство для внесения ответов. Для каждого обучающегося был подготовлен индивидуальный вариант заданий. Оценка результатов осуществлялась по пятибалльной шкале.

Для организации работы использовались учебно-методические пособия, разработанные на кафедре высшей математики ФГБОУ ВО «РГРТУ им. В. Ф. Уткина»^{8,9}.

Экспериментальная часть исследования была реализована в ходе семи практических занятий. На первом занятии был проведен входной контроль, продолжительность которого составила 10 минут. В течение пяти последующих практических занятий учебный процесс был структурирован следующим образом: в начале занятия (10 минут) осуществлялась демонстрация студентами решений домашнего задания у доски; основная часть (70 минут) была посвящена отработке новых методов интегрирования для неопределенных интегралов; в конце занятия проводилась краткая проверочная работа по изученному на прошлом занятии материалу, продолжительность которой также составляла 10 минут. Для самостоятельной работы студентам предлагались задачи из типового расчета, соответствующие тематике проведенного занятия. Выходной контроль осуществлялся на заключительном седьмом занятии в форме контрольной работы, включавшей 5 заданий и рассчитанной на 45 минут. Контрольная работа была составлена на основе пройденного учебного материала и охватывала следующие методы интегрирования: метод замены переменной, метод интегрирования по частям, интегрирование дробно-рациональных функций, интегрирование тригонометрических функций, интегрирование иррациональных функций. Оценка результатов выходного контроля производилась по пятибалльной шкале с учетом количества правильно решенных задач.

Для оценки эффективности экспериментальных методических решений были рассчитаны средние баллы $\bar{x}_i$ и выборочные дисперсии s_i^2 ($i = \overline{1,2}$) результатов итоговой контрольной работы в экспериментальной и контрольной группах. Сравнение средних значений проводилось с использованием t-критерия Уэлча, позволяющего учитывать неоднородность дисперсий.

В качестве рабочей гипотезы выдвигается предположение о том, что применение устной проверки домашнего задания у доски и проведение кратких проверочных работ на практических занятиях будет существенно способствовать росту ответственности студентов при выполнении индивидуальных типовых расчетов, что приведет к повышению их успеваемости.

⁸ Интегральное исчисление функции одной переменной: Учеб. пособие / К.А. Ципоркова; Рязан. гос. радиотехн. акад. Рязань, 2006. 112 с.

⁹ Тренировочные задания по теме «Неопределенный интеграл»: методические указания / Рязан. гос. радиотехн. ун-т; сост.: Н.Н. Маслова, Л.С. Ревкова. Рязань, 2019. 36 с.

Результаты

Для проверки различия распределения оценок между экспериментальной и контрольной группами (рис. 1), был использован *непараметрический критерий Манна – Уитни* (U-критерий). Поскольку полученное р-значение ($\approx 0,20$) превышает пороговый уровень значимости 0,05, статистически значимых различий между группами на этапе входного контроля не выявлено.

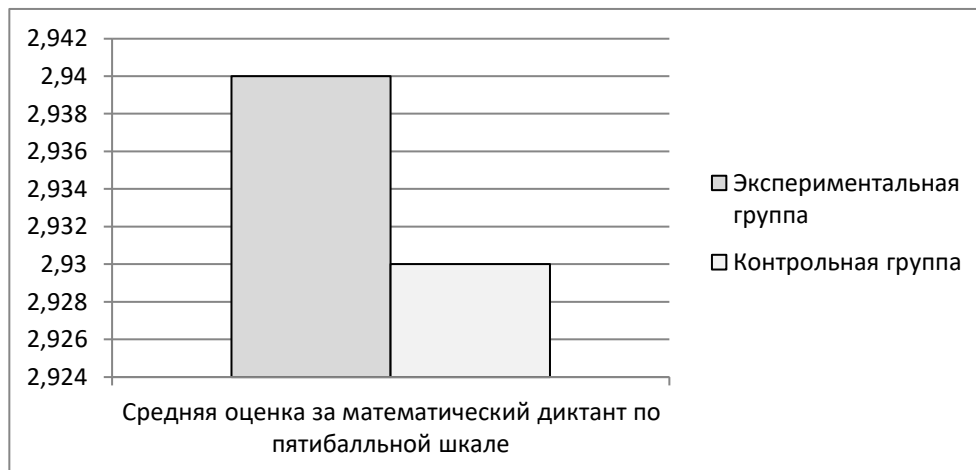


Рис. 1. Средние оценки студентов экспериментальной и контрольной групп за математический диктант входного контроля

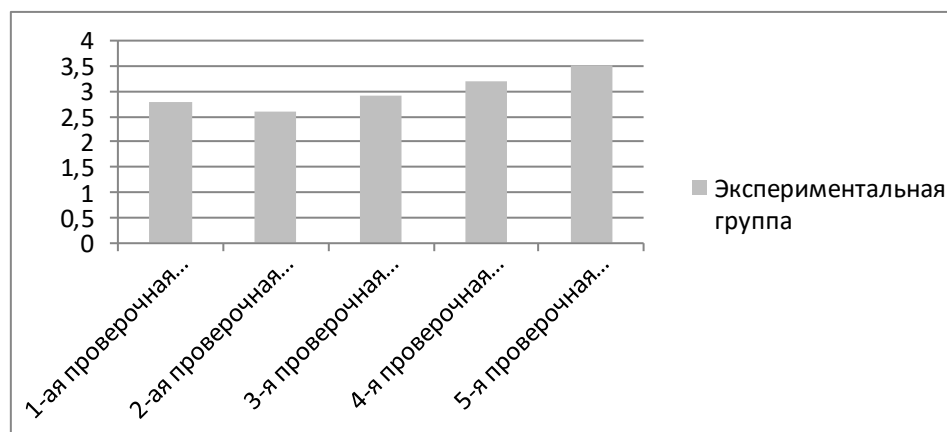


Рис. 2. Средние оценки студентов экспериментальной группы за проверочные работы по пятибалльной шкале

На начальном этапе эксперимента (на первых двух занятиях) результаты выполнения кратких контрольных работ в экспериментальной группе оказались низкими. При этом задания типового расчета, сданные на проверку, у большинства студентов были выполнены правильно. По-прежнему встречались работы, явно выполненные с помощью ИИ-ассистентов, так как они содержали алгоритмы, которые используют нейросети в решении математических задач, но которые не разбирались на лекциях и практических занятиях, а также обозначения, отклоняющиеся от стандартной математической символики, но применяющиеся нейросетями. На последующих трех занятиях наблюдался рост успеваемости в экспериментальных группах (рис. 2).

Наблюдаемая динамика учебных результатов дает основание утверждать, что уровень домашней подготовки студентов повысился. Данный вывод также подтверждается более уверенной демонстрацией студентами решений домашних заданий у доски, что свидетельствует о прочном усвоении алгоритмов расчетов.

Средняя оценка за итоговую контрольную работу в экспериментальной группе с количеством студентов $n_1 = 34$ составила $\bar{x}_1 = 3,5294$, выборочная дисперсия $s_1^2 \approx 0,8022$. В контрольной группе с количеством студентов $n_2 = 30$ средняя оценка $\bar{x}_2 = 2,8333$, выборочная дисперсия $s_2^2 \approx 1,0399$. Разница средних значений составила $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0,6961$ (см. рис. 3).

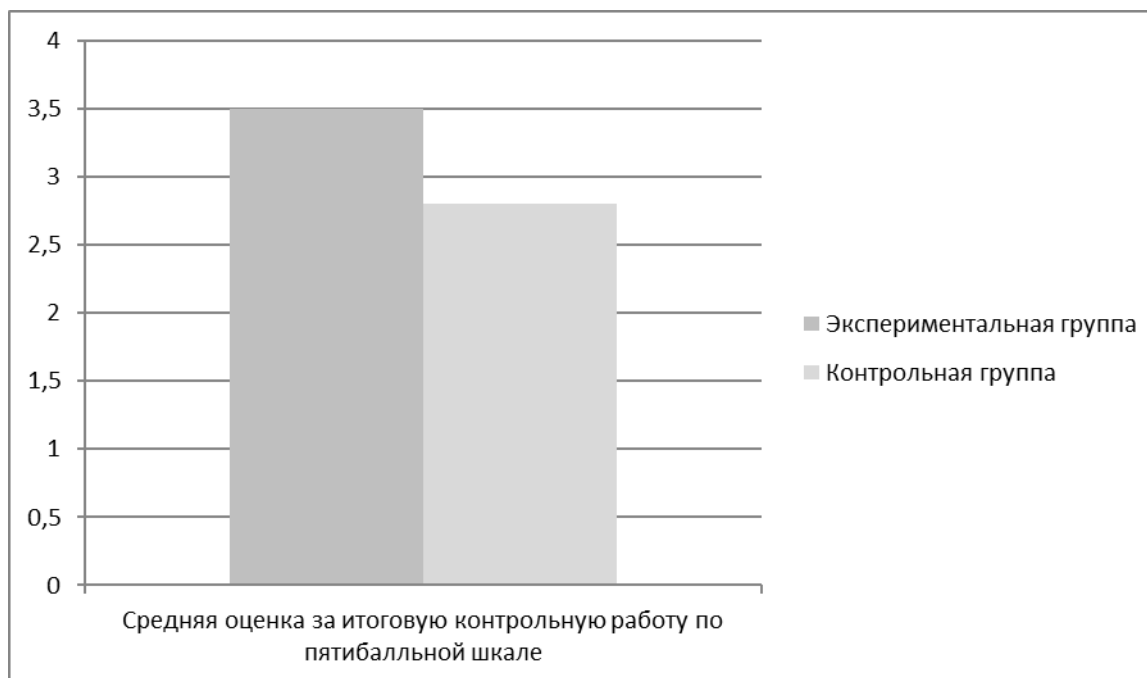


Рис. 3. Средние оценки студентов экспериментальной и контрольной групп за итоговую контрольную работу

Выборочные дисперсии различаются $s_1^2/s_2^2 \approx 1,3$, что свидетельствует об умеренной гетерогенности разброса оценок между группами. В связи с этим для сравнения средних оценок был применен t-критерий Уэлча, так как он не требует равенства дисперсий. Значение t-статистики вычислялось по формуле:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{0,6961}{\sqrt{\frac{0,8022}{34} + \frac{1,0399}{30}}} \approx 2,883$$

Число степени свободы определялось по формуле Уэлча-Саттертуэйта:

$$df = \frac{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} = \frac{(0,8022/34 + 1,0399/30)^2}{\frac{(0,8022/34)^2}{34 - 1} + \frac{(1,0399/30)^2}{30 - 1}} \approx 58,2131$$

Таким образом, для $t \approx 2,88$, $df \approx 58$, двусторонний $p \approx 0,0055 < 0,05$, следовательно, различия в среднем уровне успеваемости между группами являются статистически значимыми на уровне значимости 0,05. Полученные результаты свидетельствуют о наличии статистически подтвержденного эффекта экспериментального воздействия.

Неожиданный результат – в течение эксперимента на 15% снизилась посещаемость занятий в экспериментальной группе. Некоторые студенты, которые пропускали занятия, в ходе беседы признались, что не хотели получать неудовлетворительные оценки за плохо написанные проверочные работы, готовиться к ним тоже не было желания, поэтому они

предпочли не приходить на занятия, при этом решенные задания из типового расчета время от времени приносили на проверку. На итоговой контрольной работе такие студенты показали низкие результаты.

Заключение

Результаты эксперимента позволяют сделать вывод, что цель исследования достигнута, гипотеза подтверждена. Предложенные методические решения: устная демонстрация студентами выполнения домашнего задания у доски и систематическое проведение кратких проверочных работ, – прошли практическую проверку и продемонстрировали свою применимость для повышения качества подготовки студентов к практическим занятиям.

Апробированные в ходе экспериментальной работы методические решения представляют практическую ценность для преподавателей профильных дисциплин и специалистов образовательных подразделений высших учебных заведений. Перспективным направлением развития исследования является синтез предложенной методики с рейтинговой системой оценивания знаний. Включение в экзаменационную оценку компонента, учитывающего достижения студентов в рамках семестровой самостоятельной работы, потенциально способно усилить мотивацию обучающихся к инициативной и систематической учебной деятельности. При этом представленные результаты исследования следует трактовать как промежуточный итог, требующий дополнительной эмпирической проверки на выборках, охватывающих более широкий спектр условий и групп.

Список литературы

- Бермус А.Г., Сизова Е.В. Этические аспекты реализации технологий искусственного интеллекта в классическом университете: анализ отношения студенческой аудитории // Непрерывное образование: XXI век. 2025. Т. 13. № 2. DOI: 10.15393/j5.art.2025.10585.
- Исаева Т.Е. Педагогическая профилактика электронного академического мошенничества // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2025. № 4. С. 249–264. DOI: 10.24412/2304-120X-2025-11070.
- Меркулова О.П., Даниленко А. С. Психологические предпосылки студенческого плагиата // Высшее образование в России. 2014. № 4. С. 114–121.
- Чевтаева Н.Г., Боброва О.В. Академическая честность в структуре устойчивой антикоррупционной позиции студента: опыт социологического анализа // Образование и наука. 2024. № 10. С. 131–165. DOI: 10.17853/1994-5639-2024-10-131-165.
- Щучкин Е. Ю. Влияние искусственного интеллекта на учебный процесс: пилотное исследование на примере технического вуза // CONTINUUM. Математика. Информатика. Образование. 2025. № 2. С. 122–130. DOI: 10.24888/2500-1957-2025-2-122-130.
- Ali M. V., Fazal B., Tariq J. Morality and academic dishonesty among university students: testing extended theory of planned behavior // Contemporary Issues in Social Sciences and Management Practices. 2023. Vol. 2, No. 4. P. 20–29. Date of publication: 13 December 2023. DOI: 10.61503/cissmp.v2i4.81.
- Baran L., Jonason P. K. Academic dishonesty among university students: the roles of psychopathy, motivation, and self-efficacy. PLoS ONE. 2020. Vol. 15, No. 8. P. e0238141. Date of publication: 31.08.2020. DOI: 10.1371/journal.pone.0238141.
- Cleto E. J. T. Study of academic dishonesty among students at a tertiary university: forms, prevalence, and associated factors. International Journal of Advanced and Applied Sciences. 2024. Vol. 11, No. 7. P. 69–74. Date of publication: July 2024. DOI: 10.21833/ijaas.2024.07.009.

- Cotton D. R. E., Cotton P. A., Shipway J. R. Chatting and cheating: ensuring academic integrity in the era of ChatGPT. *Innovations in Education and Teaching International*. 2023. Vol. 61(2), P. 228–239. DOI: 10.1080/14703297.2023.2190148.
- He F. X., Fanaian M., Zhang N. M., Lea X., Geale S. K., Gielis L., Razaghi K., Evans A. Academic dishonesty in university nursing students: a scoping review. *International Journal of Nursing Studies*. 2024. Vol. 154. Art. 104752. Date of publication: June 2024. DOI: 10.1016/j.ijnurstu.2024.104752.
- Perkins M., Gezgin U. B., Roe J. Reducing plagiarism through academic misconduct education. *International Journal for Educational Integrity*. 2020. Vol. 16, No. 3. Date of publication: 1 May 2020. DOI: 10.1007/s40979-020-00052-8.
- Sozon Md., Alkharabsheh O. H. M., Fong P. W., Chuan S. B. Cheating and plagiarism in higher education institutions (HEIs): a literature review. *F1000Research*. 2024. Art. 13:788. Date of publication: 26 September 2024. DOI: 10.12688/f1000research.147140.2.
- Sunday J., Adesope O. O., Maarhuis P. L. The effects of smartphone addiction on learning: a meta-analysis. *Computers in Human Behavior Reports*. 2021. Vol. 4. P. 100114. Date of publication: August–December 2021. DOI: 10.1016/j.chbr.2021.100114.
- Surahman E., Wang T.-H. Academic dishonesty and trustworthy assessment in online learning: a systematic literature review. *J. Comput. Assist. Learn.* 2022. Vol. 38, No. 6. P. 1535–1553. Date of publication: 7 July 2022. DOI: 10.1111/jcal.12708.
- Van H. AI-assisted academic cheating: a conceptual model based on postgraduate student voices. *Frontiers in Computer Science*. 2025. Vol. 7. Date of publication: 26 November 2025. DOI: 10.3389/fcomp.2025.1682190.
- Wang H., Zhang Y. The effects of personality traits and attitudes towards the rule on academic dishonesty among university students. *Scientific Reports*. 2022. Date of publication: 19 August 2022. DOI: 10.1038/s41598-022-18394-3.
- Zhu W. The importance of promoting a culture of academic integrity in higher education institutions in China. *Psicologia, Reflexão e Crítica: revista semestral do Departamento de Psicologia da UFRGS*. 2025. Vol. 38, No. 30. Date of publication: 6 November 2025. DOI: 10.1186/s41155-025-00367-w.

Информация об авторе

Труханова Наталья Петровна; кандидат педагогических наук; ассистент кафедры высшей математики; ФГБОУ ВО «Рязанский государственный радиотехнический университет им. В. Ф. Уткина» (Российская Федерация, 390005, г. Рязань, Рязанская область, ул. Гагарина, д. 59/1); E-mail: np-aleshina@mail.ru; ORCID: 0009-0001-7235-5543

EXPERIMENTAL EVALUATION OF METHODOLOGICAL INTERVENTIONS TO SUSTAIN INDEPENDENT WORK QUALITY IN ADVANCED MATHEMATICS AMID STUDENTS' UNSUPERVISED USE OF GENERATIVE AI TOOLS

Trukhanova N. P. | Ryazan State Radio Engineering University
PhD (Pedagogy), assistant | named after V.F. Utkin

Abstract. In the context of the widespread and uncontrolled use of neural network tools by students, academic dishonesty is increasing when students perform standard

computational assignments set for independent work. This leads to students mechanically reproducing AI-generated solutions without verifying their correctness or logical validity. In this regard, it is fundamentally important to develop a set of applied methodological solutions with a verifiable effect to address the identified problem in daily educational practice. This study empirically tests the effectiveness of two methodological solutions: oral assessment of homework at the blackboard and the systematic administration of short quizzes during practical sessions. One of the key sections of mathematics – "The Indefinite Integral" – was selected for the experiment. The experimental phase was conducted over seven practical sessions. At the first session, an initial assessment was carried out. Over the subsequent five practical sessions, the learning process was structured as follows: at the beginning of each session, students demonstrated their homework solutions at the blackboard; the main part was devoted to practicing new integration techniques for indefinite integrals; and at the end of each session, a short quiz was given on the material covered in the previous session. For independent work, students were assigned tasks from the standard computation set corresponding to the topic of the session. The final assessment was conducted during the seventh and final session in the form of a test. The results obtained indicate a statistically confirmed effect of the experimental intervention and also offer practical value for instructors of relevant disciplines and specialists in educational departments of higher education institutions.

Keywords: artificial intelligence, academic dishonesty, methodological solutions, standard computational assignments, independent work

For citation: Trukhanova N. P. (2026). Experimental Evaluation Methodological Interventions to Sustain Independent Work Quality in Advanced Mathematics Amid Students' Unsupervised Use of Generative AI Tools. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 3 (43), 107–116. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-107-116

Copyright: © N. P. Trukhanova (2026). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

References

- Ali, M. V., Fazal, B., & Tariq, J. (2023). Morality and academic dishonesty among university students: Testing extended theory of planned behavior. *Contemporary Issues in Social Sciences and Management Practices*, 2(4), 20–29. <https://doi.org/10.61503/cissmp.v2i4.81>.
- Baran, L., & Jonason, P. K. (2020). Academic dishonesty among university students: The roles of psychopathy, motivation, and self-efficacy. *PLoS ONE*, 15(8), e0238141. <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0238141>.
- Bermus, A. G., & Sizova, E. V. (2025). Ethical Aspects of Implementing Artificial Intelligence Technologies in a Classical University: Analysis of Student Audience Attitudes. *Lifelong Education: The XXI Century*, 13(2). <https://doi.org/10.15393/j5.art.2025.10585>. (In Russ.).
- Chevtayeva, N. G., & Bobrova, O. V. (2024). Academic Integrity in the Framework of a student's sustainable anti-corruption stance: insights from sociological analysis. *The Education and Science Journal*, (10), 131–165. <https://doi.org/10.17853/1994-5639-2024-10-131-165>. (In Russ.).
- Cleto, E. J. T. (2024). Study of academic dishonesty among students at a tertiary university: Forms, prevalence, and associated factors. *International Journal of Advanced and Applied Sciences*, 11(7), 69–74. <https://doi.org/10.21833/ijaas.2024.07.009>.

- Cotton, D. R. E., Cotton, P. A., & Shipway, J. R. (2023). Chatting and cheating: Ensuring academic integrity in the era of ChatGPT. *Innovations in Education and Teaching International*, 61(2), 228–239. <https://doi.org/10.1080/14703297.2023.2190148>.
- He, F. X., Fanaian, M., Zhang, N. M., Lea, X., Geale, S. K., Gielis, L., Razaghi, K., & Evans, A. (2024). Academic dishonesty in university nursing students: A scoping review. *International Journal of Nursing Studies*, 154, 104752. <https://doi.org/10.1016/j.ijnurstu.2024.104752>.
- Isaeva, T. E. (2025). Pedagogical prevention of electronic academic dishonesty. *Scientific-methodological electronic journal "Koncept"*, (4), 249–264. <https://doi.org/10.24412/2304-120X-2025-11070>. (In Russ.).
- Merkulova, O. P., & Danilenko, A. S. (2014). Psychological Preconditions of Student's Plagiarism. *Higher Education in Russia*, (4), 114–121. (In Russ.).
- Perkins, M., Gezgin, U. B., & Roe, J. (2020). Reducing plagiarism through academic misconduct education. *International Journal for Educational Integrity*, 16(3). <https://doi.org/10.1007/s40979-020-00052-8>.
- Shchuchkin, E. Yu. (2025). Impact of Artificial Intelligence on the Educational Process: A Pilot Study in a Technical University. *CONTINUUM. Mathematics. Informatics. Education*, (2), 122–130. <https://doi.org/10.24888/2500-1957-2025-2-122-130>. (In Russ.).
- Sozon, Md., Alkharabsheh, O. H. M., Fong, P. W., & Chuan, S. B. (2024). Cheating and plagiarism in higher education institutions (HEIs): A literature review. *F1000Research*, 13, 788. <https://doi.org/10.12688/f1000research.147140.2>.
- Sunday, J., Adesope, O. O., & Maarhuis, P. L. (2021). The effects of smartphone addiction on learning: A meta-analysis. *Computers in Human Behavior Reports*, 4, 100114. <https://doi.org/10.1016/j.chbr.2021.100114>.
- Surahman, E., & Wang, T.-H. (2022). Academic dishonesty and trustworthy assessment in online learning: A systematic literature review. *Journal of Computer Assisted Learning*, 38(6), 1535–1553. <https://doi.org/10.1111/jcal.12708>.
- Van, H. (2025). AI-assisted academic cheating: A conceptual model based on postgraduate student voices. *Frontiers in Computer Science*, 7. <https://doi.org/10.3389/fcomp.2025.1682190>.
- Wang, H., & Zhang, Y. (2022). The effects of personality traits and attitudes towards the rule on academic dishonesty among university students. *Scientific Reports*. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-18394-3>.
- Zhu, W. (2025). The importance of promoting a culture of academic integrity in higher education institutions in China. *Psicologia, Reflexão e Crítica: Revista Semestral do Departamento de Psicologia da UFRGS*, 38(30). <https://doi.org/10.1186/s41155-025-00367-w>.

Information about the author

Natalya P. Trukhanova; Candidate of Pedagogical Sciences; Lecturer of the Department of Higher Mathematics; Utkin Ryazan State Radio Engineering University (Gagarin Street, 59/1, Ryazan, Ryazan Region, 390005, Russian Federation); E-mail: np-aleshina@mail.ru; ORCID: 0009-0001-7235-5543

Статья поступила в редакцию	06.07.2026
Принята к публикации	10.08.2026
Статья опубликована	18.09.2026

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-3-117-129

УДК
378.147:004.056**НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ СОПРОВОЖДЕНИЕ
ИНТЕГРАЦИИ ОЛИМПИАДНОГО ДВИЖЕНИЯ И
ДЕМОНСТРАЦИОННОГО ЭКЗАМЕНА:
ИЗМЕРИМЫЕ ИНДЕКСЫ КАЧЕСТВА ПОДГОТОВКИ И
МЕДИАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ****Уймин Антон Григорьевич**
старший преподаватель
Шумский Антон Дмитриевич
старший преподавательРоссийский государственный университет
нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина
Российский государственный университет
нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина

Аннотация. Постановка проблемы: в системе среднего профессионального образования сложилось функциональное противоречие. Олимпиады профессионального мастерства и демонстрационный экзамен формально опираются на одну компетентностную модель, однако высокий результат в олимпиадном формате не гарантирует успешного прохождения экзамена. Сложившаяся практика подготовки полагается преимущественно на экспертные суждения и не предлагает количественных ориентиров, связывающих регулярность тренинга, охват компетенций и содержательное соответствие тренировочных задач карте экзамена. Цель работы: разработать измеримую модель стандартизированной подготовки, которая выступает медиатором между олимпиадным статусом обучающегося и исходом демонстрационного экзамена, и эмпирически проверить ее прогностическую и медиационную валидность. Используемые методы: компетентностный подход, психометрические процедуры оценки согласованности экспертов ([kappa] Коэна, конкордация Кендалла W, [alpha] Кронбаха, [omega] Макдональда), логит-моделирование со смешанными эффектами с учетом площади, ROC-анализ, тест Хосмера–Лемешоу, многоуровневый медиационный анализ с бутстрэп-оценкой не прямых эффектов ($B = 5000$). Новизна. Предложена согласованная система из четырех индексов качества стандартизированной подготовки: интенсивность (INT), регулярность (REG), покрытие компетенций (COV), контент-оверлап (OVL). Над ними надстроен композитный показатель SPI. Впервые формализовано правило, по которому тренировочная задача признается эквивалентной элементу демонстрационного экзамена, - через взвешенную меру сходства. Качество подготовки тут описано как медиатор олимпиадного эффекта в логит-модели со смешанными эффектами. Результат. Выборка пилотная и небольшая ($N = 50$). На ней эффект участия в олимпиаде на вероятность получения «отлично» почти целиком проходит через качество подготовки: доля опосредования $PM = 0,79$; 95% ДИ $[0,65; 0,88]$; $p < 0,001$. Когда блок индексов вводится в модель, прогностическая точность растет на $\Delta AUC = 0,11$ - с 0,58 до 0,69. Рабочие пороги получились такие: $INT \geq 20$ ч, $REG \geq 0,7$, $COV \geq 0,6$, $OVL \geq 0,7$. Практическая значимость. Методика применима в образовательных организациях СПО при планировании подготовки к чемпионатам и демонстрационному экзамену. Она дает переход от экспертно-интуитивной оценки готовности к измеримому управлению качеством. Расчет метрик можно встроить в LMS-среду и считать автоматически. Есть и побочный выигрыш: результаты становятся сопоставимыми между площадками и преподавателями.

Ключевые слова: демонстрационный экзамен, олимпиадная подготовка, чемпионатное образование, стандартизация профессионального образования, педагогические измерения, индексы качества подготовки, медиационный анализ, валидность оценивания, цифровая образовательная среда

Для цитирования: Уймин А.Г., Шумский А.Д. Научно-методическое сопровождение интеграции олимпиадного движения и демонстрационного экзамена: измеримые индексы качества подготовки и медиационный анализ // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 3 (43). С. 117–129. <https://doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-117-129>

Права: © А.Г. Уймин, А.Д. Шумский (2026). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И. А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0.

