

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ И.А. БУНИНА»

CONTINUUM

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА.
ОБРАЗОВАНИЕ

Выпуск №2(10) / Елец, 2018

УЧРЕДИТЕЛЬ И ИЗДАТЕЛЬ:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
(399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28, 1)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

- Щербатых С.В.** - **главный редактор**, доктор педагогических наук, профессор, проректор по учебной работе Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина (Елец, Россия);
- Подаева Н.Г.** - **заместитель главного редактора**, доктор педагогических наук, профессор Елецкого государственного университета им. И.А.Бунина (Елец, Россия);
- Асланов Р.М.** - доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий отделом Научно-технической информации института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана (Баку, Азербайджан);
- Боровских А.В.** - доктор физико-математических наук, профессор Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия);
- Гроздев С.И.** - доктор по математике, доктор педагогических наук, профессор, проректор по науке и академическому развитию Института математики и информатики Болгарской академии наук, академик IHEAS (София, Болгария);
- Зарубин А.Н.** - доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений Орловского государственного университета им. И.С. Тургенева (Орел, Россия);
- Корниенко В.В.** - доктор физико-математических наук, профессор Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина (Елец, Россия);
- Кузнецова Т.И.** - доктор педагогических наук, профессор Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия);
- Сергеева Т.Ф.** - доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой общих математических и естественнонаучных дисциплин Академии социального управления (Москва, Россия);
- Солдатов А.П.** - заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор Белгородского государственного национального исследовательского университета (Белгород, Россия);
- Солеев А.** - доктор физико-математических наук, профессор Самаркандского государственного университета им. А.Навои (Самарканд, Узбекистан);
- Подаев М.В.** - ответственный секретарь, кандидат педагогических наук, доцент Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина (Елец, Россия);

THE FOUNDER AND THE PUBLISHER:

The Federal State Educational Government-Financed Institution of Higher Education
«Bunin Yelets State University» (399770, Lipetsk region, Yelets, st. Kommunarov, 28, 1)

THE EDITORIAL BOARD:

- Shcherbatykh S.V.** **Editor-in-chief**, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Vice Rector for Academic Affairs of Yelets State University. IA Bunin (Yelets, Russia)
- Podaeva N.G.** **Deputy Chief Editor**, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Bunin Yelets State University (Yelets, Russia)
- Aslanov R.M.** Doctor of Pedagogical Sciences, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department of Scientific and Technical Information Institute of Mathematics and Mechanics Azerbaijan National Academy of Sciences (Baku, Azerbaijan)
- Borovskikh A.V.** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Moscow State University. MV Lomonosov (Moscow, Russia)
- Grozdev S.I.** Doctor in Mathematics, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Vice Rector for Research and Academic Development Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, academician IHEAS (Sofia, Bulgaria)
- Zarubin A.N.** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Honored Scientist of Russia, head of the department of mathematical analysis and differential equations, Oryol State University. IS Turgenev (Oryol, Russia)
- Kornienko V.V.** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Bunin Yelets State University (Yelets, Russia)
- Kuznetcova T.I.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor of the Moscow State University. MV Lomonosov (Moscow, Russia)
- Sergeeva T.F.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Department of general mathematical and natural sciences Social Management Academy (Moscow, Russia)
- Soldatov A.P.** Honored Worker of Science, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Mathematics, Belgorod State National Research University (Belgorod, Russia)
- Soleev A.** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of Samarkand State University. A.Navoi (Samarkand, Uzbekistan)
- Podaev M.V.** executive secretary, Ph.D., associate professor of Yelets State University. IA Bunin (Yelets, Russia)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Ахатов А.Р., Назаров Ф.М., Эштемиров Б.Ш.	Электронное обучение вчера, сегодня, завтра. Проблемы и перспективы.....	7
Солеев А.	Степенные преобразования для систем нелинейных алгебраических уравнений.....	12
Зарубин А.Н., Чаплыгина Е.В.	Краевая задача для смешанно-составного уравнения с дробной производной, функциональным запаздыванием и опережением.....	18
Базилевский М.П.	Мультипликативный критерий детерминации-автокорреляции в регрессионном анализе.....	23
Волотов Н.Н.	О достаточных условиях рациональности сумм сложных кубических радикалов.....	28
Исаева С.Э.	Смешанная задача для одной системы полулинейных гиперболических уравнений с запоминающими операторами.....	35
Петрова С.Ю.	Интерактивный мотиватор изучения предмета "ФЭМУЛАС"	41
Датиев М.К., Кулай А.Ю., Датиев К.М.	Статистические модели языка.....	48
Елецких И.А.	Об операторах и уравнениях типа Романовского с частными интегралами.....	53
Игонина Е.В.	Компьютерное моделирование процесса стабилизации управляемой маятниковой системы в условиях неполной информации.....	59
Корниенко Д.В.	Применение динамических списков при работе с управляемыми формами.....	66
Костин С.В.	О совершенствовании изучения понятий "полином" и "рациональная функция" в школе и в вузе.....	71

НОВШЕСТВА ФГОС И ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

Бычков С.Н., Зайцев Е.А.	Формирование мотивации в изучении математики: роль геометрии (социокультурный подход)	81
Дворяткина С.Н., Будякова Т.П.	Деловая игра как средство проявления синергии в обучении математике студентов-юристов.....	90
Казаков Н.А., Кузнецова Т.И.	Парабола как средство демонстрации единства теории и практики (из опыта кружковой работы)	101

Тарасова О.В.	Формирование готовности бакалавров – будущих учителей математики и информатики к профессиональной деятельности в процессе прохождения системы практик.....	109
Власов Д.А.	К вопросу об информатизации учебного процесса по дисциплине "Теория принятия решений".....	115
Синчуков А.В.	Роль информационных технологий в совершенствовании подготовки бакалавра менеджмента.....	121
Герасимчук А.В.	Нейросетевые интеллектуальные обучающие системы в процессе освоения математических дисциплин высшей школы.....	127
Сапрыкин В.А., Гайтерова Л.Г.	К вопросу о личностном подходе в практике университетского образования (социологический аспект)	137

CONTENTS

ASPECTS OF APPLIED MATHEMATICS AND INFORMATICS

A.R. Akhatov, F.M. Nazarov, B.Sh. Eshtemirov	Methods of using the properties and characteristics of training ethalons sets for ensuring the reliability of electronic documents.....	7
A. Soleev	Power transformations for systems of nonlinear algebraic equations.....	12
A.N. Zarubin, E.V. Chaplygina	Boundary value problem for a mixed-composition equation with fractional derivative, functional delay and advance.....	18
M.P. Bazilevskiy	Multiplicative criterion of determination-autocorrelation in regression analysis.....	23
N.N. Volotov	On sufficient conditions of the rationalization of the sum of complex cubic radicals.....	28
S.E. Isayeva	The initial-boundary value problem for one system of semilinear hyperbolic equations with memory operator.....	35
S.Yu. Petrova	"FEMULAS" interactive motivator of studying the subject.....	41
M.K. Datiev, A.Y. Kulay, K.M. Datiev I.A. Yeletskikh	Statistical language models.....	48
	On Romanovsky type operators and equations with partial integrals.....	53
E.V. Igonina	Computer simulation of the process stabilization of controlled pendular systems under conditions of incomplete information.....	59
D.V. Kornienko	The use of dynamic lists during processing with managed forms.....	66