Введение

В системе среднего профессионального образования (СПО) демонстрационный экзамен стал основной процедурой оценки сформированных профессиональных компетенций (Гамачек, 2022, 50). Рядом с ним активно развивается движение чемпионатов профессионального мастерства – в этой логике проводятся олимпиады по специальностям, корпоративные кубки, национальные финалы, отборочные этапы разного уровня (Дьяченко, 2020, 102). Формально оба формата опираются на одну компетентностную модель и ориентированы на одни и те же профессиональные стандарты. Часто их проводит одна и та же образовательная организация. Разрыв тем не менее держится устойчиво. Высокий результат в олимпиаде не означает автоматически высокого балла на демонстрационном экзамене. Обратное тоже верно: пройденный экзамен не гарантирует успешного выступления на чемпионате (Федоров, 2022, 38).

Обзор научной литературы

Причина разрыва не в природе компетенций, а в форматах оценивания. Олимпиадная задача обычно богаче и сложнее среднего модуля экзамена, но проверяется в более узком окне действий, а оценивают ее эксперты в режиме соревнования. Демонстрационный экзамен устроен иначе: весовые модели оценивания, единые рубрики, прозрачные для всех площадок (Дегтярев и др., 2025, 215). Подготовка, которая хорошо «закрывает» олимпиадную форму, способна оставить без отработки как раз те шаги, что в экзамене проверяются интенсивнее всего, – оформление артефакта, соблюдение временного бюджета. Сюда же корректность типовых эксплуатационных процедур.

Перспективное направление – стандартизация подготовки. Речь об измеримых индикаторах того, прошел ли обучающийся подготовку «по правилам» или все свелось к интуиции преподавателя. В отечественной педагогической литературе эту проблематику чаще обсуждают в управленческом ключе, как часть системы качества образовательной организации (Станулевич, 2021, 262). Прикладные числовые индикаторы – индексы регулярности, временной интенсивности, доли отработанных компетенций, совпадения содержательного состава тренировок и плана экзамена – есть в зарубежных работах по educational data mining и learning analytics (Romero, Ventura, 2010, 605). В практику российских колледжей они внедрены фрагментарно.

Актуальность задачи усиливают два фактора. Первый – расширение цифровой образовательной среды СПО. Занятия фиксируются в LMS, артефакты экзамена сдаются через регламентированные платформы (в разных колледжах с разной полнотой), и поведенческие следы подготовки технически можно собирать и связывать с итоговыми результатами. Второй – требования к объективности оценивания и к сопоставимости результатов между площадками. Региональные системы управления образованием и отраслевые работодатели ждут

высокой средней оценки, но вместе с ней - предсказуемой и объяснимой процедуры ее получения (Листвин, Гарт, 2024, 234).

Методология и методы исследования

Цель работы – разработать измеримую модель стандартизированной подготовки, которая выступает медиатором между олимпиадным статусом обучающегося и исходом демонстрационного экзамена, и проверить ее на пилотной выборке.

В рамках цели решаются следующие частные задачи:

1. уточнить понятийный аппарат стандартизированной подготовки в логике практики применения педагогических измерений;
2. предложить систему индексов качества подготовки (*INT*, *REG*, *COV*, *OVL*) и композитного показателя *SPI*;
3. формулировать правило эквивалентности тренировочной задачи элементу демонстрационного экзамена;
4. задать психометрические критерии надежности и валидности измерений;
5. построить логит-модель со смешанными эффектами и медиационную модель влияния олимпиадного статуса;
6. на пилотной выборке проверить пороговые значения индексов и оценить долю опосредования эффекта участия и эффекта «призерства».

Для целей работы фиксируются следующие рабочие определения, согласованные с тезаурусом практики применения педагогических измерений.

Демонстрационный экзамен – процедура итоговой оценки сформированных профессиональных компетенций, в которой обучающийся выполняет регламентированные задания на сертифицированной площадке под наблюдением независимых экспертов, а оценка выставляется по единым рубрикам в соответствии с весовой моделью оценивания.

Чемпионат профессионального мастерства – (олимпиада профессионального мастерства, чемпионат «Профессионалы») – соревновательная форма оценки, в которой задание превышает по сложности типовой модуль экзамена, оценка выставляется экспертной группой в режиме сопоставления участников, а результат фиксируется как место и набранный балл.

Стандартизированная подготовка - систематическая подготовка к демонстрационному экзамену, организованная по заданному регламенту, с фиксацией каждой тренировочной сессии (время, состав задач, отрабатываемые компетенции, артефакты), с использованием единого банка задач и проверки соответствия задач карте экзамена.

Карта компетенций демонстрационного экзамена – структурированный перечень компетенций $c \in C$ с приписанными им весами w_{cDE} , отражающими долю каждой компетенции в итоговой оценке.

Тренировочная сессия – дискретное событие подготовки, фиксируемое временной меткой, начала и окончания, набором действий и решенных задач t , и хешем итогового артефакта.

Индексы качества подготовки – числовые показатели, агрегирующие свойства последовательности тренировочных сессий: интенсивность (*INT*), регулярность (*REG*), покрытие компетенций (*COV*), контент-оверлап (*OVL*).

Медиатор – в принятом значении многоуровневого медиационного анализа: переменная, через которую частично или полностью реализуется эффект независимой переменной (олимпиадного статуса) на зависимую (исход экзамена).

Накопленный массив работ по тематике объединения олимпиадного движения и демонстрационного экзамена допускает условное разделение на четыре группы.

Работы по компетентностной модели и стандартизации СПО. В этой группе (Гамачек, 2022, 50) фиксируется переход экзамена в логику единых рубрик и описывается разбивка профессиональных стандартов на проверяемые элементы (Дегтярев, 2025, 215). Сильная сто-

рона – высокая нормативная проработанность; слабая – отсутствие количественных характеристик подготовки, через которые можно было бы прогнозировать успех на экзамене.

Работы по чемпионатному образованию и инфраструктуре площадок. В работе (Уймин, Терентьева, 2024, 218), показано, что готовность площадок и квалификация экспертов напрямую определяют валидность результатов чемпионата. Тематика поддержана нормативными требованиями к среде СПО и связана с пунктами 9 и 29 паспорта 5.8.7. В этих исследованиях формируется идея о том, что результат соревнования – не «диагноз» обучающегося, а функция от условий проведения; однако переход от качественных описаний к измеримым предикторам выступает сравнительно реже.

Работы по learning analytics и educational data mining. В работе (Romero, Ventura, 2010, 605) показано, что регулярность взаимодействия с учебной средой и временная интенсивность практик являются устойчивыми предикторами итогового результата, а методы автоматического сбора цифровых следов позволяют масштабировать оценку. Отрицательная сторона: большая часть таких работ выполнена в контексте онлайн-курсов и не учитывает специфику оценочного формата СПО, где итоговый экзамен – не серия тестов, а демонстрация артефакта по жесткой рубрике.

Работы по психометрии и медиационному анализу. Принципы Мессика (Messick, 1995, 741) закладывают основу единого взгляда на содержательную, конструктивную и прогностическую валидность. Подходы к оценке согласованности экспертов ([kappa] Козна, конкордация Кендалла W) и внутренней согласованности шкал ([alpha] Кронбаха, [omega] Макдональда) описаны в работе (McDonald, 1999, 112). Бутстрэп-оценка не прямых эффектов по Preacher и Hayes (Preacher, Hayes, 2008, 882) делает медиационный анализ применимым на пилотных выборках. Однако работ, в которых эти методы соединены в единую процедуру оценки качества подготовки к демонстрационному экзамену, в открытых источниках не зафиксировано.

Дополнительный пласт – методологические работы по адаптации педагогических моделей к подготовке профессиональных кадров. В частности, в (Уймин, 2025, 51) показано, что адаптация четырехкомпонентной модели проектирования обучения 4C/ID (Four-Component Instructional Design) дает основу для упорядочивания задач по уровням сложности и типам действий. Это методологическое решение позволяет привязывать каждую тренировочную сессию к конкретному элементу карты экзамена.

Сводный анализ показывает, что в сложившейся литературе одновременно решены три из четырех требуемых компонент – нормативная (перечень компетенций), психометрическая (валидность инструмента), и аналитическая (методы медиации), – однако недостает компоненты, связывающей их в инженерно-применимую методику с пороговыми значениями. Настоящая работа предлагает такую связь.

Нотация и дизайн. Объект исследования – обучающиеся $i = 1, \dots, N$, готовящиеся на различных площадках $s \in \{1, \dots, S\}$. Целевая переменная – бинарный исход демонстрационного экзамена $Y_i \in \{0, 1\}$, где значение 1 соответствует оценке «отлично». Предикторами выступают: статус участия в олимпиаде $Dipart \in \{0, 1\}$; статус призера $Diprize \in \{0, 1\}$; вектор ковариат z_i (стаж подготовки в месяцах, входной GPA, входной уровень компетенций по диагностическому тесту, наличие наставничества, площадка $s(i)$).

Подготовка формализуется как последовательность тренировочных сессий $j = 1, \dots, J_i$; в каждой сессии решаются задачи t из верифицированного банка. Каждая сессия фиксируется кортежем $\langle i, sessionid, t, v(t), startts, endts, actions [], errors [], hash(artifact) \rangle$, где $v(t)$ – вектор маркеров действия (компетенция, тип действия, артефакт, уровень сложности).

Качество подготовки оценивается через четыре базовых индекса.

Интенсивность (INT). Сумма верифицированного времени подготовки – аудиторных часов и взвешенной самостоятельной работы:

$$INT_i = \sum_{j=1}^{J_i} \Delta t_{ij} + \theta \cdot SR_i \quad (1)$$

где Δtij – длительность j -й сессии; SRi – учтенное время самостоятельной работы; $\theta \in [0, 1]$ – ее вес (рекомендуемое значение $\theta = 0,5$). В отличие от простого учета аудиторных часов, индекс INT отражает обе компоненты подготовки, но дисконтирует самостоятельную работу.

Регулярность (REG). Доля недель подготовки, в которые зафиксирована хотя бы одна сессия:

$$REG_i = \frac{1}{W_i \sum_{w=1}^{W_i} I_{iw}} \quad (2)$$

где W_i – общее число недель подготовки; I_{iw} – индикатор наличия сессии в w -ю неделю. Регулярность – наиболее устойчивый предиктор итогового результата в literature по learning analytics (Romero, Ventura, 2010, p. 605).

Покрытие компетенций (COV). Взвешенная доля компетенций карты демонстрационного экзамена, отработанных в ходе подготовки:

$$COV_i = \sum_{c \in C} w_c^{DE} \cdot I[c \in C_i] \quad (3)$$

где C – карта экзамена; C_i – множество компетенций, по которым у обучающегося i зафиксирована хотя бы одна сессия с задачей соответствующего типа; $w_c^{DE} \in [0, 1]$ – вес компетенции в плане экзамена ($\sum_c w_c^{DE} = 1$).

Контент-оверлап (OVL). Мера сходства распределений типов действий (A), артефактов (R) и уровней сложности (L) в тренировках и плане экзамена. Рассчитывается через взвешенный коэффициент Жаккара эмпирических распределений p_i и эталонных весов w :

$$OVL_i = \frac{\lambda_A (\sum_k \min((p_i^A)_k, (w^A)_k))}{\sum_k \max((p_i^A)_k, (w^A)_k)} + \lambda_R (...) + \lambda_L (...) \quad (4)$$

Рекомендуемые веса – $[\lambda]A = [\lambda]R = [\lambda]L = 1/3$. Слагаемые для R и L строятся аналогично слагаемому для A .

Композитный индекс подготовки (SPI). Формируется как взвешенная сумма Z -нормированных значений индексов:

$$SPI_i = \sum_{k=1}^4 \eta_k \cdot Z(X_k), \sum_k \eta_k = 1, \quad (5)$$

где $X_k \in \{INT_i, REG_i, COV_i, OVL_i\}$. Базовые веса $\eta_k = 0,25$ в дальнейшем могут уточняться через машинное обучение по критерию максимизации ΔAUC .

Чтобы избежать «натаскивания» под конкретный шаблон и обеспечить перенос навыков, тренировочная задача t сравнивается с элементом экзамена e по интегральной мере сходства. Сходство – взвешенная сумма совпадений по компетенциям, типам действий, артефактам и уровню сложности:

$$S(t, e) = \omega_C \cdot sim_C + \omega_A \cdot sim_A + \omega_R \cdot sim_R + \omega_L \cdot sim_L, \sum \omega = 1 \quad (6)$$

Рекомендуемые веса: $[\omega]C = 0,4$, $[\omega]A = [\omega]R = [\omega]L = 0,2$. Каждое слагаемое sim принимает значения в $[0, 1]$ и рассчитывается по бинарным признакам соответствующего вида.

Задача признается эквивалентной элементу экзамена, если $S(t, e) \geq \tau$, где рекомендуемое пороговое значение – $\tau = 0,70$. Такой порог сохраняет смысл задания и оставляет банку гибкость: один и тот же элемент экзамена может покрываться несколькими содержательно разными тренировочными задачами.

Надежность экспертных оценок и шкальных индикаторов проверяется по стандартным психометрическим критериям (Messick, 1995, 741).

Согласованность экспертов. Оценивается взвешенной $[\kappa]$ Коэна:

$$\kappa_w = \frac{p_o - p_e}{1 - p_e} \quad (7)$$

где p_o - наблюдаемая, p_e - ожидаемая по случаю доли согласия. Согласованность ранжирования между несколькими экспертами проверяется конкордацией Кендалла:

$$W = \frac{12S}{m^2(n^3 - n)}, S = \sum_{i=1}^n \left(R_i - \frac{m(n+1)}{2} \right)^2 \quad (8)$$

Внутренняя согласованность шкальных индикаторов. Проверяется через $[\alpha]$ Кронбаха и $[\omega]$ Макдональда:

$$\alpha = \frac{k}{k-1} \left(1 - \frac{\sigma_{\sum j}^2}{\sigma_{tot}^2} \right) \quad (9)$$

$$\omega_t = \frac{(\sum \lambda_j)^2}{(\sum \lambda_j)^2 + \sum \psi_j} \quad (10)$$

Прогностическая валидность. Оценивается по площади под ROC-кривой и Brier Score:

$$AUC = P(p_i | Y = 1 > p_j | Y = 0), BS = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (p_i - Y_i)^2 \quad (11)$$

Калибровка. Предсказаний контролируется тестом Хосмера–Лемешоу (Steyerberg et al., 2010, p. 130):

$$\chi_{HL}^2 = \sum_{g=1}^G \frac{(O_g - E_g)^2}{n_g \pi_g (1 - \pi_g)} \quad (12)$$

Управление данными. В основе – событийная запись сессий с UTC-метками и псевдонимами идентификаторов. Целостность артефактов гарантирует контрольная сумма $hash = SHA256$ (архив). Отдельно контролируется условие отсутствия мультиколлинеарности предикторов: $VIF(X_k) \leq 5$. Пропуски заполняются множественной импутацией по правилам Рубина (М наборов).

Пороги значимости. Согласованность считается достаточной при $[\kappa] w \geq 0,70$ и $W \geq 0,70$. Внутренняя согласованность – при $[\alpha]$, $[\omega]t \geq 0,80$. Модель признается улучшенной, если $\Delta AUC \geq 0,05$. Калибровка приемлема, когда в логит-линейной регрессии предсказаний $[\alpha] \approx 0$ и $\beta \approx 1$.

Исход экзамена прогнозируется логит-моделями со смешанными эффектами. Площадь учитывает случайный эффект $us(i)$. Базовая модель содержит только олимпиадные предикторы и ковариаты:

$$\text{logit } P(Y_i = 1) = \beta_0 + \beta_1 D_i^{part} + \beta_2 D_i^{prize} + z_i^T \gamma + u_{s(i)} \quad (13)$$

Расширенная модель включает блок индексов подготовки в качестве медиаторов:

$$\text{logit } P(Y_i = 1) = \beta'_0 + \beta'_1 D_i^{part} + \beta'_2 D_i^{prize} + \sum_{m=1}^4 \delta_m M_{m,i} + z_i^T \gamma' + u'_{s(i)} \quad (14)$$

где $M_{m,i} \in \{INT_i, REG_i, COV_i, OVL_i\}$. Снижение коэффициентов β'_1, β'_2 по сравнению с β_1, β_2 интерпретируется как опосредованный эффект.

Непрямой эффект (IE) и доля опосредования (PM) вычисляются как:

$$IE = \sum_{m=1}^4 \alpha_{2m} \cdot \delta_m, PM = \frac{IE}{TE} \quad (15)$$

где $[\alpha] 2m$ – коэффициент олимпиадного статуса в уравнении медиатора, TE – общий эффект. Доверительные интервалы для IE получаются перцентильным бутстрэпом ($B = 5000$) по индексу i .

Дизайн. С сентября 2025 по январь 2026 года проведено пилотное рандомизированное контролируемое исследование. В выборку включены $N = 50$ обучающихся СПО по специальности 09.02.06 «Сетевое и системное администрирование» с трех площадок-партнеров. Простой рандомизацией обучающиеся распределены на экспериментальную ($n = 25$) и контрольную ($n = 25$) группы.

Условия. Экспериментальная группа готовилась по предложенной методике: еженедельный контроль показателей INT , REG , COV , OVL ; правило эквивалентности задач $\tau \geq 0,70$; единые рубрики оценивания тренировочных артефактов; цифровая фиксация сессий в LMS . Контрольная группа получала традиционное экспертное сопровождение без формализованных порогов и автоматического трекинга метрик.

Целевая переменная. Бинарный исход демонстрационного экзамена: «отлично» ($Y = 1$) и «не отлично» ($Y = 0$). Предикторы – статус участия и статус призера в чемпионатах профмастерства за предшествующий учебный год.

Этика и согласия. Обучающиеся и их законные представители (для несовершеннолетних) подписали информированное согласие на обработку персональных и поведенческих данных в рамках 152-ФЗ; данные хранились в обезличенном виде, идентификаторы – псевдонимы.

Результаты исследования

На входе группы статистически эквивалентны.

Таблица 1.
Характеристики групп на входе (составлено авторами)

Показатель	Эксп. (n=25)	Контр. (n=25)	p (t / [chi] ²)
Возраст, лет ($M \pm SD$)	$19,2 \pm 1,1$	$19,4 \pm 1,3$	0,58
Входной GPA (5-балльная шкала)	$4,1 \pm 0,4$	$4,0 \pm 0,5$	0,42
Доля участников олимпиад, %	68	72	0,76
Стаж подготовки, мес. ($M \pm SD$)	$8,3 \pm 2,1$	$7,9 \pm 2,4$	0,51
Входной уровень компетенций, %	62 ± 9	64 ± 11	0,49

Различия между группами по всем показателям статистически не значимы ($p > 0,05$).

По окончании цикла подготовки в экспериментальной группе зафиксированы значимо более высокие значения индексов качества подготовки.

Таблица 2.
Значения индексов стандартизированной подготовки (составлено авторами)

Индекс	Порог	Эксп. группа	Контр. группа	Δ (Э–К)
INT, ч	≥ 20	$24,3 \pm 5,1$	$16,8 \pm 6,3$	+ 7,5*
REG	$\geq 0,7$	$0,78 \pm 0,12$	$0,59 \pm 0,18$	+ 0,19*
COV	$\geq 0,6$	$0,71 \pm 0,09$	$0,54 \pm 0,14$	+ 0,17*

**ТЕОРИИ, МОДЕЛИ И ТЕХНОЛОГИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ
И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

Индекс	Порог	Эксп. группа	Контр. группа	Δ (Э–К)
OVL	$\geq 0,7$	$0,74 \pm 0,08$	$0,61 \pm 0,13$	+ 0,13*
SPI (Z-score)	-	$0,82 \pm 0,41$	$-0,31 \pm 0,53$	+ 1,13*

* помечены различия, значимые на уровне $p < 0,05$. Психометрические параметры удовлетворяют принятым порогами: согласованность экспертов $[\kappa_{\text{арра}}]_v = 0,82$, конкордация Кендалла $W = 0,79$, $[\alpha]$ Кронбаха для блока индексов = 0,86.

Исходы экзамена. Доля оценок «отлично» в экспериментальной группе значимо выше, чем в контрольной; средний балл и доля преодолевших порог также сдвинулись в положительную сторону.

Таблица 3.
Исходы демонстрационного экзамена (составлено авторами)

Исход	Эксп. группа	Контр. группа	OR [95% CI]
Оценка «отлично», %	18 (72%)	11 (44%)	3,27 [1,12; 9,58]*
Средний балл (100-балльная шкала)	$86,4 \pm 7,2$	$78,1 \pm 9,8$	+ 8,3*
Доля преодолевших порог, %	96	84	2,18 [0,41; 11,6]

ROC-анализ показывает, что добавление блока индексов подготовки в модель повышает прогностическую точность с $AUC = 0,58$ до $AUC = 0,69$ ($\Delta AUC = 0,11$). Тест Хосмера–Лемешоу не отвергает гипотезу о хорошей калибровке расширенной модели ($p = 0,42$).

Медиационный анализ. Бутстрэп – 5000 ресемплирований по обучающимся.

Таблица 4.
Медиационный анализ влияния олимпиадного статуса на исход экзамена через стандартизированную подготовку (составлено авторами)

Эффект / путь	Оценка (logit)	95% ДИ (бутстрэп)	p-знач.	PM
Общий эффект участия	0,603	[0,210; 0,996]	0,003	-
Прямой эффект участия	0,127	[-0,085; 0,339]	0,241	-
Непрямой эффект участия	0,476	[0,171; 0,819]	<0,001	0,79
Общий эффект призерства	1,477	[0,850; 2,104]	<0,001	-
Прямой эффект призерства	1,152	[0,620; 1,684]	<0,001	-
Непрямой эффект призерства	0,325	[0,025; 0,697]	0,036	0,22

Картина медиации различается для двух групп олимпиадных статусов. Для участников эффект на вероятность получения «отлично» практически целиком объясняется качеством подготовки: непрямой эффект значим, прямой при $p = 0,241$ значимым не оказался – это близко к классической картине полного опосредования. Для призеров статус сохраняет самостоятельный вклад ($DE = 1,152$; $p < 0,001$), что согласуется с интуицией: призовые места несут информацию о качестве самого обучающегося, не сводимую к параметрам тренировок. Тем не менее даже здесь около 22% эффекта проходит через интенсивность и регулярность подготовки.

Полученное значение доли опосредования для участников ($PM = 0,79$) согласуется с типичными оценками в работах по learning analytics, где регулярность и интенсивность прак-

тик объясняют от 60 до 85% эффекта учебной активности на итоговый результат (Romero, Ventura, 2010, 605). Сохранение значимого прямого эффекта призерства согласуется с положением о том, что соревновательный статус несет информацию о генеральных способностях, не редуцируемых к учебной активности (Дьяченко, 2020, 103)

Олимпиада в полученной картине работает как «триггер вовлеченности»: участие повышает вероятность того, что обучающийся включится в систематический тренинг с высокими значениями INT и REG. Отсюда – практическая рекомендация: ставка только на участие в чемпионатах без сопутствующего стандартизированного сопровождения предсказуемо проиграет ставке, в которой чемпионат используется как мотивационный «вход» в регулярную подготовку.

Ограничения исследования. Пилотная выборка мала ($N = 50$), площадок всего три – надежно оценить вариативность коэффициентов между регионами на таких данных не выходит. Индекс OVL опирается на экспертно заданные веса $[\lambda]A$, $[\lambda]R$, $[\lambda]L$; оптимизировать их по критерию максимизации ΔAUC можно, но нужны расширенные данные. Модель проверена на одной специальности (09.02.06). Перенос на смежные специальности – 09.02.07 «Информационные системы и программирование» и 10.02.05 «Обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем» – требует отдельной валидации.

Внедрение методики в практику колледжа упирается в несколько трудностей. Кадровая: преподаватель-наставник должен принять переход от «авторской» логики подготовки к стандартизированной, а это обычно означает методическое сопровождение и пересмотр рабочих нагрузок. Техническая: автоматический расчет индексов возможен там, где LMS-среда фиксирует сессии машинно-читаемо, а не только в журнале. Нормативная: поведенческие данные подготовки собираются с согласия обучающихся и при соблюдении 152-ФЗ о персональных данных. Есть и четвертая, менее очевидная, – организационная: расписание тренировок приходится строить так, чтобы условие REG вообще было выполнимо.

Дальнейшие работы будут направлены на: (а) мультицентровую валидацию коэффициентов модели на расширенной выборке регионов и специальностей; (б) подбор весов η_k в SPI и $[\lambda]^*$ в OVL методами машинного обучения по критерию максимизации ΔAUC ; (в) разработку программного модуля автоматического расчета индексов в LMS-среде образовательной организации; (г) интеграцию с системами раннего предупреждения о риске неуспешного прохождения экзамена.

Заключение

В работе предложена и эмпирически проверена методика стандартизированной подготовки. Она работает как медиатор между участием в чемпионатах профессионального мастерства и исходом демонстрационного экзамена.

Сформулирована система из четырех индексов качества подготовки: интенсивность (INT), регулярность (REG), покрытие компетенций (COV), контент-оверлап (OVL). Над ними надстроен композитный индекс SPI. Предложено правило эквивалентности тренировочной задачи элементу демонстрационного экзамена – порог тут $\tau \geq 0,70$. Описана психометрическая процедура контроля надежности измерений и логит-модель со смешанными эффектами, поддерживающая многоуровневый медиационный анализ. На пилотной выборке $N = 50$ подтверждено, что эффект участия в олимпиаде на вероятность получения «отлично» практически целиком опосредован качеством подготовки ($PM = 0,79$; 95% ДИ $[0,65; 0,88]$; $p < 0,001$); для призеров доля опосредования составляет 0,22 при сохранении значимого прямого эффекта статуса. Включение блока индексов в модель повышает прогностическую точность на $\Delta AUC = 0,11$. Установлены рабочие пороги индексов: $INT \geq 20$ ч, $REG \geq 0,7$, $COV \geq 0,6$, $OVL \geq 0,7$.

Результаты пригодны для перехода от экспертно-интуитивной оценки готовности к измеримому управлению качеством подготовки в системе СПО. Дальнейшие исследования направлены на мультицентровую валидацию модели, оптимизацию весов методами машинного обучения и разработку программного модуля автоматического расчета индексов в LMS-

среде. Тематика работы соответствует направлениям 4, 11, 14, 29 и 35 паспорта научной специальности 5.8.7.

Список литературы

- Гамачек Т.В. Демонстрационный экзамен как форма проведения государственной итоговой аттестации по программам среднего профессионального образования // *Техник транспорта: образование и практика*. 2022. Т. 3, № 1. С. 49–56. DOI: 10.46684/2687-1033.2022.1.49-56
- Дегтярев С.С., Терентьева О.А., Уймин А.Г. Оптимизация процесса разработки оценочных материалов для проведения государственной итоговой аттестации обучающихся СПО по специальности 09.02.06 «Сетевое и системное администрирование» в форме демонстрационного экзамена // *Russian Journal of Education and Psychology*. 2025. Т. 16, № 3. С. 211–236. DOI: 10.12731/2658-4034-2025-16-3-751
- Дьяченко Н.С., Карабанова Л.Б., Халимова Н.М. Конкурсное движение как одно из условий развития профессиональных компетенций студентов СПО // *Мир науки, культуры, образования*. 2020. № 2 (81). С. 101–105. DOI: 10.24411/1991-5497-2020-00220
- Листвин А.А., Гарт М.А. Профессионалитет как ступень среднего профессионального образования // *Вестник Череповецкого государственного университета*. 2024. № 3 (120). С. 231–241. DOI: 10.23859/1994-0637-2024-3-120-19
- Станулевич О.Е. Анализ изменений макета образовательного стандарта среднего профессионального образования // *Техник транспорта: образование и практика*. 2021. Т. 2, № 3. С. 261–266. DOI: 10.46684/2687-1033.2021.3.261-266
- Уймин А.Г., Терентьева О.А. Исследование организационных аспектов создания среды для раскрытия потенциала участников чемпионата профессионального мастерства // *Вестник Череповецкого государственного университета*. 2024. № 2 (119). С. 213–234. DOI: 10.23859/1994-0637-2024-2-119-16
- Уймин А.Г. Практическая адаптация педагогической методологии 4C/ID в рамках преподавания дисциплины «Сети и системы передачи информации» в системе профессионального образования // *Russian Journal of Education and Psychology*. 2025. Т. 16, № 5. С. 46–76. DOI: 10.12731/2658-4034-2025-16-5-822.
- Федоров В.А., Третьякова Н.В., Тюрина Г.А. Сопряжение процедур государственной итоговой аттестации и независимой оценки квалификаций в СПО // *Профессиональное образование и рынок труда*. 2022. Т. 10, № 3 (50). С. 35–54. DOI: 10.52944/PORT.2022.50.3.007.
- Ferguson R. Learning analytics: drivers, developments and challenges // *International Journal of Technology Enhanced Learning*. 2012. Vol. 4, № 5-6. P. 304–317. DOI: 10.1504/IJTEL.2012.051816.
- Hosmer D.W., Lemeshow S., Sturdivant R.X. Applied logistic regression. 3rd ed. Hoboken, NJ: Wiley, 2013.
- McDonald R.P. Test theory: A unified treatment. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1999.
- Messick S. Validity of psychological assessment: Validation of inferences from persons' responses and performances as scientific inquiry into score meaning // *American Psychologist*. 1995. Vol. 50, № 9. P. 741–749. DOI: 10.1037/0003-066X.50.9.741.
- Preacher K.J., Hayes A.F. Asymptotic and resampling strategies for assessing and comparing indirect effects in multiple mediator models // *Behavior Research Methods*. 2008. Vol. 40, № 3. P. 879–891. DOI: 10.3758/BRM.40.3.879.
- Romero C., Ventura S. Educational data mining: A review of the state of the art // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews*. 2010. Vol. 40, № 6. P. 601–618. DOI: 10.1109/TSMCC.2010.2053532.

Steyerberg E.W., Vickers A.J., Cook N.R. [et al.]. Assessing the performance of prediction models: A framework for traditional and novel measures // *Epidemiology*. 2010. Vol. 21, № 1. P. 128–138. DOI: 10.1097/EDE.0b013e3181c30fb2.

Информация об авторах

Уймин Антон Григорьевич; старший преподаватель; кафедра безопасности информационных технологий; Российский государственный университет нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина (119991, г. Москва, проспект Ленинский, дом 65, корпус 1); E-mail: au-mail@ya.ru; ORCID: 0000-0003-1572-5488;

Шумский Антон Дмитриевич; старший преподаватель; кафедра безопасности информационных технологий Российский государственный университет нефти и газа (НИУ) имени И. М. Губкина (119991, г. Москва, проспект Ленинский, дом 65, корпус 1); E-mail: shumsky.a@gubkin.ru; ORCID: 0009-0006-7922-3689

SCIENTIFIC AND METHODOLOGICAL SUPPORT FOR INTEGRATION OF OLYMPIAD MOVEMENT AND DEMONSTRATION EXAM: MEASURABLE PREPARATION QUALITY INDICES AND MEDIATION ANALYSIS

Uymin A. G.	Gubkin University
Senior Lecturer	
Shumsky A. D.	Gubkin University
Senior Lecturer	

Abstract. Problem Statement: a functional contradiction has emerged in vocational secondary education in Russia. Professional skill olympiads and the demonstration exam formally rely on the same competency model, yet a high olympiad result does not guarantee successful completion of the exam. Existing preparation practice is dominated by expert judgments and does not offer quantitative reference points linking training regularity, competency coverage and content overlap with the exam map. The objective of this work: is to develop a measurable model of standardized preparation acting as a mediator between olympiad status and the demonstration exam outcome, and to verify its predictive and mediation validity empirically. Methods: the competency-based approach; psychometric procedures (weighted Cohen's [kappa], Kendall's W, Cronbach's [alpha], McDonald's [omega]); mixed-effects logistic regression with site-level random effects; ROC analysis; Hosmer–Lemeshow test; multilevel mediation analysis with bootstrap (B = 5000) estimation of indirect effects. Novelty: a coherent system of four preparation quality indices is proposed - intensity (INT), regularity (REG), competency coverage (COV) and content overlap (OVL) - together with a composite indicator SPI; an equivalence rule between a training task and a demonstration exam element is formalized via a weighted similarity measure; preparation quality is treated as a mediator of the olympiad effect within a mixed-effects logistic model. Results: on a pilot sample (N = 50) the olympiad participation effect on the probability of receiving an excellent grade is almost fully mediated by preparation quality (proportion mediated PM = 0.79; 95% CI [0.65; 0.88]; $p < 0.001$). Including the index block raises predictive accuracy by $\Delta\text{AUC} = 0.11$ (from 0.58 to 0.69). Working thresholds are established: $\text{INT} \geq 20$ h, $\text{REG} \geq 0.7$, $\text{COV} \geq 0.6$, $\text{OVL} \geq 0.7$. Practical Relevance: the methodology is applicable in vocational education organizations for planning preparation to championships and the demonstration exam, for the transition from expert-intuitive assessment of readiness to measurable

quality management, for embedding automatic computation of metrics in an LMS environment, and for improving the comparability of outcomes across sites and instructors.

Keywords: demonstration exam, olympiad preparation, championship education, standardization of vocational education, pedagogical measurements, preparation quality indices, mediation analysis, assessment validity, digital learning environment

For citation: Uymin A. G., Shumsky A. D. (2026). Scientific and methodological support for integration of olympiad movement and demonstration exam: Measurable preparation quality indices and mediation analysis. *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 3(43), 117–129. <https://doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-117-129>

Copyright: © A. G. Uymin, A. D. Shumsky (2026). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License.

References

- Degtyarev, S. S., Terent'eva, O. A., Uymin, A. G. (2025). Optimization of the development process of assessment materials for conducting state final certification of vocational students in specialty 09.02.06 in the form of a demonstration exam. *Russian Journal of Education and Psychology*, 16(3), 211–236. DOI: 10.12731/2658-4034-2025-16-3-751
- Dyachenko, N. S., Karabanova, L. B., Khalimova, N. M. (2020). Competition movement as one of the conditions for developing professional competencies of vocational education students. *Mir nauki, kul'tury, obrazovaniya*, 2(81), 101–105. DOI: 10.24411/1991-5497-2020-00220 (In Russ.)
- Fedorov, V. A., Tretyakova, N. V., Tyurina, G. A. (2022). Combining the procedures of the state final certification with independent assessment of qualifications in secondary vocational education. *Professional'noe obrazovanie i rynek truda*, 10(3), 35–54. (In Russ., abstract in Eng.)
- Ferguson, R. (2012). Learning analytics: drivers, developments and challenges. *International Journal of Technology Enhanced Learning*, 4(5/6), 304–317.
- Gamachek, T. V. (2022). Demonstration exam as a form of state final certification for programs of secondary vocational education. *Transport Technician: Education and Practice*, 3(1), 49–56. (In Russ., abstract in Eng.)
- Hosmer, D. W., Lemeshow, S., Sturdivant, R. X. (2013). *Applied logistic regression* (3rd ed.). Hoboken, NJ: Wiley.
- Listvin, A. A., Gart, M. A. (2024). Professionalitet as a stage of secondary vocational education. *Vestnik Cherepovetskogo gosudarstvennogo universiteta*, 3(120), 231–241. (In Russ., abstract in Eng.)
- McDonald, R. P. (1999). *Test theory: A unified treatment*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Messick, S. (1995). Validity of psychological assessment: Validation of inferences from persons' responses and performances as scientific inquiry into score meaning. *American Psychologist*, 50(9), 741–749.
- Preacher, K. J., Hayes, A. F. (2008). Asymptotic and resampling strategies for assessing and comparing indirect effects in multiple mediator models. *Behavior Research Methods*, 40(3), 879–891.
- Romero, C., Ventura, S. (2010). Educational data mining: A review of the state of the art. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews*, 40(6), 601–618.

- Stanulevich, O. E. (2021). Analysis of changes in the layout of the educational standard of secondary vocational education. *Transport Technician: Education and Practice*, 2(3), 261–266. (In Russ., abstract in Eng.)
- Steyerberg, E. W., Vickers, A. J., Cook, N. R., Gerds, T., Gonen, M., Obuchowski, N., Pencina, M. J., Kattan, M. W. (2010). Assessing the performance of prediction models: A framework for traditional and novel measures. *Epidemiology*, 21(1), 128–138.
- Uymin, A. G., Terent'eva, O. A. (2024). A study of organizational aspects of building an environment for unlocking the potential of professional skill championship participants. *Vestnik Cherepovetskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2(119), 213–234.
- Uymin, A. G. (2025). Practical adaptation of the 4C/ID pedagogical methodology in teaching the discipline “Networks and Information Transmission Systems” in the vocational education system. *Russian Journal of Education and Psychology*, 16(5), 46–76.

Information about the authors

Anton G. Uymin, Senior Lecturer; Department of Information Technology Security; Gubkin Russian State University of Oil and Gas (119991, Moscow, Leninsky Prospekt, 65, Bldg. 1, Russia); E-mail: au-mail@ya.ru; ORCID: 0000-0003-1572-5488;

Anton D. Shumsky, Senior Lecturer; Department of Information Technology Security; Gubkin Russian State University of Oil and Gas (119991, Moscow, Leninsky Prospekt, 65, Bldg. 1, Russia); E-mail: shumsky.a@gubkin.ru; ORCID: 0009-0006-7922-3689

Статья поступила в редакцию	26.05.2026
Принята к публикации	15.08.2026
Статья опубликована	18.09.2026

МЕТОДОЛОГИЯ И ТЕХНОЛОГИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-3-130-142

УДК
37.016:004

ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ОБУЧЕНИЯ ДЕТЕЙ С ОГРАНИЧЕННЫМИ ВОЗМОЖНОСТЯМИ ЗДОРОВЬЯ ТЕХНОЛОГИЯМ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В СИСТЕМЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Михайленко Максим Витальевич
аспирант

Удалов Сергей Робертович
д.п.н., профессор

Омский государственный педагогический
университет

Омский государственный педагогический
университет

Аннотация. В статье рассматриваются психолого-педагогические условия обучения детей с ограниченными возможностями здоровья технологиям искусственного интеллекта в системе дополнительного образования. Цель работы состоит в теоретическом обосновании данных условий и описании их реализации в электронном курсе «Искусственный интеллект для детей». Используются анализ и систематизация научно-методических источников, входная и итоговая диагностика, педагогическое наблюдение, анализ практических заданий и портфолио. Представлена содержательно-процессуальная структура курса, включающего семь последовательно связанных модулей, единый маршрут изучения материала и вариативные способы выполнения заданий. Поисковая апробация проведена на базе БУ ДО Омской области «Омская областная станция юных техников» с участием 15 обучающихся в возрасте 10–15 лет: одного обучающегося с нарушениями слуха и речи, семи обучающихся с задержкой психического развития и семи обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата. Занятия проводились индивидуально. Полученные данные свидетельствуют об умеренной положительной динамике в понимании базовых понятий ИИ, выполнении пошаговых заданий и самостоятельном использовании цифровых инструментов. В связи с малочисленностью выборки результаты рассматриваются как предварительные.

Ключевые слова: обучение технологиям искусственного интеллекта, дети с ограниченными возможностями здоровья, система дополнительного образования, персонализированный образовательный маршрут, электронный курс

Для цитирования: Михайленко М.В., Удалов С.Р. Психолого-педагогические условия обучения детей с ограниченными возможностями здоровья технологиям искусственного интеллекта в системе дополнительного образования // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 3 (43). С. 130–142. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-130-142

Права: © М.В. Михайленко, С.Р. Удалов (2026). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И. А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

Введение

Участники исследования имели различные образовательные потребности. В зависимости от вида образовательных потребностей учеников, учебные трудности для них могут быть связаны с темпом обработки информации, удержанием последовательности действий, особенностями моторного ввода, восприятием устной инструкции или потребностью в дополнительной визуальной опоре. Поскольку занятия проводились индивидуально, содержание, темп и способы выполнения заданий уточнялись с учётом возможностей конкретного обучающегося и отражались в его персонализированном образовательном маршруте. Такой формат может быть реализован в системе дополнительного образования, обладающей необходимой организационной гибкостью.

Как отмечают О. А. Карабанова и Н. Н. Малофеев, качественное образование детей с ОВЗ требует учёта их особых образовательных потребностей и вариативности условий обучения (Карабанова, 2019). В системе дополнительного образования данные положения могут быть реализованы за счёт гибкого содержания, индивидуального формата занятий и выбора доступных способов учебной деятельности.

В настоящее время в системе дополнительного образования для детей с ограниченными возможностями здоровья особое значение приобретает формирование информационных и технических компетенций. Программы дополнительного образования позволяют создавать гибкие условия для освоения цифровых технологий, технического творчества и практико-ориентированных навыков с учётом возможностей конкретного обучающегося. А.А. Витвицкая рассматривает генеративный искусственный интеллект как ресурс инновационного образования, расширяющий способы представления материала и персонализированной поддержки обучающихся (Витвицкая, 2024). Следовательно, система дополнительного образования может использоваться как среда последовательного и доступного знакомства детей с ОВЗ с технологиями искусственного интеллекта.

В настоящей статье под технологиями искусственного интеллекта понимаются цифровые методы и сервисы, основанные на обработке данных, алгоритмах машинного обучения, нейронных сетях, распознавании и генерации текста, изображений и речи. Такое понимание позволяет рассматривать их одновременно как содержание обучения и как инструменты поддержки учебной деятельности.

Разработка адаптированной методики обучения технологиям искусственного интеллекта способна обеспечить доступность современных цифровых инструментов. Использование специальных педагогических подходов, персонализации учебного процесса и адаптированных цифровых средств позволяет учитывать образовательные потребности обучающихся при освоении технологического материала. Включение тем, связанных с технологиями искусственного интеллекта, в программы дополнительного образования может способствовать развитию логического и алгоритмического мышления, навыков работы с информацией, цифровой самостоятельности и профориентации детей с ОВЗ.

Анализ научных источников позволяет выявить противоречие между потребностью в обучении детей с ОВЗ технологиям искусственного интеллекта в доступной практико-ориентированной форме и недостаточной разработанностью психолого-педагогических условий такого обучения в системе дополнительного образования. Указанное противоречие определяет проблему исследования: какие психолого-педагогические условия и способы организации индивидуальных занятий обеспечивают доступное освоение технологий искусственного интеллекта детьми с ОВЗ? Цель статьи состоит в теоретическом обосновании данных условий и описании их реализации в электронном курсе «Искусственный интеллект для детей».

Обзор литературы

Образование детей с ограниченными возможностями здоровья занимает ключевое место в рамках государственной образовательной политики, направленной на обеспечение равноправного доступа к качественному образованию для всех категорий обучающихся. В соответствии со статьёй 2 Федерального закона № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации», обучающимися с ограниченными возможностями здоровья (ОВЗ) признаются лица, обладающие физическими и/или психическими нарушениями, подтверждёнными решением психолого-медико-педагогической комиссии, которые создают препятствия для получения образования без создания специальных условий (ФЗ «Об образовании в РФ», 2019).

С позиций психолого-педагогической науки, определение данной категории обучающихся раскрывает М. В. Данилова, которая подчёркивает, что обучающиеся с ОВЗ испытывают стойкие сложности в освоении образовательных программ, вызванные различными видами нарушений (физическими, психическими, интеллектуальными), что обуславливает необходимость разработки и реализации специализированных условий обучения и адаптированных методик (Данилова, 2015).

На современном этапе развития специального образования особое внимание уделяется индивидуальному подходу в обучении. В дополнительных программах он может быть реализован посредством вариативных и дифференцированных заданий, учитывающих стартовый уровень и возможности обучающегося. Применение информационных и интеллектуальных технологий расширяет возможности дифференцированного и индивидуализированного обучения (Гусейнова, 2022; Новоселов, 2025). А.Е. Сережкина, Н.В. Соколов и В.Г. Виноградский, признавая образовательный потенциал ИИ, одновременно обращают внимание на необходимость педагогического контроля и осознанного отношения к результатам его применения (Сережкина, 2024; Соколов, 2022).

По мнению О. В. Коломийцевой, информационно-цифровые ресурсы следует включать в обучение детей с ОВЗ как средство вариативного представления материала и организации доступного учебного взаимодействия (Коломийцева, 2024). Сходную позицию занимает В. Г. Рындак, рассматривающий цифровизацию как одно из направлений развития инклюзивного образования (Рындак, 2021). Н. А. Иванова и И. И. Архипова связывают использование информационных технологий с обновлением образовательного процесса и расширением набора применяемых педагогических средств (Иванова, 2023). В системе дополнительного образования эти положения позволяют сочетать электронный курс, интерактивные задания и индивидуальное сопровождение.

Е. С. Слюсарева подчёркивает значение комплексного сопровождения и создания специальных условий, позволяющих адаптировать образовательную программу к потребностям обучающегося с ОВЗ (Слюсарева, 2014). С. В. Алёхина обращает внимание на психологическую и профессиональную готовность педагога к инклюзивному взаимодействию (Алёхина, 2012). Сопоставление этих позиций показывает, что доступность курса обеспечивается не только цифровыми средствами, но и готовностью педагога изменять темп, объём помощи и способ предъявления задания.

А. И. Мещерякова и Е. Д. Базорова связывают эффективность обучения детей с нарушениями опорно-двигательного аппарата с учётом их психолого-педагогических и моторных особенностей, адаптацией содержания и применением специальных технических средств (Мещерякова, 2012). А. А. Смирнова подчёркивает значение индивидуального подхода при двигательных нарушениях, а J. Lukins и соавторы – необходимость подготовки педагогов к работе в инклюзивной среде (Смирнова, 2019; Lukins, 2023). Следовательно, цифровое средство само по себе не обеспечивает доступность без педагогического сопровождения и учёта возможностей конкретного ребёнка.

Особенности психолого-педагогического сопровождения предполагают активное развитие компенсаторных стратегий, использование альтернативных способов коммуникации, визуальных и предметных средств наглядности, а также применение игровых

методов и частую смену видов деятельности (Михайленко, 2025). Ключевыми педагогическими принципами в работе с детьми с ОВЗ выступают доступность учебного материала, наглядность, поэтапное формирование умений и навыков, а также систематическое позитивное подкрепление учебных достижений (Форманова, 2012; Akhlan, 2024).

Положения В. И. Снегуровой о педагогическом моделировании используются в настоящем исследовании как основание для согласования цели, содержания, организации учебной деятельности и оценки результатов курса, а не как готовая модель обучения детей с ОВЗ технологиям искусственного интеллекта (Снегурова, 2010).

При проектировании учебного курса и цифровых образовательных ресурсов положения Н. Е. Сурковой используются как методический ориентир для отбора дидактических принципов разработки и применения цифровых средств обучения (Суркова, 2007):

- принцип научности, который предусматривает формирование научного мировоззрения на основе правильных представлений о методах научного познания;
- принцип доступности предполагает адаптирование учебного материала, его теоретической сложности и глубины изучения согласно познавательным, индивидуальным и психологическим особенностям учащихся с ОВЗ;
- принцип систематичности и последовательности означает необходимость последовательного усвоения учениками определённой системы знаний в предметной области;
- принцип наглядности учитывает необходимость чувственного восприятия изучаемых объектов, макетов или моделей;
- принцип прочности усвоения знаний учитывает глубокое осмысление учебной информации и её рассредоточенное запоминание.

Обобщение рассмотренных позиций показывает, что обучение детей с ОВЗ технологиям искусственного интеллекта должно сочетать персонализацию, доступное представление материала, поэтапную практическую деятельность и педагогически контролируемое использование цифровых инструментов. Данные положения определили организацию поисковой апробации и выбор методов исследования.

Материалы и методы

Исследование включало теоретический и эмпирический этапы. Теоретический этап предусматривал анализ и систематизацию научно-методических источников по проблемам обучения детей с ОВЗ, персонализации дополнительного образования и применения технологий искусственного интеллекта. Поисковая апробация проводилась с 30 марта по 10 мая 2026 г. на базе Бюджетного учреждения Омской области дополнительного образования «Омская областная станция юных техников». В ней участвовали 15 обучающихся в возрасте 10 – 15 лет: один обучающийся с нарушениями слуха и речи, семь обучающихся с задержкой психического развития и семь обучающихся с нарушениями опорно-двигательного аппарата.

Занятия по материалам электронного курса «Искусственный интеллект для детей» проводились индивидуально два раза в неделю на платформе Moodle; продолжительность одного занятия составляла 30–40 минут, общий объём апробации – 14 занятий. Для каждого обучающегося проектировался персонализированный образовательный маршрут, включавший стартовую диагностику, выбор темпа, способа предъявления материала и объёма педагогической помощи. Использовались входная и итоговая диагностика, педагогическое наблюдение, анализ практических заданий и портфолио. Оценивались понимание базовых понятий ИИ, выполнение последовательности действий, самостоятельность при работе с цифровыми сервисами, соблюдение правил безопасного использования ИИ и познавательная активность. Контрольная группа на данном этапе не формировалась; вследствие малочисленности выборки результаты анализировались описательно, без применения критериев математической статистики.

МЕТОДОЛОГИЯ И ТЕХНОЛОГИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

На основании проведённого анализа и материалов поисковой апробации рассмотрим, как выделенные психолого-педагогические условия реализуются в структуре электронного курса «Искусственный интеллект для детей».

Курс ориентирован на формирование базовой ИИ-грамотности, понимание роли данных, алгоритмов и интеллектуальных систем, развитие навыков безопасного и ответственного взаимодействия с ИИ-сервисами. При индивидуальной организации занятий педагог определяет темп, последовательность материалов, способ ответа и объём помощи в рамках персонализированного образовательного маршрута.

Каждый модуль строится по единой логике: маршрут модуля, три обучающие темы, краткая памятка, короткое видео или аудиообзор, основное интерактивное упражнение, практическая работа, тест или диагностика и рефлексия. Повторяемость этой структуры снижает неопределённость и помогает обучающемуся заранее понимать последовательность действий.

Основное содержание сохраняется единым для всех участников, однако варьируются форма предъявления информации, количество шагов и примеров, способ управления и ответа, время выполнения, уровень подсказки и форма итогового продукта. Для обучающегося с нарушениями слуха и речи используются текстовое дублирование, субтитры и визуальные схемы; для обучающихся с НОДА – голосовой ввод, крупные элементы управления и сокращение ручного набора; для обучающихся с ЗПР – микрообучение, работа по образцу, повторение и игровая обратная связь.

Содержательно-процессуальная структура семи модулей курса приведена в таблице 1.

Таблица 1.

Содержательно-процессуальная структура курса «Искусственный интеллект для детей»

Модуль и основные темы	Планируемый результат и основное задание	Способы реализации и адаптации
1. Введение в искусственный интеллект Темы: что такое ИИ; как он работает; ИИ вокруг нас.	Объясняет понятие ИИ, приводит 2 – 3 жизненных примера, отличает обычную программу от интеллектуального сервиса. Практическая работа: «ИИ вокруг меня».	Текст, озвучка, субтитры, визуальные карточки, три уровня объёма задания, письменный, устный или голосовой ответ.
2. Машины учатся думать: алгоритмы и нейросети Темы: алгоритм; нейросеть; машинное обучение.	Составляет простой алгоритм, объясняет роль данных и признаков, обучает учебную модель. Основные упражнения: «Пошаговый исполнитель» и «Тренер ИИ».	Голосовое управление и крупные команды для НОДА; короткие маршруты и образцы для ЗПР; текстовые схемы, субтитры и визуальная дорожка для нарушений слуха.
3. Искусственный интеллект вокруг нас Темы: роботы; голосовые ассистенты и чат-боты; безопасное взаимодействие.	Различает простого исполнителя и интеллектуальную систему, составляет сценарий цифрового помощника. Практическая работа: «Создай сценарий цифрового помощника».	Голосовой или текстовый режим, готовые команды и сценарии, крупные зоны выбора, пиктограммы безопасности, короткие комиксы.

Модуль и основные темы	Планируемый результат и основное задание	Способы реализации и адаптации
4. Практическое использование искусственного интеллекта Темы: Python; условия и сценарии бота; промпты и мини-проект.	Понимает назначение простого кода, собирает условие, формулирует структурированный запрос. Практическая работа: «Мой первый цифровой помощник».	Готовые шаблоны и блочные элементы, голосовой ввод, автоматические отступы, один новый оператор за занятие, письменные и визуальные подсказки.
5. Этика, безопасность и право при использовании ИИ Темы: этика; конфиденциальность; авторство.	Распознаёт риск, защищает персональные данные, проверяет сведения и указывает роль ИИ. Практическая работа: «Паспорт безопасности моего ИИ-проекта».	Карточки «можно / нельзя / спроси взрослого», короткие ситуации, голосовой выбор, письменные диалоги, схемы «человек → ИИ → результат».
6. Возможности будущей профессии Темы: команда ИИ; профессии; личные интересы; первые шаги.	Соотносит профессиональные роли со своими интересами и выбирает реалистичный следующий шаг. Практическая работа: «Мой маршрут в ИИ».	Карточки профессий, визуальная шкала интересов, готовые фразы, голосовой или письменный ответ, мини-презентация или интервью.
7. Итоги, рефлексия и портфолио Темы: рефлексия; дневник достижений; итоговый мини-проект.	Представляет проект, оценивает достижения и формирует личное портфолио. Итог: защита мини-проекта, диагностика и рефлексия.	Голосовая или письменная защита, карточки последовательности, готовые фразы, альбом достижений, один итоговый файл или ссылка.

В качестве развёрнутого примера рассмотрим модуль 1 «Введение в искусственный интеллект». Его цель заключается в формировании первичного представления об ИИ, сферах его применения и необходимости проверки полученных ответов. Модуль включает темы «Что такое искусственный интеллект?», «Как работает искусственный интеллект?» и «Искусственный интеллект вокруг нас», краткую памятку, видео или аудиообзор, интерактивное упражнение, практическую работу, тест и рефлексию.

Основное практическое задание модуля «ИИ вокруг меня» предполагает поиск примеров интеллектуальных сервисов в повседневной жизни и объяснение выполняемых ими задач. В минимальном варианте обучающийся приводит три примера, в основном – пять, в усложнённом – дополнительно определяет возможный риск. Результат может быть представлен в виде заполненной таблицы, карточки, текстового или устного ответа, фотографии либо скриншота.

Пример интерфейса практического задания представлен на рис. 1.