S.V. Kostin	On improvement of studying of the concepts "polynom" and "rational function" at school and in higher education institutions.....	71
-------------	--	----

INNOVATIONS FEDERAL STANDARDS AND EDUCATIONAL TECHNOLOGIES IN THE TEACHING OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

S.N. Bytchkov, E.A. Zaytsev	The formation of motivation in studying mathematics: the role of geometry (social-cultural approach)	81
S.N. Dvoryatkina, T.P. Budyakova	Business role-playing game as a means of manifesting synergy in teaching mathematics to law students.....	90
N.A. Kazakov T.I. Kuznecova	Parabola as means of demonstration of unity of the theory and practice (from experience of kruzhekovy work)	101
O.V. Tarasova	Formation of readiness of bachelors-future teachers of mathematics and computer science for professional activity during the passage of the system of practices.....	109
D.A. Vlasov	To the question of informatization of educational process on discipline "the theory of decision-making"	115
A.V. Sinchukov	Role of information technologies in improvement of training of the bachelor of management.....	121
A.V. Gerasimchuk	Neural network intelligent tutoring system in the development of the mathematical disciplines of the higher school.....	127
V.A. Saprykin, L.G. Gayterova	To the question of personal approach in practice of university education (sociological aspect)	137

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

УДК
658.512.011 | **ЭЛЕКТРОННОЕ ОБУЧЕНИЕ ВЧЕРА, СЕГОДНЯ,
ЗАВТРА. ПРОБЛЕМЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ**

Акмал Рустамович Ахатов
д.т.н., доцент
akmalar@rambler.ru
г. Самарканд (Узбекистан)

Самаркандский государственный
университет

Файзулло Махмадиярович Назаров
ассистент
fayzullo-samsu@mail.ru
г. Самарканд (Узбекистан)

Самаркандский государственный
университет

Эштемиров Бунёд Шерали угли
студент
bunyodamaliy@bk.ru
г. Самарканд (Узбекистан)

Самаркандский государственный
университет

Аннотация. Рассмотрена проблема проектирования практических приложений, связанных с построением систем электронного документооборота (СЭД) на основе методов интеллектуального анализа данных и аппарата мягких вычислений, а также формирования нелинейных принципов нечетких выводов, в результате чего создается эффективный инструментарий для решения прикладных задач различных проблемных областей. Сложный характер динамических процессов, происходящих на этапах передачи и обработки электронных документов (ЭД), неоднозначность, неполнота исходной информации выделены в качестве аргументов разработки методов и алгоритмов оптимизации повышения достоверности информации на основе новых современных технологий. Сформулирована задача повышения достоверности данных в системах электронного документооборота на основе использования свойств и характеристик обучающих наборов-эталонов. Предложены принципы построения методов повышения достоверности электронных документов (ЭД) на базе информационной избыточности различной природы. Разработаны модели эталонной проверки достоверности информации ЭД на основе формирования и использования наборов обучающих данных, в которых отражаются закономерности, свойства, особенности сильных вариаций, случайных всплесков, нестационарности информации, что позволяет обнаруживать и корректировать различного рода искажения, возникающие на этапах ввода, передачи и обработки данных. Выработаны правила контроля достоверности обработки данных для поддержания и регулирования значения выходного (расчетного) параметра управления на требуемом уровне для минимизации среднеквадратического отклонения значений контролируемого элемента ЭД от порогового, который заложен в наборе-эталоне обучения. Разрабо-

тан алгоритм, реализующий процедуры разбиения общего интервала значений элементов ЭД на непересекающиеся подмножества, выделения и формирования эффективного набора-эталона. Предложена методика оценки эффективности стратегий контроля достоверности информации ЭД.

Ключевые слова: электронный документ, достоверность информации, обучающий набор, свойства, характеристики, набор-эталон, адаптивное правило, разрешенное и запрещенное подмножество, стратегия контроля, оценка эффективности,

Актуальность темы. Одним из значимых исследований по разработке современных методов оптимизации обработки данных за счет повышения достоверности информации в системах электронного документооборота (СЭД) предприятий и организаций, которые характеризуются нестационарными параметрами переходных процессов на этапах сбора, передачи, хранения и обработки электронных документов (ЭД) является создание технологий интеллектуального анализа данных (ИАД) слабоструктурированных и нестационарных областей знаний [Jumanov I.I., Akhatov A.R., 2010: 71]. Эффективным механизмом обеспечения достоверности информации ЭД на сегодняшний день может выступать формирование и использование наборов обучающих данных, в которых отражаются закономерности, свойства, особенности сильных вариаций, случайных всплесков, нестационарности информации, что позволяет обнаруживать и корректировать различного рода искажения, возникающие на этапах ввода, передачи и обработки данных [Жуманов И.И., Ахатов А.Р., 2011: 42].

В связи с этим, настоящая работа посвящена исследованию и разработке методов оптимизации передачи и обработки данных за счет обеспечения их достоверности на основе эталонного обучения, в котором обобщены свойства статистических и динамических моделей идентификации, анализа и обработки информации.

Принципы повышения достоверности ЭД на основе эталонного обучения. В предлагаемом подходе к повышению достоверности ЭД при предварительной обработке данных множество значений элементов ЭД разбивается на подмножества разрешенных значений, в интервале которых данные считаются достоверными и запрещенных значений, в интервале которых данные считаются искаженными, т.е. недостоверными. Принципом повышения достоверности данных является формирование и использование эталонного обучающего набора, из которого предполагается выделить характеристики, особенностей, полезных сведений и знаний об ЭД [Воронцов К.В., 2004: 7].

Математически задачу повышения достоверности передачи и обработки ЭД на основе эталонного обучающего набора можно сформулировать следующим образом. Пусть множество $E_0 = \{S_1, \dots, S_m\}$ значений элемента ЭД разделяется на l непересе-

кающихся подмножеств $K_1, \dots, K_l$, $E_0 = \bigcup_{t=1}^l K_t$. Каждая компонента ЭД $S_i \in E_0$ опи-

сывается n достоверными и недостоверными элементами из последовательности исходных данных $X(n) = (x_1, \dots, x_n)$. Для последовательности элементов задаются некоторые пороги δ ($\delta > 0$) в интервальной шкале и $n - \delta$ в номинальной шкале. Последовательность элементов разделяется на подмножества разрешенных и запрещенных значений, т.е. из множества элементов ЭД представляются пары (S_u, S_v) , где $S_u \in K_i$ - достоверный элемент, $S_v \in K_j$ - недостоверный элемент, $u \neq v$, $i = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, m$. Важным моментом исследования является определение взаимосвязанности элементов S_u и S_v по некоторому отношению R , которое представляется различными

критериями, в частности по критерию важности, информативности, эквивалентности, взаимной эквивалентности и других [Загоруйко Н.Г., Кутненко О.А. и др., 2014: 892].