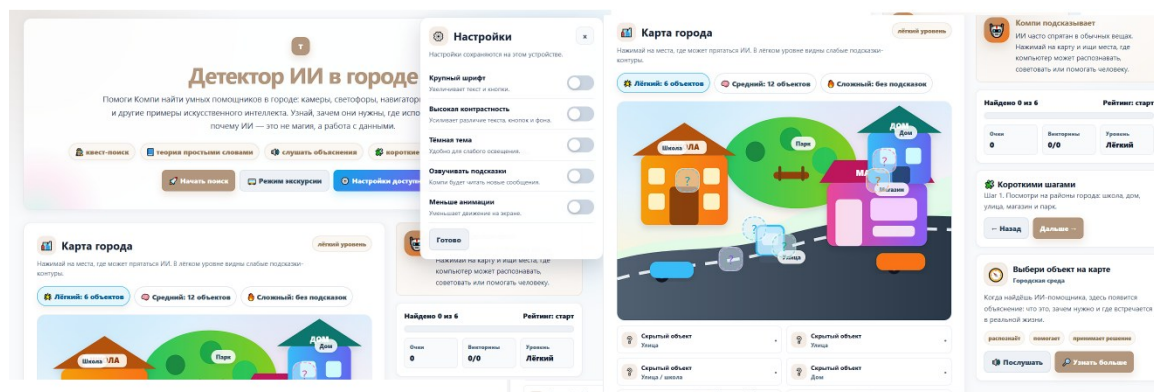


Рис. 1. Интерфейс практического задания «ИИ вокруг меня»

Адаптация практической работы осуществляется без изменения её основного содержания. Обучающийся с нарушениями слуха и речи получает письменную инструкцию, визуальные примеры и возможность письменного ответа; обучающиеся с НОДА используют голосовой ввод, готовые карточки или устное объяснение; обучающиеся с ЗПР выполняют задание по коротким шагам, работают по образцу и могут ограничиться двумя-тремя примерами.

Чат-бот в модуле используется как средство дозированной поддержки: он объясняет термин, подсказывает первый шаг или помогает проверить формулировку, но не выполняет практическую работу за обучающегося. Например, ребёнок может задать вопрос: «Подскажи, как заполнить таблицу, но не выполняй задание за меня». Результаты выполнения фиксируются в Moodle и портфолио, а оценивание учитывает правильность ответа, самостоятельность, количество подсказок и соблюдение правил безопасной работы.

Последовательность модулей отражает постепенное усложнение содержания: от первичного знакомства с ИИ обучающиеся переходят к алгоритмам, нейронным сетям и машинному обучению, затем – к роботам, чат-ботам, голосовым ассистентам, программированию и созданию запросов к генеративным моделям.

Этические, безопасностные и правовые вопросы выделены в самостоятельный модуль, после которого обучающиеся знакомятся с профессиональными ролями в сфере ИИ, формулируют доступный следующий шаг обучения и завершают курс защитой мини-проекта, рефлексией и формированием личного портфолио.

Банк цифровых материалов включает 55 интерактивных приложений. Чтобы избежать перегрузки, в основной маршрут каждой темы включается одно обязательное упражнение, при необходимости – одно тренировочное, а остальные размещаются в разделе «Дополнительные тренажёры». Такой подход сохраняет единое содержание курса и позволяет персонализировать объём практики с учётом возможностей конкретного обучающегося.

Полная структура электронного курса «Искусственный интеллект для детей», теоретические материалы, интерактивные упражнения, практические работы и средства контроля представлены на образовательном портале «Школа» ОмГПУ и доступны в гостевом режиме. Адрес курса: <https://school.omgpu.ru/course/view.php?id=4433> (дата обращения: 27.07.2026).

Результаты

На текущем этапе проведена поисковая апробация отдельных учебных материалов курса с 15 обучающимися с ОВЗ в возрасте 10 – 15 лет. Для оценки исходного уровня использовались входной тестовый контроль, педагогическое наблюдение и анализ выполнения практических заданий. Диагностические материалы позволили выявить стартовые представления участников об ИИ, их готовность к работе с цифровыми сервисами и особенности выполнения заданий с учётом образовательных потребностей каждого ребёнка. Полный цикл из семи модулей на данном этапе не проверялся; апробация была направлена на уточнение отдельных заданий, инструкций и способов поддержки.

В ходе занятий обучающиеся осваивали базовые понятия, выполняли пошаговые алгоритмические действия, взаимодействовали с ИИ-сервисами и обсуждали возможности, ограничения и правила безопасного использования интеллектуальных систем. Материал предъявлялся небольшими смысловыми блоками, сопровождался визуальными опорами, примерами и вариантами ответа, что позволяло регулировать когнитивную и моторную нагрузку и поддерживать индивидуальный темп работы.

Сопоставление результатов входной и итоговой диагностики, а также данные педагогического наблюдения показали умеренную положительную динамику в понимании основных понятий, выполнении пошаговых заданий и самостоятельном обращении к цифровым инструментам. Полученные данные рассматриваются как предварительные и используются для сокращения перегруженных инструкций, уточнения системы подсказок, отбора обязательных тренажёров и дальнейшей разработки критериев оценивания.

Выводы

В результате проведённого анализа систематизированы психолого-педагогические условия, значимые для освоения детьми с ОВЗ технологий искусственного интеллекта: доступность и наглядность учебной информации, поэтапность действий, персонализация темпа и объёма помощи, вариативность способов управления и ответа, практическая направленность, позитивная обратная связь и педагогический контроль работы с ИИ. Показано, что данные условия могут быть реализованы в семимодульном электронном курсе с единым содержанием и персонализируемым маршрутом. Подробное представление первого модуля и общей структуры курса конкретизирует содержание, формы учебной деятельности и способы адаптации. Поисковая апробация отдельных материалов подтвердила целесообразность пошаговых инструкций, вариативных заданий, дозированной помощи чат-бота и фиксации результатов в портфолио.

Заключение

Проведённое исследование подтверждает необходимость комплексного подхода к обучению детей с ОВЗ технологиям искусственного интеллекта в системе дополнительного образования. Его реализация предполагает сочетание психолого-педагогического сопровождения, единого содержания курса, персонализированного образовательного маршрута, доступной цифровой среды и оценки индивидуальной динамики. Практическая значимость результатов состоит в возможности использования представленной структуры семи модулей, примера практического задания и способов адаптации при проектировании дополнительных общеобразовательных программ технической направленности. Дальнейшая работа будет связана с завершением всех модулей, проверкой полного курса на расширенной выборке и уточнением диагностического инструментария.

Список литературы

- Алёхина С.В. Инклюзивное образование и психологическая готовность учителя // Вестник МГППУ. Сер. «Педагогика и психология». 2012. № 4. С. 118-127.
- Безрукова М.А. Инклюзия образования: преимущества и недостатки // Мир педагогики и психологии: международный научно-практический журнал. 2022. № 10 (75). С. 3-8.
- Витвицкая А.А. Генеративный искусственный интеллект как ресурс инновационного образования // Современные проблемы науки и образования. 2024. № 3. DOI: 10.17513/spno.33446
- Гусейнова Г.Ф. Искусственный интеллект в педагогическом процессе: современный взгляд // Педагогический журнал. 2022. Т. 12. № 4А. С. 190-195.
- Данилова Н.Н. Инклюзивное образование: психолого-педагогическая поддержка. М.: Юрайт, 2015.
- Иванова Н.А., Архипова И.И. Информационные технологии и образовательный процесс // Журнал прикладных исследований. 2023. № 7. С. 22-28.
- Карабанова О.А., Малофеев Н.Н. Стратегия развития образования детей с ОВЗ: по дороге к реализации культурно-исторического подхода // Культурно-историческая психология. 2019. Т. 15. № 4. С. 89-99. DOI: 10.17759/chp.2019150409.
- Коломийцева О.В. К проблеме определения содержания обучения детей с ОВЗ в цифровой среде (на примере авторского пособия) // Цифровая гуманитаристика и технологии в образовании (DHTE 2024): сб. статей V международной научно-практической конференции, 14-15 ноября 2024 г. / под ред. В.В. Рубцова, М.Г. Сороковой, Н.П. Радчиковой. М.: Издательство ФГБОУ ВО МГППУ, 2024. С. 623-632.
- Коломинский Я.Л., Панько Е.А. Психическое развитие детей в норме и патологии. СПб: Питер, 2004.

- Котлярова И.О. Технологии искусственного интеллекта в образовании // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Образование. Педагогические науки. 2022. Т. 14. № 3. С. 69-82.
- Кукушкина О.И., Гончарова Е.Л., Малофеев Н.Н. Инклюзивное образование: взгляд дефектологов отечественной научной школы // Альманах Института коррекционной педагогики. 2023. № 52. URL: <https://alldef.ru/ru/articles/almanac-52/inclusive-education-the-view-of-defectologists-of-the-national-scientific-school> (дата обращения: 10.01.2026).
- Мастюкова Н.А. Специальная педагогика. М.: Академия, 2014.
- Мещерякова А.И., Базорова Е.Д. Дети с нарушениями опорно-двигательного аппарата: психолого-педагогическая характеристика и организация обучения. М.: Владос, 2012.
- Михайленко М.В. Проблемы внедрения технологий искусственного интеллекта в образовательный процесс детей с ОВЗ // Молодёжь и наука XXI века: материалы XXVI Международного научно-практического форума студентов, аспирантов и молодых учёных «Образование и наука в XXI веке: математика, физика, информатика и технологии в смарт-мире», Красноярск, 21–22 мая 2025 г. / отв. ред. Е.Г Дорошенко. Красноярск: Краснояр. гос. пед. ун-т им. В. П. Астафьева, 2025. С. 197-200.
- Михайленко М.В. Сравнительный анализ методик обучения детей с ОВЗ компьютерным наукам в России и за рубежом // Методика преподавания математических и естественно-научных дисциплин: современные проблемы и тенденции развития: материалы XII Всероссийской научно-практической конференции. Омск: ОмГУ, 2025. С. 97-100.
- Михайленко М.В. Искусственный интеллект для детей: электронный образовательный курс [Электронный ресурс] // Образовательный портал «Школа» Омского государственного педагогического университета. 2026. URL: <https://school.omgpu.ru/course/view.php?id=4433> (дата обращения: 03.08.2026).
- Новоселов С.А., Попова Л.С., Иванов П.А. Цифровая платформа сетевого взаимодействия в дополнительном образовании: измерение методами образовательной аналитики эффективности развития изобретательских компетенций детей // Информатика и образование. 2025. № 40(6). С. 65–72. DOI: 10.32517/0234-0453-2025-40-6-65-72
- Певзнер М.С. Психология аномального ребёнка. М.: Просвещение, 1970.
- Рындак В.Г. Теория и опыт цифровизации в системе инклюзивного образования // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Психолого-педагогические науки». 2021. Т. 18. № 4. С. 45-56.
- Сережкина А.Е. Применение искусственного интеллекта в образовании // Цифровая гуманитаристика и технологии в образовании (DHTE 2024): сб. статей V международной научно-практической конференции, 14-15 ноября 2024 г. / под ред. В.В. Рубцова, М.Г. Сороковой, Н.П. Радчиковой. М.: Издательство ФГБОУ ВО МГППУ, 2024. С. 743-755.
- Сиротюк А.С. Воспитание ребёнка в инклюзивной среде. М.: Издательство «ТЦ Сфера», 2014.
- Слюсарева Е.С. Комплексное сопровождение субъектов инклюзивного образовательного процесса: из опыта экспериментальной работы // Вестник Университета. 2014. № 6. С. 292-297.
- Смирнова А.А. Индивидуальный подход в обучении детей с двигательными нарушениями. СПб: Речь, 2019.
- Снегурова В.И. Методическая система дистанционного обучения математике учащихся общеобразовательных школ: автореф. дис. ... д-ра пед. наук. СПб, 2010.
- Соколов Н.В., Виноградский В.Г. Искусственный интеллект в образовании: анализ, перспективы и риски в РФ // Проблемы современного педагогического образования. 2022. № 76-2. С. 166-169.

- Суркова Н.Е. Методика разработки и использования цифровых образовательных ресурсов при дистанционном обучении в учреждении среднего профессионального образования: автореф. дис. ... д-ра пед. наук. М., 2007.
- Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации»: текст с изменениями и дополнениями на 2019 г. М.: Эксмо, 2019.
- Форманова И.Н. Методика коррекционного обучения детей с ограниченными возможностями здоровья. СПб: Речь, 2012.
- Akhlan R.N.R., Khimmataliyev D.O., Qizi O.N.P. The Importance and Role of Inclusive Education in Educational Institutions // Proceeding of International Conference on Special Education in South East Asia Region. 2024. Vol. 3. № 1. P. 400-405. DOI: 10.57142/picsar.v3i1.557.
- Artificial Intelligence for kids [Электронный ресурс]. URL: <https://www.create-learn.us/ai-for-kids> (дата обращения: 10.01.2026).
- Edmett A., Ichaporia N., Crompton H., Crichton R. Artificial intelligence and English language teaching: Preparing for the future. 2nd ed. British Council, 2024. DOI: 10.57884/78EA-3C69.
- Lukins J., Bhana Lopez N., Sallese M. R., Andresen J. Fostering inclusive dispositions: Integrating disability studies in teacher education // Journal of Special Education Preparation. 2023. Vol. 3. № 3. P. 4-15. DOI: 10.33043/JOSEP.3.3.4-15.

Информация об авторах

Михайленко Максим Витальевич; аспирант кафедры информатики и методики обучения информатике; ФГБОУ ВО «Омский государственный педагогический университет» (Российская Федерация, 644099, г. Омск, наб. Тухачевского, д. 14); E-mail: sir.mihailenko@ya.ru; ORCID: 0009-0006-3485-4540;

Удалов Сергей Робертович; доктор педагогических наук; профессор; профессор кафедры информатики и методики обучения информатике; ФГБОУ ВО «Омский государственный педагогический университет» (Российская Федерация, 644099, г. Омск, наб. Тухачевского, д. 14); E-mail: udalov@omgpu.ru; ORCID: 0000-0001-7223-5958.

PSYCHOLOGICAL AND PEDAGOGICAL CONDITIONS FOR TEACHING ARTIFICIAL INTELLIGENCE TECHNOLOGIES TO CHILDREN WITH DISABILITIES IN SUPPLEMENTARY EDUCATION

Mikhailenko M. V.
postgraduate student

Omsk State Pedagogical University

Udalov S. R.

Omsk State Pedagogical University

Dr. Sci. (Pedagogy), Professor

Abstract. The article examines the psychological and pedagogical conditions for teaching artificial intelligence technologies to children with disabilities in supplementary education. The study aims to substantiate these conditions theoretically and describe their implementation in the electronic course “Artificial Intelligence for Children”. The methods included analysis and systematization of scientific and methodological sources, entry and final diagnostics, pedagogical observation, and analysis of practical assignments and learner portfolios. The content and process structure of the course is presented as seven sequentially connected modules with a common learning route and variable ways of completing assignments. A pilot implementation was conducted at the

Omsk Regional Station of Young Technicians with 15 learners aged 10–15: one learner with hearing and speech impairments, seven learners with developmental delay, and seven learners with musculoskeletal disorders. The classes were conducted individually. The data indicate moderate positive changes in the understanding of basic AI concepts, the performance of step-by-step tasks, and the independent use of digital tools. Due to the small sample, the results are considered preliminary.

Keywords: artificial intelligence technologies, children with disabilities, supplementary education, personalized educational route, electronic course

For citation: Mikhailenko M. V., Udalov S. R. (2026). Psychological and pedagogical conditions for teaching artificial intelligence technologies to children with disabilities in supplementary education. *Continuum. Mathematics. Informatics. Education*, 3(43), 130–142. <https://doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-130-142>

Copyright: © M. V. Mikhailenko, S. R. Udalov (2026). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

References

- Alekhina, S. V. (2012). Inklyuzivnoe obrazovanie i psihologicheskaya gotovnost uchitelya. *Vestnik MGPPU. Seriya «Pedagogika i psihologiya»*, 4, 118-127. (In Russ).
- Akhlan, R. N. R., Khimmataliyev, D. O., Qizi, O. N. P. (2024). The Importance and Role of Inclusive Education in Educational Institutions. *Proceeding of International Conference on Special Education in South East Asia Region*, 3(1), 400-405. DOI: 10.57142/picsar.v3i1.557.
- Artificial Intelligence for kids. Available at: <https://www.create-learn.us/ai-for-kids> (accessed: 10.01.2026).
- Bezrukova, M. A. (2022). Inklyuziya obrazovaniya: preimushchestva i nedostatki. *Mir pedagogiki i psihologii: mezhdunarodnyy nauchno-prakticheskij zhurnal*, 10(75), 3-8. (In Russ).
- Danilova, N. N. (2015). *Inklyuzivnoe obrazovanie: psihologo-pedagogicheskaya podderzhka*. Moscow: Yurait. (In Russ).
- Edmett, A., Ichaporia, N., Crompton, H., & Crichton, R. (2024). Artificial intelligence and English language teaching: Preparing for the future (2nd ed.). *British Council*. DOI: 10.57884/78EA-3C69.
- Federalnyy zakon «Ob obrazovanii v Rossijskoj Federacii»: tekst s izmeneniyami i dopolneniyami na 2019 g. (2019). Moscow: Eksmo. (In Russ).
- Formanova, I. N. (2012). *Metodika korrkcionnogo obucheniya detej s ogranichennymi vozmozhnostyami zdorovya*. St. Petersburg: Rech. (In Russ).
- Guseynova, G. F. (2022). Iskusstvennyj intellekt v pedagogicheskom processe: sovremennyy vzglyad. *Pedagogicheskij zhurnal*, 12(4A), 190-195. (In Russ).
- Ivanova, N. A., Arkhipova, I. I. (2023). Informacionnye tekhnologii i obrazovatelnyj process. *Zhurnal prikladnyh issledovanij*, 7, 22-28. (In Russ).
- Karabanova, O. A., Malofeev, N. N. (2019). Strategiya razvitiya obrazovaniya detej s OVZ: po doroge k realizacii kulturno-istoricheskogo podhoda. *Kulturno-istoricheskaya psihologiya*, 15(4), 89-99. DOI: 10.17759/chp.2019150409. (In Russ).
- Kolominsky, Ya. L., Panko, E. A. (2004). *Psihicheskoe razvitie detej v norme i patologii*. St. Petersburg: Piter. (In Russ).
- Kolomiytseva, O. V. (2024). K probleme opredeleniya sodержaniya obucheniya detej s OVZ v cifrovoj srede (na primere avtorskogo posobiya) [On the problem of determining the content of teaching children with disabilities in a digital environment (based on the author's manual)]. *Cifrovaya gumanitaristika i tekhnologii v obrazovanii (DHTE 2024): sbornik*

- statej V mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii* (pp. 623-632). Moscow: Izdatelstvo FGBOU VO MGPPU. (In Russ).
- Kotlyarova, I. O. (2022). Tekhnologii iskusstvennogo intellekta v obrazovanii. *Vestnik Yuzhno-Uralskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Obrazovanie. Pedagogicheskie nauki*, 14(3), 69-82. (In Russ).
- Kukushkina, O. I., Goncharova, E. L., Malofeev, N. N. (2023). Inklyuzivnoe obrazovanie: vzglyad defektologov otechestvennoj nauchnoj shkoly. *Almanah Instituta korrekcionnoj pedagogiki*, 52. Available at: <https://alldef.ru/ru/articles/almanac-52/inclusive-education-the-view-of-defectologists-of-the-national-scientific-school> (accessed: 10.01.2026). (In Russ).
- Lukins, J., Bhana Lopez, N., Sallese, M. R., Andresen, J. (2023). Fostering inclusive dispositions: Integrating disability studies in teacher education. *Journal of Special Education Preparation*, 3(3), 4-15. DOI: 10.33043/JOSEP.3.3.4-15.
- Mastyukova, N. A. (2014). *Specialnaya pedagogika*. Moscow: Akademiya. (In Russ).
- Meshcheryakova, A. I., Bazorova, E. D. (2012). *Deti s narusheniyami oporno-dvigatel'nogo apparata: psihologo-pedagogicheskaya harakteristika i organizaciya obucheniya*. Moscow: Vldos. (In Russ).
- Mikhailenko, M. V. (2025). Problemy vnedreniya tekhnologij iskusstvennogo intellekta v obrazovatelnyj process detej s OVZ [Problems of introducing artificial intelligence technologies into the educational process of children with disabilities]. *Molodezh i nauka XXI veka: materialy XXVI Mezhdunarodnogo nauchno-prakticheskogo foruma studentov, aspirantov i molodyh uchenyh «Obrazovanie i nauka v XXI veke: matematika, fizika, informatika i tekhnologii v smart-mire»* (pp. 197-200). Krasnoyarsk: Krasnoyarskij gosudarstvennyj pedagogicheskij universitet imeni V. P. Astafeva. (In Russ).
- Mikhailenko, M. V. (2025). Sravnitelnyj analiz metodik obucheniya detej s OVZ kompyuternym naukam v Rossii i za rubezhom [Comparative analysis of methods for teaching computer science to children with disabilities in Russia and abroad]. *Metodika prepodavaniya matematicheskikh i estestvenno-nauchnykh disciplin: sovremennye problemy i tendencii razvitiya: materialy XII Vserossijskoj nauchno-prakticheskoy konferencii* (pp. 97-100). Omsk: Omskij gosudarstvennyj universitet. (In Russ).
- Mikhailenko, M. V. (2026). Iskusstvennyj intellekt dlya detej: elektronnyj obrazovatelnyj kurs [Artificial intelligence for children: an electronic educational course]. Educational portal "School" of Omsk State Pedagogical University. Available at: <https://school.omgpu.ru/course/view.php?id=4433> (accessed: 03.08.2026). (In Russ.).
- Novoselov, S. A., Popova, L. S., Ivanov, P. A. (2025). Digital platform for network interaction in additional education: Measuring the effectiveness of children's inventive competencies development using learning analytics methods. *Informatics and education*, 40(6), 65-72. DOI: 10.32517/0234-0453-2025-40-6-65-72 (In Russ., abstract in Eng.).
- Pevzner, M. S. (1970). *Psihologiya anomal'nogo rebyonka*. Moscow: Prosveshchenie. (In Russ).
- Ryndak, V. G. (2021). Teoriya i opyt cifrovizacii v sisteme inklyuzivnogo obrazovaniya. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya «Psihologo-pedagogicheskie nauki»*, 18(4), 45-56. (In Russ).
- Serezhkina, A. E. (2024). Primenenie iskusstvennogo intellekta v obrazovanii [Application of artificial intelligence in education]. *Cifrovaya gumanitaristika i tekhnologii v obrazovanii (DHTE 2024): sbornik statej V mezhdunarodnoj nauchno-prakticheskoy konferencii* (pp. 743-755). Moscow: Izdatelstvo FGBOU VO MGPPU. (In Russ).
- Sirotyuk, A. S. (2014). *Vospitanie rebenka v inklyuzivnoj srede*. Moscow: Izdatelstvo «TC Sfera». (In Russ).
- Slyusareva, E. S. (2014). Kompleksnoe soprovozhdenie subektov inklyuzivnogo obrazovatel'nogo processa: iz opyta eksperimental'noj raboty. *Vestnik Universiteta*, 6, 292-297. (In Russ).
- Smirnova, A. A. (2019). *Individualnyj podhod v obuchenii detej s dvigatel'nymi narusheniyami*. St. Petersburg: Rech. (In Russ).

- Snegurova, V. I. (2010). Metodicheskaya sistema distancionnogo obucheniya matematike uchashchihsya obshcheobrazovatelnyh shkol. Avtoref. dis. ... d-ra ped. nauk. St. Petersburg. (In Russ).
- Sokolov, N. V., Vinogradsky, V. G. (2022). Iskusstvennyj intellekt v obrazovanii: analiz, perspektivy i riski v RF. *Problemy sovremennogo pedagogicheskogo obrazovaniya*, 76-2, 166-169. (In Russ).
- Surkova, N. E. (2007). Metodika razrabotki i ispolzovaniya cifrovyyh obrazovatelnyh resursov pri distancionnom obuchenii v uchrezhdenii srednego professionalnogo obrazovaniya. Avtoref. dis. ... d-ra ped. nauk. Moscow. (In Russ).
- Vitvitskaya, A. A. (2024). Generativnyj iskusstvennyj intellekt kak resurs innovacionnogo obrazovaniya. *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*, 3. DOI: 10.17513/spno.33446. (In Russ).

Information about the authors

Maksim V. Mikhailenko; postgraduate student; Department of Informatics and Methods of Teaching Informatics; Omsk State Pedagogical University (Tukhachevsky Embankment, 14, Omsk, 644099, Russian Federation); E-mail: sir.mihailenko@ya.ru; ORCID: 0009-0006-3485-4540;

Sergey R. Udalov; Doctor of Pedagogical Sciences; Professor; Professor of the Department of Informatics and Methods of Teaching Informatics; Omsk State Pedagogical University (Tukhachevsky Embankment, 14, Omsk, 644099, Russian Federation); E-mail: udalov@omgpu.ru; ORCID: 0000-0001-7223-5958

Статья поступила в редакцию	13.03.2026
Принята к публикации	10.08.2026
Статья опубликована	18.09.2026

ПЕРСОНАЛИИ

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-3-143-159

УДК
378.242

НАУЧНАЯ ШКОЛА ПО КРАЕВЫМ ЗАДАЧАМ АКАДЕМИКА ФЁДОРА ДМИТРИЕВИЧА ГАХОВА (К 120-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ УЧЁНОГО)

Бровка Наталья Владимировна

д.п.н., к. ф.-м. н., профессор

Мельников Роман Анатольевич

к.п.н., доцент

Белорусский государственный универси-
тетЕлецкий государственный университет
им. И.А. Бунина

Аннотация. В 2026 году исполнилось 120 лет со дня рождения известного отечественного математика советского периода, одного из родоначальников крупной научной школы по теории краевых задач для аналитических функций и особых интегральных уравнений, центры которой в разные годы находились в Казани, Ростове-на-Дону и Минске, академика АН БССР, доктора физико-математических наук, профессора Фёдора Дмитриевича Гахова (1906–1980). Статья содержит краткое описание жизнедеятельности учёного, а также хронологию и обзор достижений его учеников, краткие биобиблиографические сведения о наиболее значимых представителях этой научной школы.

Ключевые слова: Ф.Д. Гахов, научная школа, Казань, Ростов-на-Дону, Минск, краевые задачи, теория аналитических функций, интегральные уравнения

Для цитирования: Бровка Н.В., Мельников Р.А. Научная школа по краевым задачам академика Фёдора Дмитриевича Гахова (к 120-летию со дня рождения учёного) // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 3 (43). С. 143–159. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-143-159

Права: © Н.В. Бровка, Р.А. Мельников (2026). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И.А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

О ранних годах жизни Ф. Д. Гахова известно крайне мало. Родился он 19 февраля 1906 года в станице Баталпашинская Ставропольского края (сейчас это город Черкесск – столица Карачаево-Черкессии). После окончания Черкесского педагогического техникума в 1925 г. юный Фёдор стал студентом Горского педагогического института, базировавшегося в городе Орджоникидзе (ныне Владикавказ). По настоятельной рекомендации известного педагога-математика Льва Ильича Креера¹⁰, преподававшего в те годы математический анализ и его ответвления в этом вузе, и заметившего математическую одарённость студента третьего курса Гахова, Фёдора Дмитриевича в 1928 году перевели в Казанский университет (КГУ).

После окончания главного вуза Татарстана, «с 1930 по 1934 гг. Ф.Д. Гахов преподавал математику в вузах Свердловска» (Абламейко, 2021, 53). Вернувшись в Казанский государственный университет в 1934 году, стал аспирантом профессора Б. М. Гагаева (1897–

¹⁰ В годы Великой отечественной войны заведовал кафедрой алгебры и геометрии в Северо-Осетинском пединституте им. К.Л. Хетагурова

1975). Его научным консультантом также был академик В. И. Смирнов (1887–1974). В конце 1937 года в стенах этого университета Фёдор Дмитриевич успешно защитил кандидатскую диссертацию «Линейные краевые задачи и теории функций комплексного переменного». По свидетельству его ученицы Л. И. Чибриковой: «Диссертанту удалось дать исчерпывающее решение одной из краевых задач – задачи Римана в случае простого замкнутого гладкого контура путём применения интегралов типа Коши. Идея использования интегралов типа Коши была усмотрена в докладе Карлемана¹¹ на Цюрихском международном конгрессе (1932 г.) по интегральным уравнениям». (Чибрикова, 1999, 388). В этом исследовании были впервые рассмотрены новые типы линейных краевых задач (типа Римана) и научно бесценные результаты «для n пар неизвестных функций, а также задача типа Гильберта с производными в краевом условии, которую он с помощью интегралов с ядром Гильберта приводил к решению интегрального уравнения» (Чибрикова, 1999, 388). Эта работа была представлена представлено на Всесоюзном конкурсе молодых учёных, посвящённом 20-летию Октября, и получила вторую премию. В отзыве на этот труд М. В. Келдыш (1911–1978) писал: «автором дано полное решение краевой задачи Римана новым методом, приведшим к окончательному её решению в замкнутой форме, им применены современные методы исследования к ряду новых краевых задач, до сих пор в полном виде не разбиравшихся» (Аксентьев, 2005). В январе 1938 года Ф. Д. Гахову присвоена учёная степень кандидата физико-математических наук. Далее (в 1934–1937 гг.) Фёдор Дмитриевич работал в должности доцента на кафедре математического анализа Казанского университета. В 1939 году он переехал в Орджоникидзе, т. е. вернулся в родные пенаты. Там он сразу же стал заведующим (вплоть до 1947 года) кафедрой математического анализа в Северо-Осетинском педагогическом институте и в течение двух лет был деканом физико-математического факультета. В тяжёлые предвоенные и военные годы Фёдор Дмитриевич продолжал заниматься научной работой, углубляя идеи и совершенствуя методы своей кандидатской диссертации. Результат не заставил себя долго ждать: 26 октября 1942 года в стенах Математического института АН Грузинской ССР им. А.М. Размадзе, в Тбилиси, Ф.Д. Гахов успешно защитил докторскую диссертацию на тему «Краевые задачи теории аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения». Ему оппонировали Н. И. Мухелишвили (1891–1976) и И. Н. Векуа (1907–1977) – крупные специалисты в этой области, выдающиеся ученые грузинской математической школы. Ядром этой работы стало исследование краевой задачи Римана для случая, когда коэффициент краевого условия разрывен, а контур может быть разомкнутым. Важность этого исследования определяется тем, что к задаче Римана в такой постановке приводят многие задачи математической физики. Метод решения задачи Римана, предложенный Фёдором Дмитриевичем, состоит в том, чтобы, вводя в краевое условие вспомогательные, специально подобранные функции, устраняющие разрыв, привести задачу к задаче с непрерывным коэффициентом. Позднее этот метод получил распространение и на многие другие особенности более сложной природы. «С помощью результатов для краевой задачи Римана Фёдором Дмитриевичем исследованы и сингулярные интегральные уравнения в разрывной постановке. В диссертации дано также решение краевой задачи Гильберта, и, в связи с этим решением введено понятие регуляризирующего множителя» (Путиами познания, 1985, 41). В 1943 году Ф.Д. Гахову присвоено учёное звание профессора (Чепинога, 1966, 191).

Казанский период жизни и научного творчества Ф. Д. Гахова

В 1947 году Ф.Д. Гахов получил предложение от руководства КГУ стать профессором кафедры математического анализа, от которого он не смог отказаться. В конце августа он с семьёй (к этому моменту он был женат и имел троих сыновей: Александра, Владимира и Виктора) перебрался в столицу Татарстана. Фёдор Дмитриевич приступил к чтению лекций по обыкновенным дифференциальным уравнениям, ТФКП и проведению занятий по

¹¹ Таге Йиллис Торстен Карлеман (1892–1949) – шведский математик, специалист в области классического анализа и его приложений

спецкурсу, посвящённого сингулярным интегральным уравнениям. Содержательную основу последнего составили материалы его диссертаций и вышедшая в 1946 г. монография Н.И. Мухелишвили «Сингулярные интегральные уравнения», которая, как отметил С.Г. Михлин (1908–1990) в своей рецензии на неё, стала первой в мировой литературе книгой по соответствующей тематике. Вскоре у учёного появились первые аспиранты и соискатели: аспирант-заочник В.С. Рогожин, который приехал из Ростова-на-Дону и стал ассистентом Фёдора Дмитриевича, Л.И. Чибрикова – выпускница КГУ, а также Э.К. Столярова и А.В. Месис – две сотрудницы НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарёва. Л.И. Чибрикова в своих воспоминаниях отмечала: «Ф.Д. Гахов внёс заметное оживление в работу городского физико-математического общества, принимая самое активное участие в обсуждении докладов. Заседания общества стали регулярными, в докладчиках недостатка не было, стали правилом доклады диссертантов перед предстоящей защитой» (Чибрикова, 1999, 389).

С 1949 году в КГУ возобновила своё функционирование кафедра дифференциальных уравнений, которая была закрыта в 1940 году в связи с отъездом в Алма-Ату её заведующего К.П. Персидского (1903–1970). Профессор Ф.Д. Гахов стал заведующим этого восстановленного структурного подразделения. Наступило и время защит кандидатских диссертаций его учениками.

Таблица 1.
Ученики Ф. Д. Гахова казанского периода и их диссертации

№	ФИО, краткие биографические сведения	Год, место защиты	Тема диссертации
1.	<i>Рогожин Владимир Сергеевич</i> (1921–1996). Родился в г. Каменск (ныне Каменск-Шахтинский) Ростовской области. Окончил Ростовский университет (1945). Работал в КГУ (с 1949 по 1953 гг.) и РГУ доцентом кафедры математического анализа (1953–1957), заведовал кафедрой дифференциальных уравнений (с 1961 г.). Доктор физико-математических наук (с 1967 г.), профессор.	1949, КГУ	Краевые задачи теории полигармонических функций
		1966, КГУ	Исследования по краевым задачам теории аналитических функций
2.	<i>Столярова-Ситникова Эвелина Кирилловна</i> (1921 г.р.). Родилась в Урюпинске Сталинградской области. Окончила Казанский университет (1950). Работала в НИИ ММ им. Н. Г. Чеботарёва, в Ленинградском электротехническом университете (с 1954 г.)	1950, КГУ	Общая линейная краевая задача для уравнений эллиптического типа
3.	<i>Чибрикова Любовь Ивановна</i> (1925–2001). Родилась в деревне Ново-Шигалеево Татарской АССР. Окончила Казанский университет (1947). Работала на кафедре высшей математики Новочеркасского политехнического института (1951), на кафедре дифференциальных уравнений КГУ (1951–2001). Доктор физико-математических наук (с 1964 г.), профессор. Была заведующим этой кафедрой (1959–1991).	1951, КГУ	Особые случаи линейных задач теории аналитических функций, аналогичных задаче Римана
		1962, БГУ	Краевая задача Римана для автоморфных функций

ПЕРСОНАЛИИ

	Автор монографии «Основные граничные задачи для аналитических функций» (Казань, 1977).		
4.	<i>Наталевич Валерий Константинович</i> (1916 г.р.). Родился в г. Таганрог. Окончил РГУ (1939). С 1946 г. работал в Новочеркасском политехническом институте, доцент (с 1953 г.)	1951, КГУ	Нелинейные сингулярные интегральные уравнения и нелинейные краевые задачи теории аналитических функций
5.	<i>Месис Александра Викторовна</i> (1916 г.р.). Родилась в г. Нижний Тагил. Окончила Уральский (Свердловск) университет (1939). Работала в НИИ ММ им. Н. Г. Чеботарёва, в Уральском университете (с 1952 г.)	1952, КГУ	Краевая задача Римана над полем алгебраических функций
6.	<i>Чикин Лев Александрович</i> (1920–1998). Родился в селе Ветлица Смоленской области. Окончил Московский пединститут им. В. И. Ленина (1941). Работал в педагогическом институте г. Орджоникидзе (с 1946 г.). В РГУ с 1954 г. – доцент кафедры математического анализа. С 1960 по 1980 гг. заведовал кафедрой вычислительной математики.	1952, КГУ	Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений
7.	<i>Ганин Михаил Павлович</i> (1930–2021). Родился в д. Княжуха Горьковской области. Окончил Казанский университет (1951), а затем специальные курсы при Военно-морской академии кораблестроения и вооружения им. академика А. Н. Крылова. Работал в Военно-морской академии им. Н. Г. Кузнецова (Ленинград, с 1952 г.). Доктор технических наук (1964), профессор (1965), капитан первого ранга (1974), заслуженный деятель науки РСФСР (1988), почётный профессор Военно-морской академии (1994), действительный член Академии военных наук (2002). Автор учебного пособия «Прикладные методы теории марковских случайных процессов» (Ленинград, 1974).	1952, КГУ	Об одной общей краевой задаче для аналитических функций
8.	<i>Кропачев Вячеслав Фёдорович</i> (1922 г.р.). Родился в г. Дебессы Удмуртской АССР. Окончил Удмуртский пединститут (1949). Работал в Таганрогском радиотехническом институте (с 1955 г.)	1953, КГУ	Нелинейные сингулярные интегральные уравнения и нелинейные краевые задачи теории эллиптических дифференциальных уравнений
9.	<i>Беляева Мая Гавриловна</i>	1953, КГУ	Особые случаи задачи Римана и систем сингулярных интегральных уравнений
10.	<i>Крикунов Юрий Михайлович</i> (1924–1985). Родился в с. Елань (ныне Волгоградской области). Окончил Казанский университет	1954, КГУ	Обобщённая краевая задача Римана и линейное сингулярное интегро-

(1951). Работал в КГУ им. В. И. Ульянова-Ленина (с 1955 г.), доцент (с 1959 г.). Автор учебных пособий: «Лекции по уравнениям математической физики и интегральным уравнениям» (Казань, 1970) и «Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа» (Казань, 1986).	дифференциальное уравнение
--	----------------------------

Ростовский период жизни и научной деятельности Ф. Д. Гахова

Следует отметить, что Ю.М. Крикунов защищал своё исследование уже под руководством профессора Б.М. Гагаева. Дело в том, что середине 1953 года Ф.Д. Гахов переехал в Ростов-на-Дону, приняв заманчивое предложение руководства главного вуза Северо-Кавказского региона, состоявшее в предоставлении ему сразу же отдельной просторной квартиры и должности заведующего кафедрой математического анализа. При этом большинство его учеников последовало за ним. Спустя некоторое время Фёдор Дмитриевич стал заведующим кафедрой дифференциальных уравнений, а Ростов-на-Дону стал своеобразным аттрактором для талантливой молодёжи. С осени 1953 года учёный организовал общегородской научный семинар математиков и механиков, что позволило ему объединить вокруг себя широкий круг исследователей, которые занимались разработкой самых разнообразных проблем теории краевых задач и особых (сингулярных) интегральных уравнений. Основное ядро докладчиков этого семинара – сотрудники математических кафедр (кроме геометров) и кафедры механики РГУ (С.Я. Альпер, В.С. Рогожин, М.Г. Хапланов, М.А. Блохин, Ю.Ф. Коробейник, М.М. Чепинога, И.И. Ворович, Ю.И. Черский, А.В. Батырев, С.Е. Белозёров, Н.С. Новосильцев, И.М. Мельник, А.К. Никитин, Н.Н. Моисеев, Е.И. Ким, Р.Х. Зарипов, Г.С. Бархин, Л.А. Толоконников, А.А. Говорухина), а также преподаватели и научные работники вузов г. Шахты (А.П. Гремяческий), г. Новочеркаска (М.М. Драгилев, О.В. Тозони, В.В. Иванов) Ростовской области. В качестве докладчиков привлекались и видные учёные из других городов: Н.П. Векуа и Д.А. Квеселава (Тбилиси), М.А. Красносельский и С.Г. Крейн (Воронеж), С.В. Фалькович (Саратов). «Другую группу иногородних докладчиков составляли молодые математики, работавшие над диссертациями: Н.А. Минин (Киев), Л.Г. Михайлов (Сталинабад, ныне Душанбе), Г.Н. Чеботарёв» (Гахов, 1957, 264).

Особое место в исследованиях Ф. Д. Гахова в «ростовский период» его научного творчества занимал цикл работ, посвящённых обратным краевым задачам. «В них ищется контур по заданной на нем информации о краевых значениях аналитической функции. Фёдору Дмитриевичу принадлежит здесь ряд основополагающих результатов: доказательство существования решения внешней обратной задачи (полученное при этом доказательстве уравнение носит теперь его имя), определение точек ветвления внутри искомого контура, привлечение топологических методов теории функций комплексного переменного к исследованию обратных задач и др.» (Путиами познания, 1985, 42).

Эти и иные, полученные им результаты были положены в основу содержания его широко известной монографии «Краевые задачи», первое издание которой было напечатано московским издательством «Физматгиз» в 1958 году. Наличие научного труда такого масштаба, как отмечал его ученик Э.И. Зверович, способствовало укреплению авторитета учёного, и выдвинуло в лидеры ростовских математиков. Эта книга возникла из курса лекций, которые автор читал студентам Казанского и Ростовского университетов. Её основное содержание было посвящено вопросам теории краевых задач для аналитических функций и дифференциальных уравнений эллиптического типа, а также приложениям краевых задач к решению сингулярных интегральных уравнений с различными ядрами.

«Потребности промышленности и народного хозяйства, повышение роли вычислительной техники в научных исследованиях определили необходимость увеличения

выпуска специалистов по вычислительной математике. «В работу по их подготовке включился и Ростовский университет. В октябре 1958 г. начал свою историю вычислительный центр (ВЦ) РГУ, который некоторое время оставался в рамках кафедры математического анализа и алгебры. Научное руководство новым подразделением было поручено Ф. Д. Гахову. Активное участие в работе ВЦ с первых дней его существования приняли Е.Л. Литвер и ученики Ф.Д. Гахова – Р.Х. Зарипов, Л.А. Чикин» (Коробейник, 1989, 27). В 1958–1959 учебном году доцент Л.А. Чикин прошёл в МГУ им. М.В. Ломоносова курсы переподготовки по вычислительным машинам и вычислительной математике, и в 1960 году Лев Александрович стал первым заведующим кафедрой вычислительной математики в РГУ.

Летом 1959 года произошло трагическое событие в семье Ф. Д. Гахова: в результате несчастного случая погиб сын Александр (1939–1959) – студент РГУ. Это обстоятельство, а также обострение конкуренции на работе (в 1959 году И.И. Ворович (1920–2001) и в 1960 году М.Г. Хапланов (1902–1977) защитили свои докторские диссертации и стали профессорами), спровоцировали напряженность в семье и последующий развод с женой. В этот момент последовало приглашение из Минска на работу в главный вуз Белоруссии, подкреплённое обещанием дать ему квартиру и инициировать процесс присвоения звания академика АН БССР. В 1961 году Ф.Д. Гахов переехал из Ростова-на-Дону в Минск.

Таблица 2.
Ученики Ф. Д. Гахова ростовского периода и их диссертации

11.	<i>Минин Николай Александрович</i> В конце 60-х – начале 70-х гг. работал в Киевском высшем инженерно-авиационном военном училище ВВС. Один из авторов книги «Высшая математика. Специальные главы» (Киев, 1981 г.)	1954, РГУ	
12.	<i>Михайлов Леонид Григорьевич</i> (1928–2017). Родился в селе Михайловка Башкирской АССР. Окончил Казанский университет (1950), доцент (с 1958 г.), профессор (с 1967 г.). Работал в Горьковском госуниверситете (1970–1972 гг.), где заведовал кафедрой. Академик АН Таджикистана (с 1987), её вице-президент (в 1993–1994 гг.).	1955, РГУ	Краевая задача типа Римана для систем дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа
		1964, СО АН СССР	Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами
13.	<i>Черский Юрий Иосифович</i> (1929–2015). Родился в г. Казань. Преподавал в Ростовском-на-Дону университете (1955–1964). Доктор физико-математических наук (1964), профессор. Работал в вузах Одессы, Симферополя и в Институте прикладных проблем механики и математики АН УССР (Львов, 1977–1983).	1956, МИАН Груз. ССР	Интегральные уравнения типа свёртки
14.	<i>Зарипов Рудольф Хафизович</i> (1929 г.р.). Родился в г. Казань. Окончил МГУ (1952). В РГУ работал на кафедре математического анализа и в ВЦ (1956–1960). Был научным сотрудником в	1958, РГУ	Системы особых интегральных уравнений типа свёртки

	московском НИИ (1960–1967) и старшим научным сотрудником в Институте психологии АПН СССР (с 1967 г.).		
15.	<i>Мельник Иван Михайлович</i> (1920–2000). Родился в селе Б. Лука Полтавской области. Окончил РГУ (1955). Работал в РГУ (с 1955 г.), доцент кафедры математического анализа (с 1962 г.). Автор книги «Вариационное исчисление» (РГУ, 1966).	1958, РГУ	Исключительные случаи краевых задач теории аналитических функций и особых интегральных уравнений
16.	<i>Литвинчук Георгий Семёнович</i> (1931–2006). Родился в г. Ростов-на-Дону. Окончил РГУ (1955). Работал на кафедре математического анализа РГУ (1956–1964), в Одесском госуниверситете (1964–1974). Доктор физико-математических наук (1968), профессор (1969). Работал в Одесском отделении Института экономики АН УССР (1974–1986). Автор монографии «Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом» (М.: Наука, 1977).	1958, РГУ	Интегральные уравнения с аналитическими ядрами
		1968, БГУ	Исследования по краевым задачам со сдвигом для аналитических функций и сингулярным интегральным уравнениям
17.	<i>Говорухина Алла Аристарховна</i> (1929–2011). Родилась в г. Ростов-на-Дону. Окончила Ростовский-на-Дону университет (1953). Работала на кафедре дифференциальных и интегральных уравнений РГУ.	1958, РГУ	Интегро-дифференциальные уравнения типа свёртки
18.	<i>Хасабов Эдуард Георгиевич</i> (1926 г.р.). Родился в г. Ростов-на-Дону. Окончил РГУ (1954). В РГУ работал на кафедре дифференциальных уравнений (с 1957 г.), доцент (с 1962 г.).	1959, РГУ	О краевой задаче типа задачи Гильберта
19.	<i>Хайруллин Ильдус Хафизович</i> (1930 г.р.). Родился в г. Чистополь Татарской АССР. Окончил Казанский университет (1953), доцент (с 1961 г.).	1959, РГУ	Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений с разностными индексами
20.	<i>Какичев Валентин Андреевич</i> (1926–2002). Родился на хуторе Погорелов Ростовской области. Окончил РГУ (1955). Работал учителем математики (1949–1955), в Шахтинском пединституте (1955–1960), в РГУ (1960–1979), в Таганрогском пединституте (1979–1981), радиотехническом (1981–1989) институтах, в Новгородском педагогическом институте (1989–1993), в Новгородском государственном университете (1993–1998). Доцент (с 1963 г.). Доктор физико-математических наук (с 1989 г.). Автор монографии «Системы	1960, РГУ	Граничные свойства интеграла типа Коши многих комплексных переменных и некоторые его приложения
		1988, НГУ	Краевые задачи для функций аналитических в биобластях

ПЕРСОНАЛИИ

	линейных дифференциальных уравнений первого порядка» (1977).		
21.	<i>Парадоксова Ирина Андреевна</i> (1931 г.р.). Родилась в станице Дундуковская Краснодарского края. Окончила РГУ (1953). Работала в РГУ (с 1960 г.) на кафедре дифференциальных уравнений.	1961, РГУ	Об особых интегральных уравнениях, разрешённых в замкнутой форме
22.	<i>Карамышев Фёдор Иванович</i> (1922–1962). Родился в г. Туапсе. Окончил РГУ (1947), доцент (с 1962 г.). Работал на кафедре высшей математики Новочеркасского политехнического института.	1961, РГУ	Некоторые краевые задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа
23.	<i>Яновский Станислав Викторович</i> (1929 г.р.). Родился в г. Орджоникидзе. Окончил Северо-Осетинский педагогический институт (1945) и аспирантуру РГУ (1960). В 70-е годы работал доцентом в Липецком политехническом институте.	1961, РГУ	Полные интегральные и интегро-дифференциальные уравнения типа свёртки
24.	<i>Симоненко Игорь Борисович</i> (1935–2008) Родился в г. Киев. Окончил РГУ (1958). В РГУ с 1961 г. на кафедре теории функций и функционального анализа.	1961, Тбилиси	Исследование по теории сингулярных интегралов, краевых задач аналитических функций и сингулярных интегральных уравнений
		1967, ЛГУ	Операторы локального типа и некоторые другие вопросы теории линейных операторов
25.	<i>Аржанов Геннадий Владимирович</i> (1931 г.р.). Окончил РГУ (1954). В РГУ работал с 1961 г. на кафедре вычислительной математики, доцент (с 1968 г.).	1962, БГУ	Нелинейная краевая задача Римана
26.	<i>Азаматова (Смагина) Валентина Ивановна</i> (1937–2014). Родилась в г. Ростов-на-Дону. Окончила РГУ (1959).	1963, АН БССР	Исключительные случаи интегральных уравнений типа свёртки и уравнения первого рода
27.	<i>Сакалюк Константин Дмитриевич</i> (1925 г.р.). Родился в г. Унгены Молдавской ССР. Окончил Кишинёвский пединститут (1950).	1963, БГУ	Интегральные уравнения со степенными, логарифмическими и полярными ядрами, разрешаемые в замкнутой форме
28.	<i>Заставенко Леонид Гурьевич</i> (1931–1995). Научный сотрудник Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований (Дубна).	1964, БГУ	Обобщение преобразования Лапласа
29.	<i>Зверович Эдмунд Иванович</i> (1936 г.р.). Родился в станице Ново-Владимирская Краснодарского края. Окончил РГУ (1960), аспирантуру в Институте теоретической и	1964, РГУ	О некоторых краевых задачах теории аналитических функций (рук. Н.Н. Мейман)

	экспериментальной физики (Москва, 1963). Работал в РГУ в ВЦ (1964–1967), доцент с 1969 г. С 1967 по 1975 гг. работал в Одесском инженерно-строительном институте. Заведовал кафедрой теории функций БГУ (1976–2002). Автор шеститомного учебного пособия «Вещественный и комплексный анализ» (Минск, 2008).	1972, Минск	Теория двухэлементных краевых задач на римановых поверхностях и её приложения
30.	<i>Хайруллина (Бенинг) Светлана Павловна</i> (1929–2020). Родилась в г. Харьков. Окончила Казанский университет (1952).	1965, БГУ	Корректность постановки и решение некоторых задач для гиперболических и вполне гиперболических уравнений с начальными данными на линии вырождения типа
31.	<i>Алексеев Анатолий Дмитриевич</i> (1922 г.р.). Окончил Казанский университет (1952), преподавал в Елабужском пединституте (1955–1957), окончил аспирантуру РГУ (1960). В РГУ работал на кафедре дифференциальных уравнений (с 1959 г.). Декан мехмата РГУ (с 1968 по 1972 гг.), декан ФПК преподавателей естественных наук РГУ (с 1974 по 1982 гг.).	1966, БГУ	Краевая задача Римана и особое интегральное уравнение на некоторых негладких контурах
32.	<i>Говоров Николай Васильевич</i> (1928–1981). Родился в станице Казанская Краснодарского края. Заочно окончил Грозненский пединститут (1950) и РГУ (1957). Преподавал в Новочеркасском политехническом институте (с 1957 г.) и его Шахтинском филиале (с 1958 г.). В РГУ работал с 1959 по 1970 гг. на кафедре теории функций и функционального анализа (по совместительству). Доктор физико-математических наук, профессор. С 1970 г. заведовал кафедрой математического анализа Кубанского госуниверситета.	1966, РГУ	О функциях вполне регулярного роста в полуплоскости
		1968, Харьков	Краевая задача Римана с бесконечным индексом

Приехав в Минск, Фёдор Дмитриевич получил назначение на должность заведующего кафедрой математического анализа Белорусского государственного университета (БГУ). «С этого времени на факультете начал работать организованный Ф.Д. Гаховым еженедельный научный семинар по комплексному анализу и его приложениям» (Зверович, 2016, 10). Всю свою кипучую энергию он отдавал развитию математического высшего образования в БССР. В 1962–1963 гг. Ф.Д. Гахов был деканом математического факультета БГУ.

В 1963 году вышло второе, переработанное и дополненное издание монографии «Краевые задачи». Надо отметить, что подготовка к переизданию этой книги велась ещё в Ростове-на-Дону. Автор, работая в сотрудничестве со своим учеником В. А. Какичевым, решил описать прогресс, который произошёл в изучении краевых задач и их приложений за

истекший промежуток времени. Следует особо подчеркнуть, что монография имела успех не только в СССР, но за рубежом. На английском языке она вышла в 1966 году под названием «Boundary value problems» (Оксфорд, Нью-Йорк), а в 1980 году издательство «Мир» (Москва) опубликовало её на испанском языке под названием «Problemas de Contorno».



Рис. 1. Ф.Д. Гахов – профессор БГУ

Ф.Д. Гахов входил в число организаторов первых республиканских математических конференции, которые проходили в Минске 1964 г., 1967 г., 1971 г. и 1975 г. На этом поприще принимал деятельное участие как заместитель председателя Оргкомитета, а также выполнял редактирование материалов, поступивших для включения в соответствующие сборники. Благодаря его усилиям на эти научные форумы в Минск съезжались именитые математики из большинства республик Советского Союза.

В 1966 году Ф.Д. Гахов стал действительным членом Академии наук БССР.

В 1969 году (28–31 мая) в Казани проходила масштабная «Всесоюзная научная конференция по краевым задачам и их приложениям в механике жидкости и газа», собравшая практически всех учеников Фёдора Дмитриевича (рис. 2).



Рис. 2. Ф.Д. Гахов и участники конференции в Казани (1969 г.)

В 1973 году в БГУ произошла реорганизация кафедры математического анализа, с этого момента она стала именоваться кафедрой теории функций и функционального анализа. С 1973 по 1975 гг. Ф.Д. Гахов был заведующим этого структурного подразделения. С 1975 по 1980 гг. Фёдор Дмитриевич был профессором-консультантом кафедры теории функций БГУ. В 1976 году его наградили за большие заслуги в деле подготовки научных кадров орденом Трудового Красного Знамени.

В 1977 году вышло третье издание книги «Краевые задачи», а в 1978 году напечатана монография «Уравнения типа свёртки», написанная в соавторстве с Ю. И. Черским. В основу книги положены курсы лекций, читавшиеся авторами студентам Белорусского (Гахов), а также Одесского и Симферопольского (Черский) госуниверситетов. В предисловии авторы отметили, что для исследования уравнений типа свёртки в мировой литературе сформировались три направления: *прикладное* (развивалось физиками и техниками, преимущественно в США); *функционально-теоретическое* (характеризовалось общностью и абстрактностью постановки задач, у истоков был советский математик М.Г. Крейн (1907–1989)); *конструктивное* (своеобразный симбиоз доказательства существования решений с алгоритмом его получения, родилось благодаря трудам Н. Винера (1894–1964), Э.Ф.Ф. Хопфа (1902–1983), В.А. Фока (1898–1974), И.М. Рапопорта (1913–??). Книга написана на основе конструктивного подхода. Ключевые достижения авторов этой книги: развитие теории Винера-Хопфа; ясное и связное изложение теории уравнений первого рода; появление «уравнения плавного перехода»; широкое практическое применение в теории игр, теории массового обслуживания, теории автоматического управления и других отраслях физико-математических наук.