Выделение и формирование набора-эталона. Задаются $R_S = \rho(S_u, S_v)$ - расстояние от подмножества элементов S_u до ближайшего подмножества S_v , которое определяется по порогу δ и по Евклидовой метрике. Формируется E_0^* - подмножество взаимосвязанных элементов. С учетом этого оценивается взвешенное расстояние между контролируемыми элементами S и S' с подмножествами S_u, S_v и S'_u, S'_v

$$d(S, S') = \frac{\rho(S, S')}{R_S} + \frac{\rho(S, S')}{R_{S'}}.$$

Проверяется принадлежность элемента $S' \in K_t$ к одной из последовательности групп $K_1, \dots, K_l$ по условию если $d(S, S') = \min_{S_u \in E_0} d(S_u, S')$ и по результатам проверки выделяется E_{ed}^* - набор-эталон и E_k^* - контрольный набор, $E_0^* = E_{ed}^* \cup E_k^*$.

Набор-эталон далее используется для выделения и формирования подмножества E_0^* искаженных элементов. Формируется рациональный набор обучающих данных E_0^* по принципу последовательного исключения недостоверных элементов и такая процедура поиска начинается с $E_k^* = \emptyset$. Определяются кандидаты на редукцию набора-эталона E_{ed} по минимальному значению R_S на основе отношения $\{R_S\}_{S \in \Gamma_u}$ по группе $\Gamma_u, u = 1, \dots, \delta$. Производится упорядочение групп взаимосвязанных элементов как $|\Gamma_1| \geq \dots \geq |\Gamma_\delta|$. Полученные результаты позволяют решить задачу оптимизации контроля и оценки достоверности передачи и обработки данных на основе набора-эталона и элементов мягких вычислений.

Оптимизация контроля достоверности обработки данных на основе набора-эталона. В предположении, что входной элемент x представляется в виде временного ряда, динамика элемента ЭД в переходных процессах задается дифференциальным уравнением

$\frac{dx}{dt} = uk - v$, где k - коэффициент динамической характеристики элемента; u - параметр идентификации элемента в переходном процессе; v - параметр внешних воздействий и помех.

Исходя из этого функционал качества контроля достоверности представляется в виде [Воронцов К.В., 2014:12]

$$Q = \int_0^T (x(t) - \delta)^2 dt \rightarrow \min$$

Принципом контроля достоверности обработки данных является поддержание и регулирование значения выходного (расчетного) параметра u на требуемом уровне для минимизации среднеквадратического отклонения значений контролируемого элемента ЭД от порогового, который заложен в наборе-эталоне обучения. В соответствии с этим, расчетный выход сравнивается со значениями характеристик набора-эталона, выявляются разности, значения которых формируются бинарной последовательностью 0 и 1, где «0» - соответствует недостоверному элементу, а «1» - достоверному. Отметим, что оптимизация контроля достоверности по традиционной постановке решения задачи, как правило, основывается на задании условия Коши $x(0) = 0$. В данном случае для

оптимизации известный принцип максимума Понтрягина неприменим, так как при достижении $x(t)$ порогового уровня δ могут существовать бесконечное количество переключений. В связи с этим, предлагается эвристическое правило контроля достоверности обработки данных на основе «мягких вычислений» в следующем виде:

- если $x = \text{"меньше } \delta\text{"}$ то $u = \text{"около } 1\text{"}$;
- если $x = \delta$ то $u = \text{"около } v/k\text{"}$;
- если $x = \text{"больше } \delta\text{"}$ то $u = \text{"около } 0\text{"}$.

Элемент x представляется в реальном режиме времени с определенным интервалом значений. Если в принятом интервале значение контролируемого элемента превышает уровень порога δ , то считается, что значение расчетного элемента недостоверно. Заключительный этап исследования состоит в определении оценки эффективности E_0 для стратегий контроля достоверности обработки данных на основе предложенных правил по принципу применения набора-эталона. Для этого анализируется следующее соотношение

$$E_0 = \lambda D_s + (1 - \lambda) T_s,$$

где D_s , T_s – соответственно емкости подмножества разрешенных и запрещенных значений элементов; $\lambda \in [0,1]$ – значения вероятностной функции оценки принадлежности элемента к подмножествам D_s и T_s .

Установлено, что эффективность алгоритма контроля достоверности обработки данных на основе набора-эталона в первую очередь зависит от степени принадлежности элемента к границам подмножеств D_s и T_s , стратегии расчета параметра u , регулированием значений которого повышается либо уменьшается значение E_0 .

Список литературы

1. Воронцов К.В. (2004) Обзор современных методов по проблеме качества обучения алгоритмов // Таврический вестник информатики и математики. №1. С. 5-25.
2. Жуманов И.И., Ахатов А.Р. (2011) Интеллектуальный контроль достоверности текстовой информации на основе учета свойств и распределений данных // «Химическая технология. Контроль и управление» ТГТУ. Ташкент. № 1 (37). С.41-47.
3. Загоруйко Н.Г., Кутненко О.А., Зырянов А.О. (2014) Обучение распознаванию образов без переобучения // Машинное обучение и анализ данных, том 1. №7 С.891-901.
4. Jumanov I.I., Akhatov A.R. (2010) The control of information transfer reliability in intellectual control systems on the basis of statistical redundancy // Sixth World Conference on Intellectual Systems for Industrial Automation, Uzbekistan, TSTU. Tashkent. p. 70-75

METHODS OF USING THE PROPERTIES AND CHARACTERISTICS OF TRAINING ETHALONS SETS FOR ENSURING THE RELIABILITY OF ELECTRONIC DOCUMENTS

A.R. Akhatov Dr. Sci. (Engineering), Associate Professor akmalar@rambler.ru Samarkand (Uzbekistan) F.M. Nazarov assistant fayzullo-samsu@mail.ru	Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan) Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan)
--	---

Samarkand (Uzbekistan)

B.Sh. Eshtemirov

student

bunyodamaliy@bk.ru

Samarkand (Uzbekistan)

Samarkand State University

(Samarkand, Uzbekistan)

Abstract. The problem of designing practical applications are considered with relation in the construction of electronic document management (EDM) systems based on methods of data mining and soft computing, as well as the formation of nonlinear principles of fuzzy inferences, which results allow to create the effective tool for solving applied problems of various problem areas. Complex nature of the dynamic processes occurring at the stages of transmission and processing of electronic documents (ED), ambiguity, incompleteness of the initial information are identified as arguments for developing the methods and algorithms for optimizing the reliability of information based on new modern technologies. The problem of increasing the reliability of data in electronic document management systems is formulated on the basis of using the properties and characteristics of learning sets of standards. The principles are proposed for constructing the methods of increasing the reliability of electronic documents (ED) on the basis of information redundancy of various nature. The models of the standard verification of ED information reliability are developed on the basis of formation and use of training data sets in which regularities, properties, features of strong variations, random bursts, nonstationary information are reflected, and it allows to detect and correct various distortions arising at the stages of input, transmission and processing data. Rules for controlling the reliability of data processing to maintain and control the value of the output (calculated) control parameter at the required level are developed to minimize the standard deviation of the values of monitored ED element from the threshold value, which is laid down in the training standard set. The developed algorithm implements the procedures for partitioning a common interval of values for ED elements into disjoint subsets, separating and forming an effective reference set. The methodology for evaluating the effectiveness of control strategies for the reliability of ED information is proposed.