Нельзя не отметить, что на протяжении долгого периода времени Ф.Д. Гахов входил в состав Президиума научно-методического Совета Минвуза СССР, – общественного органа, основное назначение которого состояло в обеспечении научно-методического руководства системой высшего образования и выработке стратегических решений по её развитию.

Ф.Д. Гахов входил в состав редколлегии научного журнала «Известия Академии наук БССР, серия физико-математических наук» (начал публиковаться с 1965 года) и научно-теоретического журнала «Вестник БГУ. Серия 1: Физика. Математика. Информатика» (начало выхода – 1969 г.).

На протяжении всех лет, прожитых в Минске, Ф.Д. Гахов активно и плодотворно работал со своими аспирантами, а также соискателями учёной степени, приехавшими из стран соцлагеря и дружественных Советскому Союзу.

Таблица 3.
Ученики Ф. Д. Гахова минского периода и их диссертации

33.	Чумаков Фёдор Васильевич (1936 г.р.) Работал инженером-программистом в ВЦ БГУ (с 1959 г.). автор учебно-методического пособия «Высшая математика. Предел и непрерывность» (2007).	1966, БГУ	Интегральные уравнения со степенным и логарифмическим ядром
34.	Самко Стефан Григорьевич (1941 г.р.). Родился в г. Ростов-на-Дону. Окончил РГУ (1964). В РГУ работал на кафедре дифференциальных уравнений (с 1966 г.). Доктор физико-математических наук (с 1979 г.). С 1979 по 1981 был деканом мехмата РГУ. Профессор (с 1981 г.). С	1967, БГУ	Общее сингулярное уравнение и обобщённое уравнение Абеля

ПЕРСОНАЛИИ

	1989 по 1998 гг. заведовал кафедрой дифференциальных и интегральных уравнений РГУ. Автор и соавтор монографий: «Гиперсингулярные интегралы и их обращения» (РГУ, 1984 г.), «Интегралы и производные дробного порядка» (Минск, 1987), «Уравнения с инволютными операторами и их приложения» (1988).	1979, Москва	Методы обращения операторов типа потенциала и уравнения с инволютными операторами
35.	<i>Рысюк Нина Антоновна</i> (1932 г.р.). Родилась в дер. Конно Гродненской области. Окончила БГУ (1954). Работала в БГПИ (политехе, 1954–1995). Доцент (с 1972 г.)	БГУ, 1967	Краевая задача Римана для системы m пар автоморфных функций
36.	<i>Комяк Иван Иванович</i> (1943–1980). Родился в дер. Первомайск Минской области. Окончил БГУ (1964). Работал доцентом на кафедре математического анализа БГУ.	БГУ, 1968	Интегральные уравнения типа свёртки с сопряжением и со многими ядрами
37.	<i>Шешко Михаил Антонович</i> (1937–2019). Родился в д. Зеленки Минской области. Окончил БГУ (1961). Работал на кафедре высшей математики и математической физики БГУ (с 1961 по 1999 гг.). Доктор физико-математических наук (с 1993 г.), профессор (с 1995 г.).	БГУ, 1968	О краевых задачах с сопряжением
		Москва, 1992	Приближённое решение сингулярных интегральных уравнений с помощью вычетов
38.	<i>Хоанг Динь Зунг</i> – аспирант из Вьетнама	1969, БГУ	Устойчивость обратной краевой задачи
39.	<i>Юров Павел Георгиевич</i> (1926–1998). С 1958 по 1998 гг. работал доцентом на кафедре МФХ Шахтинского автодорожного института.	1969, РГУ	Краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка
40.	<i>Примачук Леонид Платонович</i> (1943–2024). Родился в местечке Мацы Брестской области. В БГУ работал с 1967 по г. Преподавал в университетах Алжира (1973–1976) и Буркина Фасо (1981–1984). Доцент (с 1980 г.). Декан мехмата БГУ (с 1985 по 1996 гг.). Один из авторов учебного пособия «Математический анализ. Функции многих переменных и дифференциальные формы» (Минск, 2010).	1969, БГУ	О разрешимости краевых задач со сдвигом
41.	<i>Соколов Иван Александрович</i> (1929–2000)	1970, БГУ	О краевых задачах типа Римана Для полианалитических функций
42.	<i>Маричев Олег Игоревич</i> (1945 г.р.). Родился в г. Великие Луки Псковской области. Окончил БГУ (1968). С 1968 по 1975 гг. работал на кафедре теории функций и функционального анализа БГУ	1972, БГУ	Краевая задача Трикоми для некоторых уравнений смешанного типа и интегральные уравнения со специальными функциями в

	(1975–1990). Доцент (с 1976 г.), доктор физико-математических наук (с 1990 г.). Автор и соавтор книг: «Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул) (Минск, 1978); «Интегралы и ряды. Элементарные функции» (М., 1981); «Интегралы и ряды. Специальные функции» (М., 1983). «Интегралы и ряды. Специальные функции. Дополнительные главы» (М., 1986); «Интегралы и производные дробного порядка» (Минск, 1987).		ядрах
		1990, Йена, Германия	Функции гипергеометрического типа и некоторые их приложения к интегральным и дифференциальным уравнениям
43.	<i>Толочко Мариан Эдуардович</i> (1943 г.р.). Родился в г. Гродно. Окончил БГУ (1965). Работал доцентом на кафедре теории функций БГУ.	1972, БГУ	Краевая задача Римана с бесконечным индексом для полуплоскости и многосвязных областей
44.	<i>Тузик Альфред Иванович</i> (1945 г.р.). Заведовал кафедрой высшей математики Брестского государственного технического университета (с 1970 по 1981 гг.).	1973, БГУ	Особые интегральные уравнения с ядром Коши в исключительном случае
45.	<i>Фесчиев Иван Христов</i> – аспирант из Болгарии.	1974, БГУ	Вычисление двумерных сингулярных интегралов и интегралов типа Коши и их приложения
46.	<i>Алекна Зенонас-Пятрос Юозович</i> (1938 г.р.). Родился в Литве. Окончил Шауляйский пединститут (1962). Работал в Шауляйском пединституте (с 1962 г.), был проректором по научной работе (с 1980 г.), доцент (с 1977 г.).	1975, БГУ	Краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости
47.	<i>Килбас Анатолий Александрович</i> (1948–2010). Родился в г. Минск. Окончил БГУ (1971). В БГУ работал с 1971 г. Профессор (с 1997 г.). Заведовал кафедрой теории функций БГУ (с 2002 по 2010 гг.). Автор и соавтор книг: «Интегралы и производные дробного порядка» (Минск, 1987); «Интегральные уравнения: курс лекций» (Минск, 2005).	1976, БГУ	Операторы типа потенциала со степенно-логарифмическими ядрами и интегральные уравнения, разрешаемые в замкнутой форме
		1995, ИМ НАН Беларуси	Операторы дробного интегрирования. Асимптотические и композиционные свойства и приложения
48.	<i>Усс Анатолий Терентьевич</i> (1949 г.р.). Родился в г. Брест. Окончил БГУ (1972). Работал на кафедре математического анализа БГУ (1972–1974), в Гомельском госуниверситете им. Ф. Скорины (1974–1995), на кафедре математического анализа и дифференциальных уравнений Брестского госуниверситета им. А. С. Пушкина (с 1995–2006).	1977, БГУ	Некоторые вопросы регуляризуемости эллиптических краевых задач
49.	<i>Габринович Владимир Антонович</i> (1944–	1978,	Краевые задачи

ПЕРСОНАЛИИ

	2003).	БГУ	карлемановского типа для полианалитических и метааналитических функций
50.	<i>Алехно Александр Григорьевич</i> (1949–2011). Родился в г. Бобруйск Могилевской области. Окончил БГУ (1972). Доцент (с 1984 г.). Доктор физико-математических наук (с 2005 г.). Работал профессором кафедры общей математики и информатики БГУ (с 2008 г.).	1980, БГУ	Краевые задачи с конечным числом точек завихрения
		2005, Минск	Краевые задачи с бесконечным индексом и некоторые их приложения (рук. Э.И. Зверович)
51.	<i>Рогозин Сергей Васильевич</i> (1952 г.р.). Окончил БГУ (1974). Преподавал в Сыктывкарском госуниверситете (с 1974 по 1977 гг.). В БГУ работает с 1977 г. Доцент с 1983 г.	1980, БГУ	Краевая задача Римана с бесконечным индексом для полуплоскости в исключительном случае (руководители: Ф.Д. Гахов и М.Э. Толочко)
52.	<i>Васильев Игорь Леонидович</i> (1955–2024). Родился в г. Столбцы Минской области. Окончил БГУ (1977). Работал на кафедре теории функций БГУ (с 1980–1988, 1991–2024). Преподавал в университете г. Лагуат (Алжир, 1988–1991).	1982, БГУ	Операторы типа потенциала с матричными коэффициентами и системы обобщённых уравнений Абеля (руководители: Ф.Д. Гахов и Ф.В. Чумаков)



Рис. 3. Надгробие на могиле Ф. Д. Гахова

Осенью 1979 года у Фёдора Дмитриевича случился инсульт, его частично парализовало, он начал лечиться, но 30 марта 1980 года жизненный путь Ф. Д. Гахова оборвался. Похоронили учёного на Северном кладбище Минска.

На его могиле установлен памятник в виде раскрытой книги, на левой стороне которого находится портрет-барельеф учёного, под ним – надписи из бронзы, указывающие на его личность, статус («Академик АН БССР»), а также даты рождения и смерти. На правой – литая надпись: «Краевые задачи», под которой размещена формула, полученная им при решении задачи Римана, а ещё ниже – металлическая пластина, на которой выгравированы города СССР, в которых жил и работал Фёдор Дмитриевич и его ученики (рис. 3).

Заключение

Фёдор Дмитриевич Гахов прожил плодотворную и насыщенную событиями жизнь. Казанский период его жизни и научной деятельности – это становление учёного и обретение первых учеников, с многими из которых он общался и поддерживал научные контакты длительное время. Ростовский период – этап расширения его школы и спектра проводимых ею исследований, а также период скрупулёзной работы над первой монографией. Минский, самый продолжительный период, – этап укрепления учёного в статусе одного из ведущих специалистов в стране в области граничных задач и теории интегральных уравнений. Таким образом, Ф. Д. Гахову удалось в трёх университетах страны, что беспрецедентно само по себе, создать крупную научную школу мирового уровня, труды которой подняли и сильно продвинули отечественную математическую науку.

Список литературы

- Абламейко С.В., Журавков М.А. Математика и математики БГУ и Беларуси: 100 лет развития. Минск: БГУ, 2021.
- Аксентьев Л.А., Какичев В.А. Федор Дмитриевич Гахов, 1906–1980. Казань: Изд-во Казанского университета, 2005.
- Гахов Ф.Д. Семинар по математическому анализу и механике при Ростовском государственном университете // Успехи математических наук. 1957. 12:3 (75). С. 263–266.
- Зверович Э.И. О научных исследованиях на кафедре теории функций механико-математического факультета БГУ за последние 50 лет // Вестник БГУ. Сер. 1. 2016. № 3. С. 10–12.
- Коробейник Ю.Ф., Ерусалимский Я.М., Налбандян М.Б., Рожанская Н.Н. Механико-математический факультет Ростовского государственного университета (краткий исторический очерк). Ростов-на-Дону, 1989.
- Пути познания: Биографические. очерки о видных учёных Ростовского государственного университета им. М. А. Суслова. Отв. ред. В.И. Филоненко. Ростов-на-Дону: РГУ, 1985.
- Чибрикова Л.И. Роль Ф. Д. Гахова в становлении и развитии научных исследований по краевым задачам и сингулярным интегральным уравнениям // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 3. Казань: Изд-во «УНИПРЕСС», 1999. С. 387–393.
- Чепинога М.М. Фёдор Дмитриевич Гахов (к шестидесятилетию со дня рождения) // Успехи математических наук. 1967. 22:4 (136). С. 191.

Информация об авторах

Бровка Наталья Владимировна; доктор педагогических наук; кандидат физико-математических наук; профессор; заведующий кафедрой теории функций; «Белорусский государственный университет» (Республика Беларусь, 220030, г. Минск, проспект Независимости, 4.); E-mail: n_br@mail.ru; ORCID: 0000-0002-8106-4318;

Мельников Роман Анатольевич; кандидат педагогических наук; доцент; доцент кафедры математики, информатики, физики и методики обучения; ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И. А. Бунина» (Российская Федерация,

399770, г. Елец, Липецкая область, ул. Коммунаров, д. 28); E-mail: roman_elets_08@mail.ru; ORCID: 0000-0003-4498-2459; Scopus ID: 57199329736

SCIENTIFIC SCHOOL ON BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF ACADEMICIAN FYODOR DMITRIEVICH GAKHOV (ON THE 120TH ANNIVERSARY OF THE SCIENTIST'S BIRTH)

Brovka N. V. Dr. Sci. (Pedagogy), Professor Melnikov R. A. Cand. Sci. (Pedagogy), Associate Professor	Belarusian State University Bunin Yelets State University
---	---

Abstract. 2026 marks the 120th anniversary of the birth of Fyodor Dmitrievich Gakhov (1906–1980), a renowned Soviet mathematician and one of the founders of a major scientific school in the theory of boundary value problems for analytic functions and singular integral equations, whose centers were located at various times in Kazan, Rostov-on-Don, and Minsk. This article contains a brief description of the scientist's life, as well as a chronology and overview of the achievements of his students, and brief biographical and bibliographic information on the most significant representatives of this scientific school.

Keywords: F.D. Gakhov, scientific school, Kazan, Rostov-on-Don, Minsk, boundary value problems, theory of analytic functions, integral equations

For citation: Brovka N. V., Melnikov R. A. (2026). Scientific School on Boundary Value problems of Academician Fyodor Dmitrievich Gakhov (on the 120th anniversary of the scientist's birth). *Continuum. Mathematics. Computer Science. Education*, 3 (43), 143–159. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-143-159

Copyright: © N. V. Brovka, R. A. Melnikov (2026). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

References

- Ablamejko, S. V., Zhuravkov, M. A. (2021). *Matematika i matematiki BGU i Belarusi: 100 let razvitiya*. Minsk: BGU. (in Russ.).
- Aksent'ev, L. A., Kakichev, V. A. (2005). *Fedor Dmitrievich Gakhov, 1906–1980*. Kazan': Izd-vo Kazanskogo universiteta. (in Russ.).
- Chibrikova, L. I. (1999). Rol' F.D. Gakhova v stanovlenii i razvitii nauchnyh issledovanij po kraevym zadacham i singulyarnym integral'nym uravneniyam. *Trudy Matematicheskogo centra imeni N. I. Lobachevskogo*. T. 3. Kazan': Izd-vo «UNIPRESS», 387–393. (in Russ.).
- Chepinoga, M. M. (1967). Fyodor Dmitrievich Gakhov (k shestidesyatiletiyu so dnya rozhdeniya). *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 22:4 (136), 191. (in Russ.).
- Filonenko, V. I. (Ed.). (1985). *Putyami poznaniya: Biograficheskie ocherki o vidnykh uchyonykh Rostovskogo gosudarstvennogo universiteta im. M.A. Suslova*. Rostov-na-Donu: RGU. (in Russ.).
- Gakhov, F. D. (1957). Seminar po matematicheskomu analizu i mekhanike pri Rostovskom gosudarstvennom universitete. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 12:3 (75), 263–266. (in Russ.).

- Korobejnik, Yu. F., Erusalimskij, Ya. M., Nalbandyan, M. B., Rozhanskaya, N. N. (1989). *Mekhaniko-matematicheskij fakul'tet Rostovskogo gosudarstvennogo universiteta (kratkij istoricheskij ocherk)*. Rostov-na-Donu. (in Russ.).
- Zverovich, E. I. (2016). The research at the department of function theory of the faculty of mechanics and mathematics in BSU over the last 50 years. *Vestnik BGU. Ser. I, Fiz. Mat. Inform*, 3, 10–12. (In Russ., abstract in Eng.)

Information about the authors

Natalia V. Brovka; Doctor of Pedagogical Sciences; Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Professor; Head of the Department of Function Theory; Belarusian State University (220030, Minsk, 4 Nezavisimosti Avenue, Republic of Belarus); E-mail: n_br@mail.ru; ORCID: 0000-0002-8106-4318;

Roman A. Melnikov; Candidate of Pedagogical Sciences; Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics, Computer Science, Physics, and Teaching Methods; Bunin Yelets State University (Kommunarov Street, 28, Yelets, Lipetsk Region, 399770, Russian Federation); roman_elets_08@mail.ru; ORCID: 0000-0003-4498-2459; Scopus ID: 57199329736

Статья поступила в редакцию	15.07.2026
Принята к публикации	10.08.2026
Статья опубликована	18.09.2026

DOI: 10.24888/2500-1957-2026-3-160-177

УДК
378.242

**ЮРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ ВОЛКОВ: ГЕОМЕТР, ПЕДАГОГ,
РУКОВОДИТЕЛЬ КАФЕДРЫ ГЕОМЕТРИИ
ЛЕНИНГРАДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
(К 95-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)**

Волков Дмитрий Юрьевич
к. ф.-м. н., доцент

Санкт-Петербургский государственный
университет аэрокосмического
приборостроения

Галунова Ксения Валерьевна
к. ф.-м. н., доцент

Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого

Аннотация. Статья посвящена Юрию Александровичу Волкову (1930–1981) – представителю ленинградской геометрической школы, ученику А. Д. Александрова, доктору физико-математических наук, профессору, многолетнему заведующему кафедрой геометрии математико-механического факультета Ленинградского государственного университета. Актуальность обращения к его научной биографии определяется тем, что вклад Ю. А. Волкова в геометрию «в целом», несмотря на высокую оценку современников, недостаточно представлен в историко-математической литературе. В статье на основе опубликованных работ, архивных и мемуарных материалов рассматриваются основные этапы его жизни, научной и педагогической деятельности. Особое внимание уделено работам Ю. А. Волкова по теории выпуклых поверхностей и многогранников: вариационному методу доказательства существования выпуклого многогранника с данной развёрткой, результатам, связанным с проблемами Вейля и Минковского, а также оценкам устойчивости решений классических задач теории выпуклых тел. Эти результаты рассматриваются в контексте исследований А. Д. Александрова, А. В. Погорелова и ленинградской школы геометрии. Отдельно характеризуется деятельность Ю. А. Волкова как руководителя кафедры, лектора и научного руководителя аспирантов. Показано, что его научное наследие не сводится к отдельным теоремам, а представляет собой целостную исследовательскую линию, связанную с развитием вариационных методов в геометрии выпуклых тел. Статья направлена на уточнение места Ю. А. Волкова в истории отечественной геометрии и сохранение памяти о нём как об учёном, педагоге и организаторе университетской науки.

Ключевые слова: Ю. А. Волков, А. Д. Александров, ленинградская геометрическая школа, геометрия в целом, выпуклые поверхности, выпуклые многогранники, проблема Вейля, проблема Минковского, вариационный метод, устойчивость

Для цитирования: Волков Д. Ю., Галунова К. В. Юрий Александрович Волков: геометр, педагог, руководитель кафедры геометрии Ленинградского университета (к 95-летию со дня рождения) // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2026. № 3 (43). С. 160–177. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-160-177

Права: © Д. Ю. Волков, К. В. Галунова (2026). Опубликовано Елецким

государственным университетом им. И. А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

Введение. Ю. А. Волков в отечественной геометрии

Юрий Александрович Волков (1930–1981) принадлежит к числу ярких представителей ленинградской геометрической школы второй половины XX века. Его научная судьба была тесно связана с математико-механическим факультетом Ленинградского университета, с кафедрой геометрии и с научной школой Александра Даниловича Александрова (Залгаллер, 2002, с. 22–23; Решетняк, 2002, с. 38, 44). Именно в этой школе были поставлены и решены многие фундаментальные задачи геометрии «в целом», прежде всего задачи теории выпуклых поверхностей, где внутренняя геометрия поверхности соединяется с её внешней формой в пространстве (Борисов и др., 2006, с. VII–X).

Научные интересы Ю. А. Волкова были связаны с кругом вопросов, восходящих к классическим проблемам Вейля и Минковского. Эти проблемы занимают особое место в геометрии выпуклых поверхностей. В них речь идёт не только о построении геометрического объекта по заданным внутренним или внешним данным, но и о глубокой связи между метрикой, кривизной, формой и единственностью выпуклой поверхности. В работах А. Д. Александрова эти задачи получили новое, чрезвычайно широкое понимание (Александров, Погорелов, 2006, с. 627–635; Борисов и др., 2006, с. VII–X). Волков вошёл в эту область как ученик Александрова, но очень быстро нашёл в ней собственную линию (Залгаллер, 2002, с. 22–23; Погорелов, 1968, с. 1–4).

Главным вкладом Ю. А. Волкова стало развитие вариационного подхода к задачам существования и устойчивости в теории выпуклых многогранников и поверхностей. Его работы дали новое доказательство теоремы о существовании выпуклого многогранника с данной развёрткой, а затем привели к важным результатам об устойчивости решений проблемы Вейля и проблемы Минковского (Волков, 1960, с. 75–86; Волков, 1963, с. 33–43; Волков, 1968а, с. 1238–1240; Волков, 1968б, с. 44–69). Существенно, что Волкова интересовало не только само существование геометрического объекта, но и количественная сторона вопроса: насколько меняется выпуклая поверхность при малом изменении её внутренних или внешних данных. Благодаря этому его результаты оказались важны не только как завершение определённых классических задач, но и как развитие нового метода в геометрии.

Особое значение имеет и педагогическая сторона деятельности Ю. А. Волкова. Для него работа с учениками была естественным продолжением научного творчества (Залгаллер, 2002, с. 23). Темы, которые он предлагал аспирантам, часто были связаны с его собственными замыслами и с дальнейшим развитием вариационного метода. Через работы его учеников продолжались исследования о многогранниках, выпуклых поверхностях, изгибаниях, задачах существования и устойчивости. Поэтому рассказ о Волкове как математике неотделим от рассказа о нём как об учителе.

Жизнь Ю. А. Волкова оборвалась рано. Он не успел полностью осуществить многие научные планы, но оставил после себя работы, идеи, учеников и память о человеке редкой математической добросовестности (Залгаллер, 2002, с. 23; Решетняк, 2002, с. 44). Его имя занимает достойное место в истории отечественной геометрии, а обращение к его научному наследию важно не только для сохранения исторической памяти, но и для понимания внутренней логики развития ленинградской школы геометрии «в целом». В этом смысле работы Волкова важны не только как отдельные результаты, но и как свидетельство особого типа геометрического мышления, характерного для школы А. Д. Александрова.

Семья, детство, путь к математике

Юрий Александрович Волков родился 2 сентября 1930 года в Казани. Его родители принадлежали к тому поколению, которому пришлось очень рано входить во взрослую

жизнь и строить свою судьбу в трудные годы. Отец, Александр Иванович Митрофанов (1907–1956), был агрономом; в последние годы жизни он занимал должность заместителя министра сельского хозяйства РСФСР. Мать, Нина Антоновна Волкова (1905–1983), стала врачом-педиатром. Ко времени рождения сына Нина Антоновна и Александр Иванович были студентами. Родители Александра Ивановича были крестьянами, однако жизнь страны тогда быстро менялась, и Александр Иванович и все его родные братья и сёстры получили высшее образование, стали учеными и врачами. В такой атмосфере естественно формировались серьёзность, самостоятельность и ранняя привычка к умственному труду. Александр Иванович всю жизнь собирал книги, эту черту унаследовал и Юрий Александрович.

Детство Юрия Александровича пришлось на предвоенные и военные годы. Как и многим его сверстникам, ему рано пришлось узнать, что такое трудные обстоятельства времени. Учился Юрий Александрович с увлечением. Он проявлял способности к точным наукам, интересовался не только математикой, но и физикой, ходил на дополнительные курсы немецкого языка. В выпускном классе он стал победителем городской математической олимпиады. В 1947 году, окончив школу с серебряной медалью, Юрий Александрович поступил на математико-механический факультет Ленинградского государственного университета.



Ю. А. Волков в 1960-е годы

Курс 1947 года, на который он поступил, был замечательным даже по меркам сильного математико-механического факультета ЛГУ. Среди его сокурсников были будущие крупные учёные: В. М. Бабич, Ю. Г. Решетняк, Г. И. Натансон, В. В. Петров и другие. Несколько выпускников этого набора стали академиками, профессорами ведущих университетов, руководителями научных институтов (Наш курс, 2002, с. 2, 4–16). Это было поколение, выросшее в годы войны и первых послевоенных лет, но вошедшее в науку с большой внутренней энергией и верой в силу знания. По воспоминаниям современников, Юрий Александрович уже тогда выделялся среди сильнейших студентов курса широтой интересов, серьёзностью и глубиной подготовки (Бабич, 2002, с. 26–28; Залгаллер, 2002, с. 19–20).

Особенно важной для его дальнейшей судьбы стала встреча с геометрией и с научной школой Александра Даниловича Александрова. Уже на втором курсе Юрий Александрович начал посещать семинар А. Д. Александрова, где обсуждались идеи, связанные с недавно вышедшей книгой «Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей» (Решетняк, 2002, с. 38). Для молодого математика это было вхождением не только в конкретную область исследований, но и в особый стиль мышления. Геометрия в школе Александрова понималась как исследование формы, метрики и пространства в целом, где наглядная геометрическая интуиция соединялась с высокой строгостью рассуждений (Борисов и др., 2006, с. VII–X).

С этого времени теория выпуклых поверхностей стала центральной темой научных интересов Юрия Александровича и, по существу, делом всей его жизни. После окончания математико-механического факультета Юрий Александрович поступил в аспирантуру к А. Д. Александрову и в 1955 году защитил кандидатскую диссертацию «Существование выпуклого многогранника». После защиты диссертации он был принят на работу на факультет, с которым оказалась связана вся его дальнейшая жизнь (Залгаллер, 2002, с. 19–20; Наш курс, 2002, с. 5–6). В 1968 году Юрий Александрович защитил докторскую диссертацию «Оценка деформации выпуклой поверхности в зависимости от изменения её внутренней метрики». В 1970 году ему была присуждена премия Ленинградского

университета за цикл работ по геометрии «в целом» (Решетняк, 2002, с. 44; Погорелов, 1968, с. 1–4).

Жизнь Юрия Александровича оборвалась рано: он скончался 23 мая 1981 года после тяжёлой продолжительной болезни.

В 1959 году Юрий Александрович женился на Ираиде Дмитриевне Сеницыной, выпускнице библиотечного института, работавшей тогда в Публичной библиотеке. Знакомство будущих супругов произошло у стойки выдачи книг – характерная деталь послевоенной университетской жизни Ленинграда.

В семье Волковых родились два сына – Александр (1961) и Дмитрий (1963), оба впоследствии связали жизнь с математикой. Сегодня у Юрия Александровича шесть внуков и пять правнуков. Дом Волковых был местом, где сочетались семейная жизнь и научные обсуждения: здесь Юрий Александрович часто беседовал с аспирантами, обсуждал задачи и делился опытом, что делало его домашнюю среду продолжением университета и кафедры.

От проблемы Вейля к методам Ю. А. Волкова

Научная деятельность Юрия Александровича Волкова была связана с двумя центральными проблемами геометрии выпуклых тел – проблемой Минковского и проблемой Вейля. Проблема Минковского, впервые рассмотренная Германом Минковским в начале XX века, заключается в построении замкнутой выпуклой поверхности, у которой гауссова кривизна задаётся функцией нормали. Проблема Вейля, сформулированная в 1916 году, рассматривает возможность реализации на сфере регулярной римановой метрики положительной кривизны как внутренней метрики замкнутой выпуклой поверхности в трёхмерном пространстве. В аналитическом виде обе задачи сводятся к нелинейным уравнениям в частных производных типа Монжа–Ампера (Александров, Погорелов, 2006, с. 627–637).

Вейлю удалось наметить решение для метрик, близких к стандартной сфере; позднее Г. Леви показал, что любая аналитическая метрика положительной кривизны реализуется аналитической выпуклой поверхностью. Их работы были основаны на теории уравнений в частных производных (Вейль, 1948, с. 167, 187). Принципиально новый подход был разработан А. Д. Александровым: вместо анализа уравнений Монжа–Ампера он перенёс задачу в дискретный контекст, сначала исследуя многогранники с заданной развёрткой, а затем, переходя к пределу, распространил результаты на произвольные выпуклые поверхности. Полное изложение теории выпуклых многогранников было дано Александровым в фундаментальной монографии «Выпуклые многогранники», позднее вошедшей в переработанном виде во второй том его «Избранных трудов» (Александров, 1950; Александров, 2007).

В такой научной атмосфере начал свою исследовательскую деятельность Ю. А. Волков, поступив в аспирантуру в 1952 году. Его работы открыли новый этап в изучении геометрии выпуклых поверхностей, соединяя классические идеи Александрова с принципиально новыми конструктивными методами.

Вариационный метод Ю. А. Волкова

При работе над кандидатской диссертацией Юрий Александрович разработал оригинальное доказательство теоремы Александрова о существовании выпуклого многогранника, заданного развёрткой. Знаменитые немецкие геометры В. Бляшке и Г. Герглотц пытались вариационным методом решить проблему Вейля, но им не удалось провести доказательство. Ю. А. Волков разработал новый вариационный метод. Основные идеи метода можно условно разделить на три этапа:

1. **Развёртка источника.** На первом этапе Волков переходит от исходной развёртки к специальной развёртке. В современной литературе эту развёртку называют развёрткой от источника (*source unfolding*). Эта развёртка тесно связана с понятием множества разреза, или *cut locus*, позднее ставшего фундаментальным объектом вычислительной геометрии.

2. **Обобщённый многогранник.** На основе развёртки источника Волков построил обобщённый (телесный) многогранник, состоящий из комбинации пирамид с общей вершиной. Углы при рёбрах могли превышать 2π , поэтому такой объект уже не был обычным выпуклым многогранником, но сохранял достаточно геометрической структуры, чтобы к нему можно было применять вариационный метод.
3. **Вариационный принцип.** На множестве специальных развёрток Волков рассматривал функционал, равный сумме длин внутренних рёбер, и доказывал существование развёртки, на которой этот функционал достигает минимума. Если при каком-либо внутреннем ребре угол превышал 2π , ребро можно было укоротить, не изменяя метрики поверхности, что противоречило минимальности. Следовательно, в минимизирующей развёртке все углы при внутренних рёбрах равны 2π , и из неё склеивается искомый выпуклый многогранник (Волков, 2018, с. 50–78).

Метод Волкова дал не только новое доказательство теоремы Александрова. Впоследствии Юрий Александрович изучал изменение формы выпуклых поверхностей в зависимости от изменения их характеристик.

Устойчивость в проблеме Минковского

После работы над многогранным вариантом проблемы Вейля Ю. А. Волков обратился к другой классической задаче геометрии выпуклых тел – проблеме Минковского. Если в проблеме Вейля исходными данными являются внутренняя метрика поверхности, то в проблеме Минковского поверхность задаётся иначе: требуется построить замкнутую выпуклую поверхность, у которой гауссова кривизна является заданной функцией направления внешней нормали.

Эта задача имеет простой и наглядный геометрический смысл. У каждой гладкой строго выпуклой поверхности внешняя нормаль в каждой точке задаёт направление на единичной сфере. Поэтому гауссову кривизну можно рассматривать как функцию на сфере направлений. Проблема Минковского спрашивает, когда такая функция действительно определяет выпуклую поверхность (Александров, Погорелов, 2006, с. 627–631).

Как и в случае проблемы Вейля, здесь существует многогранный аналог. Его впервые рассмотрел Г. Минковский. Вместо гладкой поверхности рассматривается выпуклый многогранник, а вместо функции кривизны – набор направлений внешних нормалей к граням и площадей этих граней. Уже в такой форме задача содержит глубокую связь между внешними данными и самой формой многогранника. В работах Г. Минковского, а затем А. Д. Александрова проблема получила обобщённое решение. Но после решения вопроса существования, естественно, возникал следующий, более тонкий вопрос: насколько устойчиво это решение? (Александров, Погорелов, 2006, с. 627–631; Погорелов, 1968, с. 3–4).

Именно этот вопрос и оказался в центре внимания Ю. А. Волкова. Он рассматривал две замкнутые выпуклые поверхности, у которых поверхностные функции близки друг к другу, и устанавливал, насколько при этом близки сами поверхности. Иначе говоря, речь шла не только о том, что заданные данные определяют выпуклое тело, но и о количественной зависимости формы тела от этих данных.

Такой переход от качественной теоремы к количественной оценке был характерен для научного стиля Волкова. Его интересовала не только сама возможность построения выпуклой поверхности, но и то, как изменяется поверхность при малом изменении исходных данных. В задаче Минковского это приводило к оценке разности опорных функций двух выпуклых поверхностей через относительное изменение их поверхностных функций. Тем самым задача существования дополнялась задачей устойчивости (Волков, 1963, с. 33–43; Погорелов, 1968, с. 3–4).

Работа Волкова по устойчивости в проблеме Минковского была опубликована в 1963 году. Позднее эта линия получила продолжение в работах В. И. Дисканта (Дискант, 1973, с. 669–673).

Устойчивость в проблеме Вейля и проблема Кон-Фоссена

После работ, связанных с проблемой Минковского, Ю. А. Волков вновь обратился к кругу вопросов, восходящих к проблеме Вейля. Здесь центральной стала задача, поставленная С. Э. Кон-Фоссеном: можно ли оценить изменение пространственной формы замкнутой выпуклой поверхности через изменение её внутренней метрики? (Погорелов, 1968, с. 2–3; Волков, 1968а, с. 1238–1240; Волков, 1968б, с. 44–69).

Смысл этой задачи можно объяснить следующим образом. Классическая теорема однозначной определённости утверждает, что замкнутая выпуклая поверхность определяется своей внутренней метрикой с точностью до движения в пространстве. Иными словами, если две замкнутые выпуклые поверхности изометричны, то они равны как поверхности в евклидовом пространстве. Эта фундаментальная теорема была подготовлена работами Герглотца, Кон-Фоссена и других геометров; окончательный результат получил А. В. Погорелов. Кон-Фоссен поставил более тонкий вопрос: что можно сказать, если метрики не совпадают точно, а только близки? (Погорелов, 1968, с. 2–3).

Именно этот вопрос и был решён Ю. А. Волковым. Он доказал, что малое искажение внутренней метрики замкнутой выпуклой поверхности влечёт малое пространственное искажение самой поверхности, причём получил явную количественную оценку. Таким образом, речь шла уже не только о качественной однозначности, но и об устойчивости: близкие внутренние метрики задают близкие выпуклые поверхности (Волков, 1968а, с. 1238–1240; Волков, 1968б, с. 44–69; Погорелов, 1968, с. 2–3).

В более точной форме результат Волкова можно сформулировать так. Пусть S^0 и S^1 – две замкнутые выпуклые поверхности с внутренними метриками ρ^0 и ρ^1 . Предположим, что существует взаимно однозначное отображение $\varphi: S^0 \rightarrow S^1$, при котором внутренние расстояния между соответствующими парами точек отличаются не более чем на малую величину ε . Тогда, после подходящего расположения поверхностей в пространстве, соответствующие точки этих поверхностей оказываются близкими и в евклидовом пространстве. Более того, эта близость оценивается явно через ε и внутренний диаметр поверхности (Волков, 1968а, с. 1238–1240; Волков, 1968б, с. 44–69; Погорелов, 1968, с. 2–3).

Особая сила этого результата состоит в том, что при $\varepsilon = 0$ он даёт теорему однозначной определённости замкнутой выпуклой поверхности её метрикой, доказанную Погореловым (Погорелов, 1968, с. 3).

Трудность проблемы Кон-Фоссена была исключительно велика. Пространственная форма поверхности связана с её внутренней метрикой через нелинейные дифференциальные соотношения; в классическом гладком случае здесь появляется уравнение Дарбу, в которое входят вторые производные метрической формы. Поэтому малое изменение самой метрики вовсе не обязано давать малое изменение её вторых производных. С аналитической точки зрения это делает прямую оценку пространственной деформации чрезвычайно трудной. Нужно было найти иной, более геометрический путь (Александров, Погорелов, 2006, с. 631–635; Волков, 1968б, с. 44–69).

Такой путь и был найден Ю. А. Волковым. В основе его доказательства лежало глубокое развитие аппарата, возникшего ещё в первой работе цикла о многогранниках с данной развёрткой. Волков рассматривал специальные многогранные конструкции, связанные с заданной внутренней метрикой, и исследовал изменение функционала интегральной средней кривизны при варьировании этой метрики. Тщательные оценки приращений этого функционала позволили сравнить внутренние и пространственные искажения формы поверхности (Волков, 1968б, с. 44–69).

Именно здесь проявилась характерная черта математического стиля Волкова. Он не шёл прямым аналитическим путём через уравнения, где малые изменения исходных данных могли приводить к неконтролируемым изменениям производных. Вместо этого он строил геометрический аппарат, в котором сама задача становилась доступной для оценки. Так вариационный метод, возникший первоначально при новом доказательстве теоремы

Александрова о многогранниках, оказался способен решить одну из самых трудных задач устойчивости в геометрии выпуклых поверхностей (Волков, 1960, с. 75–86; Волков, 1968б, с. 44–69).

Решение проблемы Кон-Фоссена стало одним из главных научных достижений Ю. А. Волкова. Этот результат составил существенную часть его докторской диссертации и занял важное место в развитии геометрии «в целом» (Бабич, 2002, с. 26–28; Погорелов, 1968, с. 2–4). Ю. Г. Решетняк позднее назвал теорему Волкова об оценке изменения формы замкнутой поверхности по изменению её внутренней геометрии одним из наиболее значительных результатов об устойчивости в дифференциальной геометрии и особо отметил, что её доказательство потребовало принципиально особой математической техники (Решетняк, 1996, с. 5).

Особое значение для понимания места этих результатов имеет отзыв А. В. Погорелова на цикл работ Ю. А. Волкова, представленный на соискание премии Ленинградского университета. Погорелов прямо писал, что цикл касается двух известных проблем геометрии «в целом» – проблемы Вейля и проблемы Минковского. Он напоминал, что после решения общей проблемы Вейля А. Д. Александровым естественно возникли три задачи: однозначная определённость общих выпуклых поверхностей, регулярность выпуклой поверхности с регулярной метрикой и устойчивость решения проблемы Вейля. Первые две были решены самим Погореловым, а третья, включающая первую, была решена Волковым в работах представленного цикла. В заключении отзыва Погорелов подчёркивал трудность рассматриваемых Волковым проблем, силу и значение полученных результатов и писал, что автор несомненно заслуживает премии ЛГУ. Такая расстановка особенно существенна: результаты Волкова оказываются помещены рядом с ключевыми этапами решения классических проблем, связанными с именами Александрова и самого Погорелова. Эта оценка важна потому, что принадлежит одному из крупнейших специалистов XX века в теории выпуклых поверхностей (Погорелов, 1968, с. 1–4).

Множество разреза и развёртка от источника

Одной из работ Ю. А. Волкова, получивших позднее непосредственное продолжение в вычислительной геометрии, стала совместная работа с Е. Г. Подгорновой 1971 года, посвящённая множеству разреза на многогранных развёртках положительной кривизны. В ней для компактного и некомпактного случаев была исследована структура множества разреза относительно выбранной точки и описаны специальные области, позволяющие построить развёртку от источника (Волков, Подгорнова, 1971, с. 15–25).

Работа Волкова и Подгорновой была написана не на алгоритмическом языке и не ставила задач вычислительной геометрии. Однако в ней уже содержалось подробное исследование объектов, позднее ставших важными для этой области: множества разреза, областей единственности кратчайших и развёртки от источника. Существенно также, что авторы рассматривали не только компактный случай, гомеоморфный сфере, но и некомпактный случай, гомеоморфный плоскости (Волков, Подгорнова, 1971, с. 15–25).

Э. Миллер и И. Пак прямо указали на значение этой работы для современной теории развёрток. Они отметили, что, к сожалению, статья Волкова и Подгорновой осталась незамеченной на Западе, хотя в ней было дано полное описание специальных выпуклых областей, позднее получивших название *reels* (выпуклые секторы), с помощью которых можно строить развёртки от источника. Собственная работа Миллера и Пака развила эту конструкцию в произвольной размерности и придала ей алгоритмическую форму (Miller, Pak, 2008, pp. 373–374).

Аспиранты Ю. А. Волкова

Для Ю. А. Волкова преподавание и работа с учениками были не внешним дополнением к научной деятельности, а одним из важнейших дел жизни. По своему складу он был учителем и наставником, которому было важно не только получить собственный результат, но и передать ученикам способ математического мышления. После защиты докторской диссертации в 1968 году Ю. А. Волков особенно активно занимался

аспирантами. В одном из писем он упоминал, что в 1968 году одновременно у него было шесть аспирантов.

Работа с каждым из них требовала большого времени и участия. Ю. А. Волков подолгу беседовал с аспирантами, подробно объяснял постановку задачи, возможный ход рассуждений и связь темы с уже известными результатами. В. А. Залгаллер вспоминал, что аспиранты Волкова относились к своему руководителю с большой любовью, а он помогал им расширять образование, давал содержательные темы и нередко продолжал научные беседы с ними дома по вечерам (Залгаллер, 2021, с. 190). По семейным воспоминаниям, многие такие встречи проходили в квартире Ю. А. Волкова на проспекте Космонавтов.

Среди аспирантов Ю. А. Волкова были люди с очень разными научными судьбами. Первым из защитившихся под его руководством был Мурадхан Гаджиханович Мехтиев, уроженец села Чиликар Дагестана. Его кандидатская диссертация «Изгибания бесконечных полных выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского» была защищена в 1968 году (Мехтиев, 1968). Эта тема стояла несколько особняком по отношению к основной линии работ Ю. А. Волкова, связанной с вариационными методами в теории выпуклых многогранников и выпуклых тел. Однако и здесь проявилась характерная для Ю. А. Волкова широта геометрических интересов. Мурадхан Мехтиев успешно справился со сложной задачей, а в дальнейшем перешёл к педагогическим проблемам, стал доктором педагогических наук, профессором Дагестанского государственного университета, заслуженным учителем Российской Федерации и Республики Дагестан, заслуженным деятелем науки Республики Дагестан (Албанви, 2020; Мехтиев, 2002).

В то же время у Ю. А. Волкова была ясная научная стратегия. Значительная часть тем, которые он предлагал аспирантам, непосредственно продолжала круг задач, связанных с его собственными работами по вариационному методу в теории выпуклых многогранников и выпуклых тел. Эта линия восходила ещё к его кандидатской диссертации 1955 года «Существование выпуклого многогранника», где был разработан новый метод доказательства существования выпуклого многогранника с данной развёрткой (Волков, 1960, с. 75–86; Погорелов, 1968, с. 1–2).

К этой линии примыкала диссертация Бориса Вениаминовича Декстера «Интегральные оценки для трёхмерных развёрток и римановых пространств», защищённая в 1971 году. Уже само название работы показывает её связь с тем кругом вопросов, в котором развёртки, внутренняя метрика и пространственная реализация рассматривались как части единой геометрической задачи (Декстер, 1971).

Елене Гавриловне Подгорновой Ю. А. Волков предложил доказать вариационным методом теорему С. П. Оловянишникова о существовании бесконечного выпуклого многогранника с данной развёрткой. Подгорнова справилась с этой трудной задачей. Её диссертация «Существование бесконечного выпуклого многогранника с данной развёрткой: метод трёхмерных развёрток» была защищена в 1971 году. Работа стала важным свидетельством гибкости вариационного метода: оказалось, что он применим не только в классических компактных задачах, но и в некомпактном случае (Подгорнова, 1971; Волков, Подгорнова, 1972, с. 3–54).

Другому сильному аспиранту, Александру Ефимовичу Кагану, Ю. А. Волков предложил задачу, завершавшую важную линию исследований, связанную с оценками деформации выпуклой поверхности при изменении заданной кривизны. Эта задача была в известном смысле аналогична проблеме Кон-Фоссена для выпуклых поверхностей, заданных внутренней метрикой. В работе «Оценка деформации замкнутой выпуклой поверхности при изменении её кривизны» Каган рассматривал построение замкнутой выпуклой поверхности по её кривизне, перенесённой на сферу центральным проектированием. Теоремы существования и единственности для этой задачи были доказаны А. Д. Александровым и обобщены А. В. Погореловым; работа Кагана была посвящена следующему этапу — получению количественных оценок изменения решения при изменении исходных данных.

Существенную роль в доказательстве играла принадлежавшая Ю. А. Волкову идея применения принципа Томсона к оценке деформации замкнутой выпуклой поверхности. Каган прямо указывал, что эта идея была предложена Волковым, и подробно использовал предложенную им модель течения несжимаемой жидкости по сферическому изображению многогранника. Работа была опубликована в 1974 году и стала основой кандидатской диссертации, защищённой 7 апреля 1975 года (Каган, 1974, с. 83–110; Залгаллер, б. г.).

Среди аспирантов Ю. А. Волкова были и иностранные ученики. Абдель-Хади Махмуд Эль-Этриби из Египта защитил в 1975 году диссертацию «Многогранники с данными кривизнами в кусочно-евклидовом пространстве». Эта работа продолжала вариационную линию Ю. А. Волкова, но переносила её в более общую геометрическую ситуацию: речь шла уже не только о многогранниках в обычном трёхмерном евклидовом пространстве, но и о многогранниках в кусочно-евклидовом пространстве (Эль-Этриби, 1975).

К близкому кругу задач относилась работа другого аспиранта из Египта – Эль-Саддика эль-Дина Аттии Абу Бакра. Его диссертация «Бесконечные многогранники в кусочно-евклидовом пространстве» была защищена в 1976 году. Вместе с работой Эль-Этриби она показывает, что Ю. А. Волков стремился развивать свои методы не как частный приём для решения одной задачи, а как более широкий геометрический подход, применимый в разных пространствах и к различным классам многогранников (Абу Бакр, 1976).

Ещё одним иностранным аспирантом Ю. А. Волкова был Ибрайма Фофан. В 1978 году он защитил диссертацию «Проблема Минковского в пространстве Лобачевского». Эта тема продолжала одну из главных линий научной работы Волкова – исследование классических задач теории выпуклых тел и их перенесение из евклидовой геометрии в пространства постоянной кривизны (Фофан, 1978).

К исследованиям выпуклых многогранников в пространстве Лобачевского относилась и диссертация Валентины Евгеньевны Алексеевой «Бесконечно малые изгибания бесконечных выпуклых многогранников пространства Лобачевского», защищённая в 1981 году. Эта работа продолжала круг задач о жёсткости и изгибаниях бесконечных выпуклых поверхностей, к которому принадлежала и ранняя работа М. Г. Мехтиева (Алексеева, 1981).

В 1983 году Хадис Мугазович Кишуков защитил диссертацию «Существование поверхности с данной внешней кривизной в римановом пространстве». Его исследование также развивало характерную для школы Волкова проблематику построения геометрического объекта по заданным внутренним или внешним данным, но уже в условиях общего риманова пространства (Кишуков, 1983).

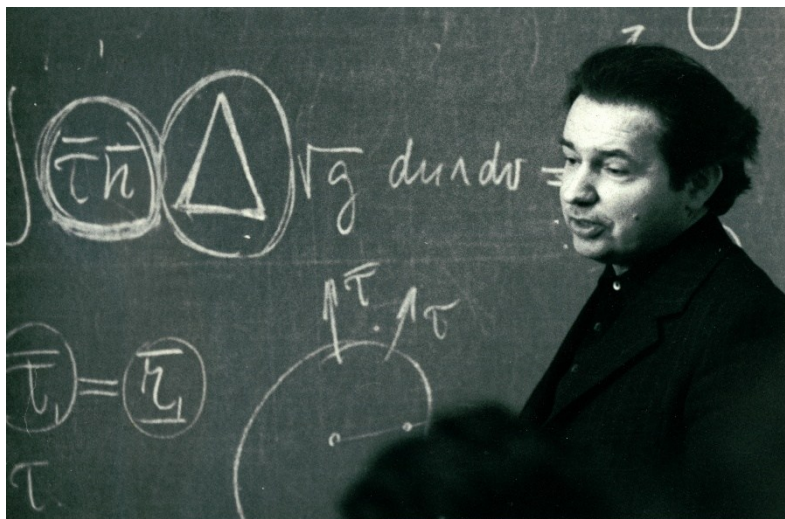
Особое место занимала работа Г. Лившица, одного из аспирантов Ю. А. Волкова. Их совместная статья была посвящена геометрическим вопросам теории зубчатых передач. Это направление соединяло фундаментальную геометрию с прикладной задачей и показывало широту интересов Волкова (Волков, Лившиц, 1971а, с. 67–76; Волков, Лившиц, 1971б, с. 101–105). По воспоминаниям В. А. Залгаллера, в 1976 году Г. Лившиц погиб в автомобильной катастрофе. После его гибели эта перспективная линия не получила дальнейшего продолжения в работах учеников Волкова (Залгаллер, 2021, с. 190).

Характерно, что в последние годы жизни Ю. А. Волков публиковался не так много. Однако это не означало ослабления научной работы. Значительная часть его замыслов, идей и задач реализовывалась через аспирантов. Он не жалел времени на объяснения, помогал каждому войти в новую область и добивался того, чтобы трудная задача была доведена до конца. Темы действительно были непростыми: литературы по ним было немного, многие вопросы ставились впервые, и потому роль научного руководителя была особенно велика.

Работа Ю. А. Волкова с аспирантами показывает важную черту его научной личности. Он не стремился только к личной публикационной активности; для него было существенно передать направление, метод и стиль мышления. В этом смысле диссертации его учеников были не случайным набором отдельных работ, а продолжением его собственной научной программы.

Преподавание и кафедра геометрии ЛГУ

В довоенные и первые послевоенные годы кафедру геометрии математикомеханического факультета Ленинградского университета возглавлял Андрей Андреевич Марков-младший. После его переезда в Москву в 1953 году заведующим кафедрой стал А. Д. Александров. Совмещая руководство кафедрой с обязанностями ректора Ленинградского университета, которые он исполнял в 1952–1964 годах, Александров впоследствии передал непосредственное заведование кафедрой своему ученику Ю. Ф. Борисову.



Ю. А. Волков читает лекцию по римановой геометрии. 1970-е годы

В эти годы вокруг Александрова сложилась сильная геометрическая школа. На кафедре работали А. Д. Александров, Ю. Ф. Борисов, А. Л. Вернер, Ю. А. Волков и Е. П. Сенькин. В 1960 году при активной поддержке А. Д. Александрова в Ленинград был приглашён выдающийся московский тополог Владимир Абрамович Рохлин, который до этого работал в Коломенском педагогическом институте. Его приезд сыграл огромную роль в развитии ленинградской топологии и существенно повлиял на научную жизнь факультета (Вершик, 2010, с. 517–520).

В 1964 году Александров покинул пост ректора и переехал в Новосибирск. Вместе с ним Ленинград покинул и Ю. Ф. Борисов. Не удалось избрать на кафедру и одного из энергичных учеников Александрова И. Я. Бакельмана, который принял приглашение организовать кафедру геометрии в педагогическом институте. На эту новую кафедру перешёл А. Л. Вернер. Е. П. Сенькин уехал в Харьков к академику А. В. Погорелову. Таким образом, к 1964 году кафедра фактически оказалась на грани исчезновения: из геометров на ней остались только Ю. А. Волков и С. М. Владимирова (Вернер, 2004, с. 10–13).

В этих условиях Юрий Александрович в 1964 году был назначен исполняющим обязанности заведующего кафедрой. После защиты докторской диссертации в 1968 году он был утверждён в должности заведующего. Юрий Александрович никогда не стремился к административной работе и не считал её своим призванием. Однако именно ему пришлось взять на себя ответственность за сохранение и дальнейшее развитие кафедры (Вернер, 2018, с. 1–2).

Одной из первых задач стала проблема преподавательских кадров. В 1964 году на кафедру удалось пригласить известного математика и блестящего лектора Виктора Абрамовича Залгаллера. Так на многие годы сформировался небольшой, но исключительно сильный коллектив преподавателей, в который входили Ю. А. Волков, В. А. Залгаллер и В. А. Рохлин (Залгаллер, 2021, с. 131).

После отъезда Александрова кафедра лишилась прежней поддержки со стороны руководства университета. Отношения с деканатом не всегда складывались просто. Особую роль в этих отношениях играл заместитель декана В. А. Волков, которого в воспоминаниях по иронии судьбы нередко путают с Юрием Александровичем Волковым. О сложных отношениях Рохлина и его учеников с факультетской администрацией подробно писал А. М. Вершик (Вершик, 2010, с. 525–529).

Несмотря на все трудности, кафедра продолжала работу по модернизации математического образования. До этого курс геометрии состоял из нескольких относительно самостоятельных дисциплин: аналитической геометрии, дифференциальной геометрии и оснований геометрии. Топология до этого не входила в обязательную подготовку студентов. Юрий Александрович Волков и Владимир Абрамович Рохлин при поддержке члена-корреспондента Д. К. Фаддеева разработали новый учебный план, объединивший геометрию и топологию в единую последовательную систему. В 1965 году Рохлин начал читать обязательный курс топологии, вошедший в геометрический цикл; введение этого курса Вершик характеризует как важное нововведение в математическом образовании на матмехе (Вершик, 2010, с. 526–527).

Курс строился следующим образом: первый семестр был посвящён аналитической геометрии, второй – дифференциальной геометрии, третий – топологии, четвёртый – римановой геометрии. До середины 1970-х годов практические занятия проводились только в первых двух семестрах, позднее они были введены и по топологии. Практических занятий по римановой геометрии не было.

Новый курс оказался весьма требовательным. Особенно сложными для студентов были третий и четвёртый семестры. Многие получали неудовлетворительные оценки, что вызывало недовольство деканата. Однако Волков и Рохлин считали невозможным снижать требования ради формального благополучия. Со временем этот курс стал визитной карточкой кафедры геометрии Ленинградского университета. Для многих поколений студентов именно через него происходило первое серьёзное знакомство с современной геометрией и топологией (Вершик, 2010, с. 526–527).

В 1960-е годы факультет переживал период бурного научного роста. Появлялись новые направления исследований, активно работали научные семинары. Особой популярностью пользовались лекции Владимира Абрамовича Рохлина. Вокруг него постепенно сформировалась сильная топологическая школа. Среди воспитанников его топологического семинара были Михаил Громов, Яков Элиашберг, Олег Виро, Владимир Харламов и многие другие будущие известные математики (Вершик, 2010, с. 524–526).

Юрий Александрович в эти годы читал как основные курсы, так и специальные курсы по геометрии. Наиболее известным из них был курс по общей теории относительности. Хотя сам Волков не занимался исследованиями в этой области, его широчайшая математическая эрудиция позволяла читать этот курс на высоком уровне. В те годы это был единственный курс по общей теории относительности в Ленинграде. Его посещали не только студенты-математики, но и студенты-астрономы, специализировавшиеся по астрофизике и небесной механике.