Keywords: electronic document, information authenticity, training set, property, characteristics, set-standard, adaptive rule, permitted and forbidden subset, control strategy, estimation of efficiency.

References

1. Vorontcov K.V. (2004) Obzor sovremenny`kh metodov po probleme kachestva obucheniia algoritmov [Review of current methods on the quality of learning algorithms] Taurian Bulletin of Informatics and mathematics. №1, pp. 5-25.
2. Zhumanov I.I., Ahatov A.R. (2011) Intellekual`ny`i kontrol` dostovernosti tekstovoi` informatcii na osnove ucheta svoi`stv i raspredelenii` danny`kh [Intelligent control of reliability of text information based on properties and data distributions] Taurian Bulletin of Informatics and mathematics. №1, pp. 41-47.
3. Zagorui`ko N.G., Kutnenko O.A., Zy`rianov A.O. (2014) Obuchenie raspoznavaniiu obrazov bez pereobucheniia [Learning to recognize images without retraining] Machine learning and data analysis. №7. T. 1, pp. 891-901.
4. Jumanov I.I., Akhatov A.R. (2010) The control of information transfer reliability in intellectual control systems on the basis of statistical redundancy // Sixth World Conference on Intellectual Systems for Industrial Automation, Uzbekistan, TSTU. Tashkent. p. 70-75.

УДК 513.7 | **СТЕПЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

Ахмаджон Солеев | Самаркандский государственный
д.ф.-м.н., профессор | университет, Узбекистан
asoleev@yandex.ru
Самарканд, Узбекистан

Аннотация. В работе рассматриваются степенные преобразования, которые преобразуют нелинейные алгебраические уравнения или системы нелинейных алгебраических уравнений в уравнения или системы алгебраических уравнений с меньшей переменной. Эти преобразования делают геометрию показателей степеней более содержательной. Показаны изменения геометрических конструкций после указанных преобразований. Приведены понятия размерности системы алгебраических уравнений на основе построения многогранников Ньютона и нормальных конусов его граней. Построения многогранников Ньютона и нормальных конусов его граней рассматривались в работах А.Д.Брюно (1980), А.Солеева (1982), А.Г.Хованского (1983). Рассмотрены некоторые существенные свойства степенных преобразований. Доказано, что если размерность системы равна $d < n$, то существует унимодулярная матрица α такая, что степенным преобразованием с матрицей α и подходящими сокращениями эта система приводится к системе уравнений относительно d переменных. Также предложен алгоритм нахождения унимодулярных матриц степенных преобразований. В конце приведены конкретные примеры.

Ключевые слова: Степенные преобразования, системы нелинейных алгебраических уравнений, размерность системы, линейные пространства, многогранники Ньютона, нормальные конусы, унимодулярные матрицы.

Рассмотрим преобразования системы

$$f_i(X) \equiv \sum_{j=1}^{k_i} a_{ij} X^{Q_j} = 0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (1)$$

которым в пространстве R^n показателей степеней Q соответствуют параллельные переносы (для каждого f_i свой) и аффинные преобразования (одно для всех f_i).

Эти преобразования делают геометрию показателей степеней [Брюно, Солеев, 1991: 89] более содержательной и дают способ для решения определённых систем.

Отыскание тех решений системы (1), у которых одна из координат тождественно равна нулю, будем считать решённой задачей, так как она приводится к задаче аналогичной исходной, но с меньшей размерностью. Поэтому будем искать решения системы (1) для которых ни одна координата не равна нулю тождественно. Для таких решений в каждом из уравнений системы (1) можно производить сокращение на любое произведение степеней координат. Если в i -м уравнении сделать сокращение на $X^{\bar{Q}^i}$, то в нём векторные показатели степени станут равными $\tilde{Q} = Q - \bar{Q}^i$, т.е. D_i параллельно переносится на вектор $-\bar{Q}^i$.

Пусть

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

– квадратная матрица с вещественными элементами α_{ij} , и $\det \alpha \neq 0$.
Преобразование

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x_1^{\alpha_{11}} \dots x_n^{\alpha_{1n}}, \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ y_n &= x_1^{\alpha_{n1}} \dots x_n^{\alpha_{nn}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

называется *степенным преобразованием* с матрицей α . Обратное преобразование

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= y_1^{\beta_{11}} \dots y_n^{\beta_{1n}}, \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ x_n &= y_1^{\beta_{n1}} \dots y_n^{\beta_{nn}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

также является степенным преобразованием с матрицей.

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} = \alpha^{-1}.$$

Отметим некоторые свойства степенного преобразования (2).

1. При преобразовании (2), $X^Q = Y^{Q'}$, где

$$Q' = \beta^* Q \quad (4)$$

и β^* – транспонированная матрица β . Итак, при степенном преобразовании (2) векторные показатели испытывают линейное преобразование. Это справедливо и для суммы

$$f(X) = \sum_{Q \in D} a_Q X^Q, \quad (5)$$

которая при преобразовании (3) перейдет в сумму

$$f(X) = f'(Y) = \sum_{Q' \in D'} a_{Q'} Y^{Q'}, \quad (6)$$

где $Q' = \beta^* Q$, $D' = \beta^* D$, $a_Q = a_{Q'}$. Геометрические конструкция множеств D и D' также связаны тем же линейным преобразованием (4). Поэтому при преобразовании (2) укорочение переходит в укорочение, т.е. операция выделения укорочений перестановочна со степенным преобразованием.

2. При преобразовании (2) кривая

$$x_i = b_i \tau^{p_i} (1 + o(1)), \quad \sum p_i^2 \neq 0, i = 1, \dots, n, (\tau \rightarrow \infty) \quad (7)$$

с векторным порядком $P = (p_1, \dots, p_n)$ перейдет в кривую

$$y_i = b'_i \tau^{p'_i} (1 + o(1)), \quad i = 1, \dots, n$$

с векторным порядком

$$P' = \alpha P. \quad (8)$$

Следовательно, в пространстве R^n порядков P степенное преобразование (2) индуцирует линейное преобразование (8). Это преобразование сопряжено преобразованию (4). Поэтому пространства R^n и R_* оказываются сопряженными, и скалярное произведение $\langle P, Q \rangle$ сохраняется при степенном преобразовании (2).

3. Преобразование (2) взаимно однозначно отображает множество $\{X : 0 < |x_i| < \infty, i = 1, \dots, n\}$ на множество $\{Y : 0 < |y_i| < \infty, i = 1, \dots, n\}$ тогда и только тогда, когда матрица α унимодулярна, т.е. все α_{ij} целые, $\det \alpha = \pm 1$. Здесь используются только такие степенные преобразования.

4. Пусть, кроме (2), имеется степенное преобразование

$$z_i = y_1^{\gamma_{i1}} y_2^{\gamma_{i2}} \dots y_n^{\gamma_{in}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

с матрицей γ . Тогда Z связано с X степенным преобразованием с матрицей $\gamma\alpha$, т.е. степенные преобразования образуют группу, а степенные преобразования с унимодулярной матрицей образуют ее подгруппу.