Факультет быстро расширялся, однако кафедра геометрии оставалась очень небольшой. Вопрос о новых преподавателях стоял чрезвычайно остро. Только в 1970 году удалось принять на кафедру выпускника матмеха С. Е. Козлова, а в 1973 году – О. Я. Виро и О. А. Иванова. Это были талантливые молодые математики. Их научные интересы и судьбы сложились по-разному, но все они оставили заметный след в жизни факультета как преподаватели и учёные.

В 1973 году Владимир Абрамович Рохлин в последний раз прочитал общий курс топологии. Из-за ухудшения здоровья он уже не мог вести столь большую учебную нагрузку. В дальнейшем курс топологии читали О. Я. Виро и В. А. Залгаллер.

В 1979 году математико-механический факультет переехал в Петергоф. Для Рохлина регулярные поездки стали практически невозможны по состоянию здоровья. Руководство факультета предложило ему уйти на пенсию несмотря на то, что научные семинары предполагалось перенести в здание Ленинградского отделения Математического института имени В. А. Стеклова на Фонтанке. В защиту Рохлина выступили многие коллеги, в том числе и Юрий Александрович Волков и Виктор Абрамович Залгаллер. Они обращались в деканат, писали соответствующие бумаги и добивались того, чтобы Рохлин сохранил связь с

факультетом. В результате его работа в университете была продлена ещё на 1980/81 учебный год; затем топологический семинар продолжил работу в ЛОМИ (Вершик, 2010, с. 528–530).

Воспоминания профессора А. Л. Вернера дополняют этот образ важными человеческими и педагогическими чертами. Вернер писал, что педагогическую работу Юрия Александровича можно назвать просветительской: он всегда был готов обсуждать со студентом, аспирантом или профессором занимающую того проблему и помогать в неё вникнуть (Вернер, 2018, с. 2–3).

Педагогическая деятельность Ю. А. Волкова не ограничивалась Ленинградским университетом. В 1962 году он участвовал в шефской помощи Владивостокскому университету, содействуя постановке преподавания геометрических дисциплин. Другая продолжительная поездка состоялась в 1973 году, когда Ю. А. Волков на один семестр был направлен в недавно созданный Сыктывкарский университет, над которым шефствовал ЛГУ. Вместе с ним туда приехал выпускник кафедры геометрии ЛГУ Я. М. Элиашберг — ученик М. Л. Громова и воспитанник топологического семинара В. А. Рохлина. В последующие годы в Сыктывкаре работали другие молодые выпускники кафедры геометрии ЛГУ — А. В. Жубр, Н. М. Мишачев, В. И. Звонилов и В. М. Харламов. Благодаря этому в новом университете сформировался заметный центр геометрии и топологии, непосредственно продолжавший традиции ленинградской математической школы (Вернер, 2004, с. 62–63; Вершик, 2010, с. 524–526).

При этом к диссертациям Юрий Александрович подходил строго. Вернер вспоминал случай, когда Волков как оппонент нашёл перед защитой пробел в рассуждениях, и защиту пришлось отложить. В этих воспоминаниях соединяются две стороны его личности: готовность помогать и высокая требовательность к математической точности (Вернер, 2018, с. 3).

Юрий Александрович был мягким и деликатным человеком. Однако в принципиальных вопросах он проявлял твёрдость и чувство ответственности. Благодаря его усилиям кафедра геометрии сумела сохранить преемственность геометрической школы Александра и топологической школы Рохлина и оставалась одним из наиболее сильных научно-педагогических коллективов факультета.

Заключение

Ю. А. Волков прожил недолгую жизнь, но его научная и педагогическая деятельность оставила заметный след в истории отечественной геометрии. Он принадлежал к поколению учеников А. Д. Александрова, для которых геометрия была не только областью специальных исследований, но и способом глубокого понимания формы, метрики и пространства. В этой традиции Ю. А. Волков нашёл собственную линию, связанную с вариационными методами, задачами существования и устойчивости выпуклых поверхностей и многогранников.

Главные результаты Ю. А. Волкова относятся к труднейшим вопросам геометрии «в целом». Его работы по проблемам Минковского и Вейля, решение проблемы Кон-Фоссена об устойчивости, исследование множества разреза в совместной работе с Е. Г. Подгорновой показывают редкое соединение геометрической интуиции, технической силы и стремления к



Ю. А. Волков за праздничным столом в день своего 50-летия. 1980 год

количественным оценкам (Погорелов, 1968, с. 1–4; Решетняк, 1996, с. 5; Волков, Подгорнова, 1971; Miller, Pak, 2008, pp. 373–374).

Он не только продолжал направление, созданное А. Д. Александровым, но и развивал его, вводя новые методы и открывая новые возможности для исследования выпуклых поверхностей.

Не менее важной была его работа с учениками. Ю. А. Волков не жалел времени на аспирантов, подробно обсуждал с ними задачи, помогал входить в трудные области, добивался ясности постановки и завершённости результата (Вернер, 2018, с. 2–3). Многие его научные замыслы получили продолжение именно через диссертации учеников. Поэтому его педагогическая деятельность неотделима от его научной биографии.

Особое место в жизни Ю. А. Волкова занимала кафедра геометрии математико-механического факультета ЛГУ. В непростые годы он сохранял её как самостоятельный научный и учебный центр, поддерживал высокий уровень преподавания, участвовал в создании нового курса геометрии и топологии (Вернер, 2018, с. 2; Вершик, 2010, с. 524–527). Его спокойная основательность, принципиальность и требовательность к математическому содержанию определяли атмосферу кафедры не меньше, чем формальные административные решения.

Ранняя смерть Ю. А. Волкова оборвала многие планы. По воспоминаниям близких, даже в последние месяцы жизни он говорил о задачах, которые считал важными для дальнейшего развития геометрии выпуклых тел. Это особенно ясно показывает, что его научная линия не была исчерпана. Она была прервана.

Сегодня обращение к наследию Ю. А. Волкова важно не только как дань памяти замечательному математику. Его работы помогают лучше понять внутреннюю историю ленинградской геометрической школы, связь между идеями А. Д. Александрова, задачами устойчивости, вариационными методами и современными представлениями о многогранных поверхностях. Имя Ю. А. Волкова по праву занимает достойное место среди имён тех учёных, которые определяли лицо отечественной геометрии второй половины XX века.

Список литературы

- Абу Бакр Эль-Саддик эль-Дин Аттия. Бесконечные многогранники в кусочно-евклидовом пространстве: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.04. Л., 1976. 64 с.
- Академик Александр Данилович Александров: воспоминания, публикации, материалы / сост. Г. М. Идлис; отв. ред. Г. М. Идлис, О. А. Ладыженская. М.: Наука, 2002. 399 с.
- Александров А.Д. Выпуклые многогранники. М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
- Александров А.Д. Избранные труды. Т. 1: Геометрия и приложения. Новосибирск: Наука, 2006.
- Александров А.Д. Избранные труды. Т. 2: Выпуклые многогранники. Новосибирск: Наука, 2007.
- Александров А.Д., Погорелов А.В. Теория поверхностей и дифференциальные уравнения в частных производных // Александров А. Д. Избранные труды. Т. 1: Геометрия и приложения. Новосибирск: Наука, 2006. С. 627–647.
- Алексеева В.Е. Бесконечно малые изгибания бесконечных выпуклых многогранников пространства Лобачевского: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.04. Л., 1981. 70 с.
- Албанви А. Мурадхан Мехтиев — заслуженный учитель РФ // Дзен. 2020. 25 сентября.
- Бабич В.М. Вспоминая Ю. А. Волкова // Наш курс. Санкт-Петербургский государственный университет. Математико-механический факультет. 1947–1952 / сост. Б. Е. Шнееров. СПб, 2002. С. 26–28.
- Борисов Ю.Ф., Залгаллер В.А., Кутателадзе С.С., Ладыженская О.А., Погорелов А.В., Решетняк Ю.Г. Первый геометр России XX века // Александров А. Д. Избранные труды. Т. 1: Геометрия и приложения. Новосибирск: Наука, 2006. С. V–XXIII.
- Вейль Г. Об определении замкнутой выпуклой поверхности её линейным элементом / пер. с нем. В. А. Рохлина // Успехи математических наук. 1948. Т. 3. Вып. 2 (24). С. 159–190.

- Вернер А.Л. Есть, что вспомнить. Не стыдно рассказать. Моя история кафедры геометрии. СПб: СММО Пресс, 2004.
- Вершик А.М. В. А. Рохлин в Ленинграде (1960–1984) // Рохлин В. А. Избранные работы. Воспоминания о В. А. Рохлине. Материалы к биографии / под ред. А. М. Вершика. 2-е изд., доп. М.: МЦНМО, 2010. С. 517–532.
- Волков Ю.А. Существование выпуклого многогранника с данной развёрткой // Вестник ЛГУ. 1960. № 19. Серия математики, механики и астрономии. Вып. 4. С. 75–86.
- Волков Ю.А. Устойчивость решения проблемы Минковского // Вестник ЛГУ. 1963. № 1. Серия математики, механики и астрономии. Вып. 1. С. 33–43.
- Волков Ю.А. Оценка деформации выпуклой поверхности в зависимости от изменения её внутренней метрики // Доклады Академии наук СССР. 1968а. Т. 178. № 6. С. 1238–1240.
- Волков Ю.А. Оценка деформации выпуклой поверхности в зависимости от изменения внутренней метрики // Украинский геометрический сборник. 1968б. № 5–6. С. 44–69.
- Волков Ю.А. Существование многогранника с данной развёрткой // Записки научных семинаров ПОМИ. 2018. Т. 476. С. 50–78.
- Волков Ю.А., Лившиц Г.А. Некоторые геометрические задачи теории зубчатых передач. I // Вестник Ленинградского университета. 1971а. № 7. С. 67–76.
- Волков Ю.А., Лившиц Г.А. Некоторые геометрические задачи теории зубчатых передач. II // Вестник Ленинградского университета. 1971б. № 13. С. 101–105.
- Волков Ю. А., Подгорнова Е. Г. Множество разреза развёртки положительной кривизны // Украинский геометрический сборник. 1971. № 11. С. 15–25.
- Волков Ю. А., Подгорнова Е. Г. Существование многогранника с данной развёрткой // Учёные записки Ташкентского государственного педагогического института им. Низами. 1972. Т. 85. С. 3–54.
- Декстер Б.В. Интегральные оценки для трёхмерных развёрток и римановых пространств: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л., 1971. 140 с.
- Дискант В.И. Устойчивость решения уравнения Минковского // Сибирский математический журнал. 1973. Т. 14. № 3. С. 669–673.
- Залгаллер В.А. Воспоминания об А. Д. Александрове и его ленинградском геометрическом семинаре (1945–1963 гг.) // Академик Александр Данилович Александров: воспоминания, публикации, материалы / сост. Г. М. Идлис. М.: Наука, 2002. С. 15–32.
- Залгаллер В.А. О коллегах // Виктор Залгаллер. Война и мир ленинградского математика: сборник статей / сост. Н. В. Глинка, А. А. Лодкин; отв. ред. А. А. Лодкин. СПб.: Аврора, 2021. С. 113–210.
- Залгаллер В.А. Александр Ефимович Каган (1945–2002) // Санкт-Петербургское математическое общество. Б. г.
- Каган А.Е. Оценка деформации замкнутой выпуклой поверхности при изменении её кривизны // Записки научных семинаров ЛОМИ. 1974. Т. 45. С. 83–110.
- Кишуков Х.М. Существование поверхности с данной внешней кривизной в римановом пространстве: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.04. Л., 1983. 81 с.
- Мехтиев М.Г. Изгибания бесконечных полных выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л., 1968.
- Мехтиев М.Г. Методика обучения геометрии в 10–11 классах общеобразовательной школы с использованием компьютера: дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.02. М., 2002. 282 с.
- Наш курс. Санкт-Петербургский государственный университет. Математико-механический факультет. 1947–1952 / сост. Б. Е. Шнееров. СПб, 2002. 31 с.
- Подгорнова Е.Г. Существование бесконечного выпуклого многогранника с данной развёрткой: метод трёхмерных развёрток: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л., 1971. 105 с.

- Решетняк Ю.Г. Воспоминания о нашем Учителе: Александр Данилович Александров и его геометрическая школа // Академик Александр Данилович Александров: воспоминания, публикации, материалы / сост. Г. М. Идлис. М.: Наука, 2002. С. 35–66.
- Решетняк Ю.Г. Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. 2-е изд., перераб. и доп. Новосибирск: Издательство Института математики СО РАН, 1996.
- Фофан И. Проблема Минковского в пространстве Лобачевского: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.04. Л., 1978. 52 с.
- Эль-Этриби Абдель-Хади Махмуд. Многогранники с данными кривизнами в кусочно-евклидовом пространстве: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л., 1975. 63 с.
- Miller E., Pak I. Metric Combinatorics of Convex Polyhedra: Cut Loci and Nonoverlapping Unfoldings // Discrete & Computational Geometry. 2008. Vol. 39. No. 1–3. P. 338–386. DOI: 10.1007/s00454-007-9028-3.

Архивные источники

- Вернер А.Л. Юрий Александрович Волков (1930–1981): воспоминания. 2018. Машинопись. Личный архив Д. Ю. Волкова.
- Погорелов А.В. Отзыв о цикле работ Ю. А. Волкова, представленных на соискание премии Ленинградского университета. 1968. Машинопись. Личный архив Д. Ю. Волкова.

Информация об авторах

Волков Дмитрий Юрьевич; кандидат физико-математических наук; доцент; доцент кафедры высшей математики и механики; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения (Российская Федерация, 190000, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67 А); E-mail: dmitrivolkov@mail.ru; ORCID: 0000-0001-5052-1662;

Галунова Ксения Валерьевна; кандидат физико-математических наук; доцент; доцент кафедры высшей математики; Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого (Российская Федерация, 195251, г. Санкт-Петербург, вн. тер. г. муниципальный округ Академическое, ул. Политехническая, д. 29 Б); E-mail: galounova@gmail.com; ORCID: 0009-0007-6686-429X

YURI ALEXANDROVICH VOLKOV: GEOMETER, TEACHER, HEAD OF THE DEPARTMENT OF GEOMETRY AT LENINGRAD UNIVERSITY (ON THE 95TH ANNIVERSARY OF HIS BIRTH)

Volkov D. Yu.	Saint Petersburg State University of
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.	Aerospace Instrumentation
Galunova K. V.	Peter the Great St. Petersburg Polytechnic
Cand. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.	University

Abstract. The paper is devoted to Yuri Alexandrovich Volkov (1930–1981), a representative of the Leningrad school of geometry, a student of A.D. Alexandrov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, and long-time Head of the Department of Geometry at the Faculty of Mathematics and Mechanics of Leningrad State University. Volkov made important contributions to geometry in the large, especially to the theory of convex surfaces and convex polyhedra. His work was highly appreciated by his contemporaries, but it has not yet received sufficient attention in historical studies of mathematics. The paper discusses the main stages of Volkov's life, research, and teaching career. It is based on published works, archival materials, and personal recollections. Special attention is given to Volkov's results on

convex surfaces and polyhedra: his variational proof of the existence of a convex polyhedron with a prescribed development, his work related to the Weyl problem and the Minkowski problem, and his stability estimates for classical problems in the theory of convex bodies. These results are considered in the context of the work of A.D. Alexandrov, A.V. Pogorelov, and the Leningrad school of geometry. The paper also describes Volkov's role as Head of the Department of Geometry, as a lecturer, and as a supervisor of graduate students. It is shown that his legacy is not merely a collection of separate theorems. Rather, it forms a coherent line of research connected with variational methods in the geometry of convex bodies. The aim of the paper is to clarify Volkov's place in the history of Russian geometry and to preserve the memory of him as a mathematician, teacher, and organizer of university science.

Keywords: Yu. A. Volkov, A. D. Alexandrov, Leningrad school of geometry, geometry in the large, convex surfaces, convex polyhedra, Weyl problem, Minkowski problem, variational method, stability

For citation: Volkov D. Yu., Galunova K. V. (2026). Yuri Alexandrovich Volkov: Geometer, Teacher, Head of the Department of Geometry at Leningrad University (on the 95th Anniversary of His Birth). *Continuum. Maths. Computer Science. Education*, 3 (43), 160–177. doi.org/10.24888/2500-1957-2026-3-160-177

Copyright: © D. Yu. Volkov, K. V. Galunova (2026). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

References

- Abu Bakr, El-Saddik el-Din Attiya. (1976). *Beskonechnye mnogogranniki v kusochno-evklidovom prostranstve*. [Cand. Sci. (Phys.-Math.) dissertation]. Leningrad. (In Russ.)
- Aleksandrov, A. D. (1950). *Vypuklye mnogogranniki*. Moscow; Leningrad: Gostekhnizdat. (In Russ.)
- Aleksandrov, A. D. (2006). *Izbrannye trudy. T. 1: Geometriya i prilozheniya*. Novosibirsk: Nauka. (In Russ.)
- Aleksandrov, A. D. (2007). *Izbrannye trudy. T. 2: Vypuklye mnogogranniki*. Novosibirsk: Nauka. (In Russ.)
- Aleksandrov, A. D., & Pogorelov, A. V. (2006). *Teoriya poverkhnostei i differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh*. *Izbrannye trudy. T. 1: Geometriya i prilozheniya* (pp. 627–647). Novosibirsk: Nauka. (In Russ.)
- Alekseeva, V. E. (1981). *Beskonechno malye izgibaniya beskonечnykh vypuklykh mnogogrannikov prostranstva Lobachevskogo*. [Cand. Sci. (Phys.-Math.) dissertation]. Leningrad. (In Russ.)
- Albanvi, A. (2020, September 25). *Muradkhan Mekhtiev – zasluzhennyy uchitel' RF*. Dzen. (In Russ.)
- Babich, V. M. (2002). *Vspominaya Yu. A. Volkova*. In B. E. Shneerov (Ed.), *Nash kurs. Sankt-Peterburgskii gosudarstvennyi universitet. Matematiko-mekhanicheskii fakul'tet. 1947–1952* (pp. 26–28). Saint Petersburg. (In Russ.)
- Borisov, Yu. F., Zalgaller, V. A., Kutateladze, S. S., Ladyzhenskaya, O. A., Pogorelov, A. V., & Reshetnyak, Yu. G. (2006). *Pervyi geometr Rossii XX veka*. In A. D. Aleksandrov, *Izbrannye trudy. T. 1: Geometriya i prilozheniya*. Novosibirsk: Nauka. (In Russ.)
- Dexter, B. V. (1971). *Integral'nye otsenki dlya trekhmernykh razvertok i rimanovykh prostranstv*. [Cand. Sci. (Phys.-Math.) dissertation]. Leningrad. (In Russ.)
- Diskant, V. I. (1973). *Ustoichivost' resheniya uravneniya Minkovskogo*. *Sibirskii matematicheskii zhurnal*, 14(3), 669–673. (In Russ.)

- El-Etribi, Abdel-Hadi Mahmoud. (1975). *Mnogogranniki s dannymi kriviznami v kusochno-evklidovom prostranstve* [Cand. Sci. (Phys.-Math.) dissertation]. Leningrad. (In Russ.)
- Fofan, I. (1978). *Problema Minkovskogo v prostranstve Lobachevskogo* [Cand. Sci. (Phys.-Math.) dissertation]. Leningrad. (In Russ.)
- Idlis, G. M. (Ed.). (2002). *Akademik Aleksandr Danilovich Aleksandrov: vospominaniya, publikatsii, materialy*. Moscow: Nauka. (In Russ.)
- Kagan, A. E. (1974). Otsenka deformatsii zamknutoi vypukloi poverkhnosti pri izmenenii ee krivizny. *Zapiski nauchnykh seminarov LOMI*, 45, 83–110. (In Russ.)
- Kishukov, Kh. M. (1983). *Sushchestvovanie poverkhnosti s dannoi vneshnei kriviznoi v rimanovom prostranstve* [Cand. Sci. (Phys.-Math.) dissertation]. Leningrad. (In Russ.)
- Mekhtiev, M. G. (1968). *Izgibaniya beskonechnykh polnykh vypuklykh poverkhnostei v prostranstve Lobachevskogo* [Cand. Sci. (Phys.-Math.) dissertation]. Leningrad. (In Russ.)
- Mekhtiev, M. G. (2002). *Metodika obucheniya geometrii v 10–11 klassakh obshcheobrazovatel'noi shkoly s ispol'zovaniem komp'yutera* [Dr. Sci. (Education) dissertation]. Moscow. (In Russ.)
- Miller, E., & Pak, I. (2008). Metric combinatorics of convex polyhedra: Cut loci and nonoverlapping unfoldings. *Discrete & Computational Geometry*, 39(1–3), 338–386. <https://doi.org/10.1007/s00454-007-9028-3>
- Nash kurs. Sankt-Peterburgskii gosudarstvennyi universitet. Matematiko-mekhanicheskii fakul'tet. 1947–1952* (2002). Comp. B. E. Shneerov. Saint Petersburg. (In Russ.)
- Podgornova, E. G. (1971). *Sushchestvovanie beskonechnogo vypuklogo mnogogrannika s dannoi razvertkoi: metod trekhmernykh razvertok* [Cand. Sci. (Phys.-Math.) dissertation]. Leningrad. (In Russ.)
- Reshetnyak, Yu. G. (1996). *Teoremy ustoichivosti v geometrii i analize* [Stability theorems in geometry and analysis]. 2nd ed., rev. and enl. *Novosibirsk: Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences*. (In Russ.)
- Reshetnyak, Yu. G. (2002). *Vospominaniya o nashem Uchitele: Aleksandr Danilovich Aleksandrov i ego geometricheskaya shkola*. In G. M. Idlis (Ed.), *Akademik Aleksandr Danilovich Aleksandrov: vospominaniya, publikatsii, materialy* (pp. 35–66). Moscow: Nauka. (In Russ.)
- Vershik, A. M. (2010). *V. A. Rokhlin v Leningrade (1960–1984)*. In A. M. Vershik (Ed.), *Rokhlin V. A. Izbrannye raboty. Vospominaniya o V. A. Rokhline. Materialy k biografii* (2nd enlarged ed., pp. 517–532). Moscow: MCCME. (In Russ.)
- Volkov, Yu. A. (1960). Sushchestvovanie vypuklogo mnogogrannika s dannoi razvertkoi. *Vestnik LGU. Seriya matematiki, mekhaniki i astronomii*, 19(4), 75–86. (In Russ.)
- Volkov, Yu. A. (1963). Ustoichivost' resheniya problemy Minkovskogo. *Vestnik LGU. Seriya matematiki, mekhaniki i astronomii*, 1(1), 33–43. (In Russ.)
- Volkov, Yu. A. (1968a). Otsenka deformatsii vypukloi poverkhnosti v zavisimosti ot izmeneniya ee vnutrennei metriki. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 178(6), 1238–1240. (In Russ.)
- Volkov, Yu. A. (1968b). Otsenka deformatsii vypukloi poverkhnosti v zavisimosti ot izmeneniya vnutrennei metriki. *Ukrainskii geometricheskii sbornik*, 5–6, 44–69. (In Russ.)
- Volkov, Yu. A. (2018). Sushchestvovanie mnogogrannika s dannoi razvertkoi. *Zapiski nauchnykh seminarov POMI*, 476, 50–78. (In Russ.)
- Volkov, Yu. A., & Livshits, G. A. (1971a). Nekotorye geometricheskie zadachi teorii zubchatykh peredach. I. *Vestnik Leningradskogo universiteta*, 7, 67–76. (In Russ.)
- Volkov, Yu. A., & Livshits, G. A. (1971b). Nekotorye geometricheskie zadachi teorii zubchatykh peredach. II. *Vestnik Leningradskogo universiteta*, 13, 101–105. (In Russ.)
- Volkov, Yu. A., & Podgornova, E. G. (1971). Mnozhestvo razreza razvertki polozhitel'noi krivizny. *Ukrainskii geometricheskii sbornik*, 11, 15–25. (In Russ.)
- Volkov, Yu. A., & Podgornova, E. G. (1972). Sushchestvovanie mnogogrannika s dannoi razvertkoi. *Uchenye zapiski Tashkentskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo instituta im. Nizami*, 85, 3–54. (In Russ.)
- Weyl, H. (1948). Ob opredelenii zamknutoi vypukloi poverkhnosti ee lineinym elementom (V. A. Rokhlin, Trans.). *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 3, 2(24), 159–190. (In Russ.)

- Werner, A. L. (2004). *Est', chto vspomnit'. Ne stydno rasskazat'. Moya istoriya kafedry geometrii*. Saint Petersburg: SMIO Press. (In Russ.)
- Zalgaller, V. A. (2002). *Vospominaniya ob A. D. Aleksandrove i ego leningradskom geometricheskom seminare (1945–1963 gg.)*. In G. M. Idlis (Ed.), *Akademik Aleksandr Danilovich Aleksandrov: vospominaniya, publikatsii, materialy* (pp. 15–32). Moscow: Nauka. (In Russ.)
- Zalgaller, V. A. (2021). *O kollegakh*. In N. V. Glinka & A. A. Lodkin (Eds.), *Viktor Zalgaller. Voina i mir leningradskogo matematika: sbornik statei* (pp. 113–210). Saint Petersburg: Avra. (In Russ.)
- Zalgaller, V. A. (n.d.). Aleksandr Efimovich Kagan (1945–2002). *Saint Petersburg Mathematical Society*. (In Russ.)
- Archival sources**
- Pogorelov, A. V. (1968). *Otzyv o tsikle rabot Yu. A. Volkova, predstavlenykh na soiskanie premii Leningradskogo universiteta*. Typescript. Personal archive of D. Yu. Volkov. (In Russ.)
- Werner, A. L. (2018). *Yurii Aleksandrovich Volkov (1930–1981): vospominaniya*. Typescript. Personal archive of D. Yu. Volkov. (In Russ.)

Information about the authors

Dmitrii Yu. Volkov; Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Associate Professor; Associate Professor, Department of Higher Mathematics and Mechanics; Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation (Russian Federation, 190000, Saint Petersburg, Bolshaya Morskaya St., 67A); E-mail: dmitrivolkov@mail.ru; ORCID: 0000-0001-5052-1662;

Ksenia V. Galunova; Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Associate Professor; Associate Professor of the Department of Higher Mathematics; Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (Russian Federation, 195251, St. Petersburg, internal territorial unit of the city, Akademicheskoe municipal district, Politekhnikeskaya Street, 29B); E-mail: galounova@gmail.com; ORCID: 0009-0007-6686-429X

Статья поступила в редакцию	11.06.2026
Принята к публикации	10.08.2026
Статья опубликована	18.09.2026

Научный журнал
CONTINUUM
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА.
ОБРАЗОВАНИЕ

Выпуск № 3(43) / 2026

Корректор – С.Е. Гридчина
Редактор – Н.П. Безногих
Компьютерная верстка – Р.А. Мельников
Техническое исполнение – В.М. Гришин

Подписано в печать 17.09.2026
Дата выхода в свет 18.09.2026

Бумага формат А-4 (89,0 п.л.).
Гарнитура Times. Печать трафаретная
Тираж 1000 экз. Заказ №57
Свободная цена

Адрес редакции:
399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28
E-mail: secretary@continuum-journal.ru
Сайт редколлегии: <https://continuum-journal.ru>

Подписной индекс журнала **№64987** в каталоге
«Пресса России»

Отпечатано с готового оригинал-макета
на участке оперативной полиграфии
Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина
399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28, 1

ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, Липецкая область, г. Елец, Коммунаров, 28, 1