Пусть $f(X)$ – произвольный многочлен Лорана и d – размерность его многогранника Ньютона $M = M(f)$ [Брюно, Солеев, 1982: 88], будем называть d *размерностью многочлена $f(X)$* . В R^n рассмотрим линейное пространство $N(f)$, нормальное к $M(f)$. Очевидно, $\dim M + \dim N = n$. Аналогично для системы многочленов Лорана $f_i(X)$, $i = 1, \dots, m$ рассматриваем многогранники $M(f_i)$ и их нормальные пространства $N(f_i)$. Обозначим

$$N = N(f_1) \cap \dots \cap N(f_m)$$

и $d = n - \dim N$. Величину d назовем *размерностью указанной системы многочленов* [Брюно, Солеев, 1982: 91],

Пусть имеется такая система (1)

Теорема 1. *Если размерность системы (1) равна d , то существует унимодулярная матрица α такая, что степенным преобразованием (2) с матрицей α и подходящими сокращениями эта система приводится к системе m уравнений относительно d переменных.*

Доказательство. Пусть L – линейное пространство в R^n , нормальное к N . Очевидно, $\dim L = d$. В каждом многочлене Лорана $f_i(X)$ сделаем сокращение на $X^{\bar{Q}^i}$ так, чтобы $D(f_i X^{-\bar{Q}^i}) \subset L$. Здесь $D(f_i)$ носитель многочлена $f_i(X)$. В качестве $\bar{Q}^i$ можно взять любой из векторов $Q \in D(f_i)$. Будем считать, что сокращения уже сделаны и все $D(f_i) \subset L$. Пусть $S_1, \dots, S_d$ – базис в L и векторы $S_{d+1}, \dots, S_n$ дополняют его до базиса в R^n . Степенное преобразование

$$y_i = X^{S_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (9)$$

переводит $f_i(X)$ в $g_i(y_1, \dots, y_d) \equiv g_i(Y)$.

Действительно, для $Q \in L$ имеем однозначное разложение

$$Q = r_1 S_1 + \dots + r_d S_d,$$

т.е. $X^Q = y_1^{r_1} \dots y_d^{r_d}$. Для преобразования (2), (9) имеем

$$\alpha = (S_1 \dots S_n)^*.$$

Если все $Q \in D_i$ целочисленны, то можно найти унимодулярную матрицу α следующим образом. Пусть $S_1, \dots, S_d$ – некоторый целочисленный базис в L . Образует квадратную матрицу β так, что ее i -я строка есть S_i для $i \leq d$ и состоит из нулей для $d < i \leq n$. Как известно [Гангмахер, 2005: 187], всякая квадратная матрица β приводится к диагональной матрице δ при помощи элементарных операций над столбцами и строками, т.е. квадратная матрица β с целыми элементами представима в виде

$$\beta = \gamma_1 \delta \gamma,$$

где γ_1 и γ – унимодулярные, а δ – диагональная матрица с целыми коэффициентами. За матрицу α можно взять унимодулярную матрицу γ . Доказательство окончено.

При $n = 2$ матрицу α можно вычислить с помощью цепных дробей [Хинчин, 1961: 67], а при $n = 3$ с помощью алгоритма Эйлера [Солеев, Солеева, 2013: 92].

Обозначим через $d(i)$ размерность подсистемы из первых i уравнений системы (9). Очевидно, $d(i) \leq d(i+1)$. Обозначим $d(m) = d$. Выделим те значения i , для которых $d(i) < d(i+1)$. Пусть это будут $i_1, \dots, i_l$. Из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Существует степенное преобразование (2) с унимодулярной матрицей α и сокращения такие, что система (1) размерности d с подсистемами $i_1, \dots, i_l$ уравнений приводится к системе m уравнений относительно d переменных, имеющей квазитреугольный вид: подсистема из первых i_j уравнений зависит от $d(i_j)$ переменных ($j = 1, \dots, l$).*

Действительно, по теореме 1 всю систему (1) приведем к системе от d переменных. Затем, также делая степенное преобразование для этих d переменных, подсистему из первых i_l уравнений приведем к подсистеме от d_{i_l} переменных и т.д. по убыванию j от l до 1.

Следствие 1. *Предположим, что в системе (1) $d(i) = i$ для $i < n$ и, если $m > n - 1$, то $d(j) = n - 1$ для $n \leq j \leq m$. Тогда существует унимодулярная матрица α такая, что степенным преобразованием (2) и подходящим сокращением эта система приводится к треугольному виду*

$$\begin{aligned} g_i(y_1, \dots, y_i) &= 0, \quad i = 1, \dots, \min(n-1, m), \\ g_j(y_1, \dots, y_{n-1}) &= 0, \quad j = n, \dots, m. \end{aligned} \quad (10)$$

Следствие 2. *Рассмотрим такую систему (9), у которой размерность каждого многочлена f_i равна единице. Тогда степенным преобразованием и сокращениями система приводится к виду (10), где каждая из функций g_i является многочленом от одного монома Y^{R_i} :*

$$g_i \equiv h_i(Y^{R_i}), \quad i = 1, \dots, m,$$

где $R_i = (r_{i1}, \dots, r_{in}, 0, \dots, 0)$, для $i < n$.

Если найти все корни $z_i^{(1)}, \dots, z_i^{(l_i)}$ каждого уравнения $h_i(z_i) = 0$, $i = 1, \dots, m$, то система (10) приводится к $l_1 l_2 \dots l_m$ системам

$$Y^{R_i} = z_i^{(j)}, \quad i = 1, \dots, m, \text{ где } j = 1, \dots, l_i.$$

Пусть сокращения уже произведены (т.е. $O \in D(f_i)$) и T_i – базисный вектор линейной оболочки носителя $D(f_i)$. Тогда $r_{11} \cdots r_{ii} = \pm \text{НОД}$ главных миноров матрицы

$(T_1 \dots T_i)$, $i \leq \min(m, n-1)$; т.е. всегда $r_{11} = 1$. Если все $r_{ii} = \pm 1$, то дополнительным степенным преобразованием можно добиться того, что $r_{ij} = \delta_{ij}$ (символ Кронекера). Тогда $Y^{R_i} = y_i$ для $i \leq \min(m, n-1)$.

Изменением порядка нумерации многочленов f_i в системе (9) можно получить дополнительные упрощения в преобразованной системе

$$g_i(y_1, \dots, y_d) \equiv X^{-\vec{Q}} f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, m, \quad (11)$$

полученной по теореме 2. Для небольших размерностей ($n \leq 6$) нужные перестановки можно увидеть непосредственно из преобразованной системы (11). В общем случае выбор наилучшей нумерации требует перебора различных вариантов. Этот вопрос здесь не будем рассматривать.

Пример. 1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} f_1(x_1 x_2 x_3) &\equiv b_1 x_1 x_2 x_3 + b_2 x_1^4 + b_3 x_3^4 + b_4 x_1^2 x_2^2 = 0, \\ f_2(x_1 x_2 x_3) &\equiv c_1 x_2 x_3 + c_2 x_1^2 x_3 = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Для нее имеем $D = \{Q_1 = (1, 1, 1), Q_2 = (4, 0, 0), Q_3 = (0, 0, 4), Q_4 = (2, 2, 0)\}$. Отсюда $\overline{Q_1} = Q_1 - Q_2 = (-3, 1, 1)$, $\overline{Q_2} = Q_2 - Q_1^2 = (2, -1, 0)$.

Поэтому унимодулярная матрица будет

$$\alpha = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

степенное преобразование с матрицей α и его обратное суть

$$\begin{cases} y_1 = x_1^{-3} x_2 x_3, \\ y_2 = x_1^2 x_2^{-1}, \\ y_3 = x_1^{-1} x_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = y_2 y_3, \\ x_2 = y_2 y_3^2, \\ x_3 = y_1 y_2^2 y_3. \end{cases} \quad (13)$$

После степенного преобразования (13) и сокращения первого уравнения системы (12) на $y_2^4 y_3^4$, а второго – на $y_1 y_2 y_3^3$ получим систему

$$\begin{aligned} g_1(y_1, y_2) &\equiv b_1 y_1 + b_2 + b_3 y_1^4 y_2^4 + b_4 y_1^2 y_2^2 = 0, \\ g_2(y_2) &\equiv c_1 + c_2 y_2 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

В результате степенного преобразования мы получили систему уравнений (14) с меньшей числа переменных.

2. Для системы

$$\begin{aligned} f_1(x_1 x_2 x_3)_1 &\equiv a_1 x_1^4 + a_2 x_2^4 = 0, \\ f_2(x_1 x_2 x_3) &\equiv b_{11} x_2 x_3 + b_{12} x_1^3 x_2 = 0. \end{aligned}$$

после соответствующего степенного преобразования переходит в систему

$$\begin{aligned} g_1(y_1) &\equiv a_2 + a_3 y_1^4 = 0, \\ g_2(y_2) &\equiv a_{21} y_2 + a_{23} = 0. \end{aligned}$$

Построение соответствующего степенного преобразования предлагаем читателю.

Список литературы

1. Брюно А.Д., Солеев А. Локальная униформизация ветвей пространственной кривой и многогранники Ньютона // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3, вып. 1. С. 67-102.
2. Солеев А. Алгоритм вычисления многогранников Ньютона // Доклады АН Узбекистана, N 5, 1982. С. 14-16.
3. Хинчин А.Я. Цепные дроби, М.: Физматгиз, 1961.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. 5-е издание, М., Наука. 2005.
5. Soleev A., Soleeva N. Power geometry and algebraic equations // AIP Conference Proceedings, 1557, 85, 2013.
6. Хованский А.Г. Многогранники Ньютона // Современные проблемы математики. Т. 22. Итоги науки и техники. М.: ВИНТИ, 1983. С. 206-239.

POWER TRANSFORMATIONS FOR SYSTEMS OF NONLINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

A. Soleev Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor asoleev@yandex.ru Samarkand	Samarkand State University (Samarkand, Uzbekistan)
---	---

Abstract. In this paper are considered power transformations which transform nonlinear algebraic equations or systems of nonlinear algebraic equations into equations and or systems of algebraic equations with a smaller variable. These transformations make the geometry of exponents more meaningful, the changes in geometric constructions after these transformations are shown. The notion of the dimension of a system of algebraic equations is presented on the basis of the construction of Newton polyhedrons and normal cones of its faces. The construction of Newton polyhedra and normal cones of its faces was considered in the works of A.D.Bruno (1980), A.Soleev (1982), A.G.Hovansky (1983). We consider some significant properties of power transformations. It is proved that if the dimension of the system is $d < n$, then there exists a unimodular matrix such that by a power transformation with this matrix and by suitable abbreviations this system is reduced to a system of equations with respect to variables. It is also proposed an algorithm for finding unimodular matrices of power transformations. In the end, specific examples are given.

Keywords: Power transformations, systems of nonlinear algebraic equations, dimension of system, linear spaces, Newton polyhedrons, normal cones, unimodular matrices.

References

1. Bruno A.D., Soleev A. (1991) Lokal`naia uniformizatsiia vetvei` prostranstvennoi` krivoi` i mnogogranniki N`iutona [Local uniformization of branches of a space curve and Newton polyhedra] // Algebra and Analiz. Vol. 3, no. 1. P. 67-102.
2. Soleev A. (1982) Algoritm vy`chisleniia mnogogrannikov N`iutona [Algorithm for calculating Newton polyhedra] // Reports of the Academy of Sciences of Uzbekistan, No. 5. С. 14--16.
3. Khinchin A.Ya. (1961) Tsepny`e drobi [Chain fractions]. Moscow: Fizmatgiz.
4. Gantmakher F.R. (2005) Teoriia matritc [Theory of matrices]. 5 th edition, Moscow, Nauka.
5. Soleev A., Soleeva N. (2013) Power geometry and algebraic equations // AIP Conference Proceedings. 1557. 85.
6. Khovansky A.G. (1983) Mnogogranniki N`iutona [Newton's polyhedra] // Modern problems of mathematics. T. 22. Results of science and technology. M.: VINITI. S. 206-239.

УДК
517.956

**КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СМЕШАННО-СОСТАВНОГО
УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ,
ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ И
ОПЕРЕЖЕНИЕМ**

Александр Николаевич Зарубин
д.ф.-м.н., профессор
matdiff@yandex.ru
г. Орел

Орловский государственный университет
им. И.С. Тургенева

Елена Викторовна Чаплыгина
к.ф.-м.н., доцент
lena260581@yandex.ru
г. Орел

Орловский государственный университет
им. И.С. Тургенева

Аннотация. Исследуется задача Трикоми для смешанно-составного уравнения с дробной производной, функциональным запаздыванием и опережением. Построено общее решение уравнения. Доказана теорема единственности.

Ключевые слова: уравнения смешанно-составного типа, задача Трикоми, оператор дробного интегрирования, разностный оператор.

Рассмотрим уравнение

$$LV(x, y) \equiv L(A(x)u(\alpha_1(x), y) - B(x)u(\alpha_1^2(x), y) + C(x)u(\alpha_2^2(x), y)) = 0, \quad (1)$$

где $L \equiv \partial^2 / \partial x^2 + H(-y) \partial^2 / \partial y^2 - H(y) D_{oy}^\alpha - P_y^\tau H(y) -$ дифференциально-разностный оператор смешанного типа, в котором D_{oy}^α - оператор [1, с.43] дробного интегродифференцирования порядка α , $0 < \alpha < 1$, действующий на функцию $V(x, y)$ по переменной y , определяемый соотношением

$$D_{oy}^\alpha V(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial y} D_{oy}^{\alpha-1} V(x, \xi) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y (y-\xi)^{-\alpha} V(x, \xi) d\xi;$$

$\Gamma(x)$ – гамма-функция [2, с.947]; P_y^τ - оператор сдвига по y : $P_y^\tau V(x, y) = V(x, y - \tau)$ ($0 < \tau \equiv const$); $H(\xi)$ – функция Хевисайда; $A(x), B(x), C(x)$ – непрерывные достаточно гладкие функции; $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – сохраняющие ориентацию взаимно обратные диффеоморфизмы класса C^2 , удовлетворяющие условиям $\alpha_1'(x) > 1$ ($\alpha_1'(x) < 1$), $\alpha_1(x) < x$ и $\alpha_2'(x) < 1$ ($\alpha_2'(x) > 1$), $\alpha_2(x) > x$, то есть представляющие собой соответственно растягивающе (сжимающе)-запаздывающее и сжимающе (растягивающе)-опережающее отображения, для которых выполняются тождества

$$\alpha_{3-j}(\alpha_j(x)) = x, \quad j = 1, 2, \quad (*)$$

где x принадлежит области определения отображения α_j , причем $x_0 = 0$, а x_n определены корректно, согласно (*), любым из следующих равносильных равенств:

$$x_n = \alpha_1(x_{n+1}), \quad x_{n+1} = \alpha_2(x_n)$$

(здесь и далее обозначено $\alpha_j^m(x) \equiv \underbrace{\alpha_j(\alpha_j(\dots(\alpha_j(x))\dots))}_{m \text{ раз}}$, если $m > 0$, $\alpha_j^0(x) \equiv x$;
 $\alpha_j^m(x) \equiv \underbrace{\alpha_{3-j}(\alpha_{3-j}(\dots(\alpha_{3-j}(x))\dots))}_{-m \text{ раз}}$, если $m < 0$, $j=1,2$), в области D с линией изменения
 типа $I = \{(x, y) : x_0 < x < x_3, y = 0\}$; $D^+ = D_0^+ \cup D_1^+ \cup D_2^+ \cup J = \{(x, y) : x_0 < x < x_3, 0 < y\}$,
 $D^- = D_0^- \cup D_1^- \cup D_2^-$ – соответственно «параболическая» и эллиптическая части области
 D , причем $D_k^+ = \{(x, y) : x_k < x < x_{k+1}, y > 0\}$ ($k = \overline{-2, 4}$); D_k^- – односвязная область при
 $y \leq 0$ ($k = \overline{-2, 4}$), ограниченная простой дугой Ляпунова $y = -\rho_k(x) \equiv$
 $-\sqrt{\alpha_1^k(x)(x_1 - \alpha_1^k(x))}$ ($k = 0, 1, 2$) и отрезком $[x_k, x_{k+1}]$ оси абсцисс; $J = J_1 \cup J_2$, где
 $J_k = \{(x, y) : x = x_k, y > 0\}$ ($k = 1, 2$).

Пусть $D_k = D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k$, где $I_k = \{(x, y) : x_k < x < x_{k+1}, y = 0\}$ ($k = \overline{-2, 4}$), то есть
 $D = D^+ \cup D^- \cup I = \bigcup_{k=0}^2 (D_k^+ \cup D_k^- \cup I_k) \cup J = \bigcup_{k=0}^{+\infty} D_k \cup J$.

Решение $u(x, y)$ уравнения (1) будем называть регулярным в области D , если
 $D_{oy}^{\alpha-1} u(x, \xi) \in C(\overline{D}^+)$, $u(x, y) \in C(\overline{D}^-)$,

$y^{1-\alpha} D_{oy}^\alpha u(x, \xi) \in C(D^+ \cup I)$, $u_{xx}(x, y) \in C(D \setminus (I \cup J))$, $u_{yy}(x, y) \in C(D^-)$.

Задача Т. В области D найти регулярное решение $u(x, y)$ уравнения (1), удовле-
 творяющее краевым условиям

$$u(x_0, y) = u(x_3, y) = 0, y \geq 0, \quad (2)$$

$$u(x, y)|_{y=-\rho_k(x)} = \varphi_k(x), x_k \leq x \leq x_{k+1} (k = 0, 1, 2), \quad (3)$$

$$u(x, y) = r(x, y), (x, y) \in \overline{D_{-2} \cup D_{-1}}, \quad (4)$$

$$u(x, y) = q(x, y), (x, y) \in \overline{D_3 \cup D_4}; \quad (5)$$

$$\text{условиям сопряжения } \lim_{y \rightarrow 0-} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0+} D_{oy}^{\alpha-1} u(x, \xi) = \omega(x), x_0 \leq x \leq x_3, \quad (6)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0-} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-\alpha} D_{oy}^\alpha u(x, \xi) = \nu(x), x_0 < x < x_3, x \neq x_1, x_2; \quad (7)$$

условиям согласования

$$\varphi_3(x_3) = \varphi_0(x_0) = 0, \varphi_k(x_{k+1}) = \varphi_{k+1}(x_{k+1}) (k = 0, 1), B(x_3) = C(x_0) = 0, \\ r(x_k, y) = 0 (k = -2, -1, 0), q(x_k, y) = 0 (k = 3, 4, 5), \quad (8)$$

где $A(x), B(x), C(x), \varphi_k(x)$ ($k = 0, 1, 2$), $r(x, y), q(x, y), \alpha_1(x), \alpha_2(x)$ – заданные непре-
 рывные достаточно гладкие функции. Положив

$$V(x, y) = A(x)u(\alpha_1(x), y) - B(x)u(\alpha_1^2(x), y) + C(x)u(\alpha_2^2(x), y), \quad (9)$$

приведем уравнение (1) к системе

$$\begin{cases} LV(x, y) \equiv V_{xx}(x, y) + H(-y)V_{yy}(x, y) - H(y)D_{oy}^\alpha V(x, \xi) - H(y-\tau)V(x, y-\tau) = 0, (x, y) \in D; \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} A(x)u(\alpha_1(x), y) - B(x)u(\alpha_1^2(x), y) + C(x)u(\alpha_2^2(x), y) = V(x, y), (x, y) \in D; \end{cases} \quad (11)$$

которую в терминах функций

$$V_k^\pm(x, y) = V(x, y), (x, y) \in D_k^\pm (k = 0, 1, 2), \quad (12)$$

$$u_k^\pm(x, y) = u(x, y), (x, y) \in D_k^\pm (k = 0, 1, 2), \quad (13)$$

с учетом (6), (7), (10), (11), можно записать в форме матричной системы

$$\begin{cases} L\bar{V}(x, y) \equiv \bar{V}_{xx}(x, y) + H(-y)\bar{V}_{yy}(x, y) - H(y)D_{0y}^\alpha \bar{V}(x, \xi) - H(y - \tau)\bar{V}(x, y - \tau) = 0, (x, y) \in D_0^\pm; \\ R(x)\bar{u}^\pm(x, y) - \bar{\Phi}(x, y) = \bar{V}(x, y), (x, y) \in D_0^\pm; \end{cases} \quad (15)$$

$$\text{где} \quad \bar{V}(x, y) = (V_0^\pm(x, y), V_1^\pm(\alpha_2(x), y), V_2^\pm(\alpha_2^2(x), y))^T, \quad (16)$$

$$\bar{u}^\pm(x, y) = (u_0^\pm(x, y), u_1^\pm(\alpha_2(x), y), u_2^\pm(\alpha_2^2(x), y))^T \quad (17)$$

$$R(x) = (\bar{R}_0(x), \bar{R}_1(x), \bar{R}_2(x))^T, \quad (18)$$

$$\bar{\Phi}(x, y) = (\Phi_0(x, y), \Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y))^T, \quad (19)$$

причем компоненты матрицы $R(x)$ из (18) и вектор-функции $\bar{\Phi}(x, y)$ из (19) имеют вид:

$$\bar{R}_0(x) = (0, 0, C(x)), \Phi_0(x, y) = B(x)r(\alpha_1^2(x), y) - A(x)r(\alpha_1(x), y),$$

$$\bar{R}_1(x) = (A(\alpha_2(x)), 0, 0), \Phi_1(x, y) = B(\alpha_2(x))r(\alpha_1(x), y) - C(\alpha_2(x))q(\alpha_2^3(x), y),$$

$$\bar{R}_2(x) = (-B(\alpha_2^2(x)), A(\alpha_2^2(x)), 0), \Phi_2(x, y) = -C(\alpha_2^2(x))q(\alpha_2^4(x), y).$$

Если определитель $|R(x)| \neq 0$, $x_0 \leq x \leq x_1$, то единственное решение задачи Т в области D в терминах функций (12), (13), (16), (17) может быть получено из (15) в форме

$$\bar{u}^\pm(x, y) = R^{-1}(x)(\bar{\Phi}(x, y) + \bar{V}(x, y)), (x, y) \in D_0^\pm,$$

где обратная матрица $R^{-1}(x) = (\bar{R}_0^{-1}(x), \bar{R}_1^{-1}(x), \bar{R}_2^{-1}(x))^T$ имеет компоненты

$$\bar{R}_0^{-1}(x) = |R(x)|^{-1} (0, C(x)A(\alpha_2^2(x)), 0), \bar{R}_1^{-1}(x) = |R(x)|^{-1} (0, C(x)B(\alpha_2^2(x)), C(x)A(\alpha_2(x))),$$

$$\bar{R}_2^{-1}(x) = |R(x)|^{-1} (A(\alpha_2(x))A(\alpha_2^2(x)), 0, 0) \text{ и } |R(x)| = C(x)A(\alpha_2(x))A(\alpha_2^2(x)), \text{ а для}$$

$\bar{V}(x, y)$, согласно (2)-(8) и равенства (9), должна быть решена

Задача T_V . Найти в области $D_0 = D_0^+ \cup D_0^- \cup I_0$ регулярное решение $\bar{V}(x, y)$ уравнения (14), удовлетворяющее краевым условиям

$$\bar{V}(x_0, y) = \bar{V}(x_1, y) = 0, y \geq 0, \quad (20)$$

$$\bar{V}(x, y) \Big|_{y=-\rho_0(x)} = R(x)\bar{\varphi}(x) - \bar{\Phi}(x, -\rho_0(x)), x_0 \leq x \leq x_1, \quad (21)$$

$$\text{условиям сопряжения } \lim_{y \rightarrow 0-} \bar{V}(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0+} D_{0y}^{\alpha-1} \bar{V}(x, \xi) = R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0), x_0 \leq x \leq x_1, \quad (22)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0-} \bar{V}_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-\alpha} D_{0y}^\alpha \bar{V}(x, \xi) = R(x)\bar{v}(x) - \bar{\Phi}_y(x, 0), x_0 < x < x_1, \quad (23)$$

условию согласования $\bar{V}(x_0, x_0) = 0$, где $\bar{\varphi}(x) = (\varphi_0(x), \varphi_1(\alpha_2(x)), \varphi_2(\alpha_2^2(x)))^T$ — заданная непрерывная достаточно гладкая вектор-функция, а $\bar{\omega}(x) = (\omega(x), \omega(\alpha_2(x), \omega(\alpha_2^2(x))))^T$, $\bar{v}(x) = (v(x), v(\alpha_2(x)), v(\alpha_2^2(x))))^T$ — вектор — функции подлежащие определению.

Теорема. Если $A(x), B(x), C(x), \alpha_1(x), \alpha_2(x) \in C[x_0, x_3] \cap C^2(x_0, x_3)$,

$$\varphi_k(x) \in C[x_k, x_{k+1}] \cap C^2(x_k, x_{k+1}) (k = 0, 1, 2); r(x, y) \in C(\overline{D_{-2} \cup D_{-1}}) \cap C^2(D_{-2} \cup D_{-1}),$$

$q(x, y) \in C(\overline{D_3 \cup D_4}) \cap C^2(D_3 \cup D_4)$, абсолютно интегрируемы на своих промежутках;
 $B(x_3) = C(x_0) = 0, \varphi_0(x_0) = \varphi_3(x_3) = 0, \varphi_k(x_{k+1}) = \varphi_{k+1}(x_{k+1}) (k = 0, 1);$

$r(x_k, y) = 0$ ($k = -2, -1, 0$), $q(x_k, y) = 0$ ($k = 3, 4, 5$), то имеется единственное решение задачи Т.

Доказательство. Единственность решения задачи Т для уравнения (1) в области D следует из того, что однородная задача Т имеет тривиальное решение $\bar{u}^\pm(x, y) \equiv 0$ в области $\bar{D}_0^\pm$ при условии, что однородная задача $T_{\bar{V}}$ имеет в области $\bar{D}_0^\pm$ тривиальное решение $\bar{V}(x, y) \equiv 0$. Доказательство основано на установлении знакоопределенности интеграла
$$\bar{\beta} = \int_{x_0}^{x_1} [R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0)] \cdot [R(x)\bar{v}(x) - \bar{\Phi}_y(x, 0)] dx.$$

Лемма 1. Если $\bar{\varphi}(x), \bar{\omega}(x) \in C[x_0, x_1] \cap C^2(x_0, x_1)$, $\bar{\omega}(x_0) = \bar{\omega}(x_1) = \bar{\varphi}(x_0) = \bar{\varphi}(x_1) = 0$, то существует единственное решение $\bar{V}^-(x, y) \in C(\bar{D}_0^-) \cap C^2(D_0^-)$ задачи Дирихле (14₁), (20), (21), (23) вида

$$\begin{aligned} \bar{V}^-(x, y) = & \sum_{m=0}^{+\infty} ((P_x^{2i\rho_0(x)})^m P_x^{-iy} - (P_x^{2i\rho_0(x)})^{m+1} P_x^{iy}) [R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0)] + \\ & + \sum_{m=0}^{+\infty} (P_x^{2i\rho_0(x)})^m (P_x^{i(\rho_0(x)+y)} - P_x^{i(\rho_0(x)-y)}) [R(x)\bar{\varphi}(x) - \bar{\Phi}(x, -\rho_0(x))]. \end{aligned} \quad (24)$$

Функциональное соотношение между $\bar{\omega}(x)$ и $\bar{v}(x)$, приведенное из D_0^- на линию изменения типа $I_0 = \{(x, y) : x_0 < x < x_1, y = 0\}$, получим из (24), учитывая (23):

$$\begin{aligned} (1 - P_x^{2i\rho_0(x)}) (R(x)\bar{v}(x) - \bar{\Phi}_y(x, 0)) = & i(1 + P_x^{2i\rho_0(x)}) \left(\frac{d}{dx} (R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0)) \right) - \\ & - 2iP_x^{i\rho_0(x)} \left(\frac{d}{dx} (R(x)\bar{\varphi}(x) - \bar{\Phi}(x, -\rho_0(x))) \right), \quad x_0 < x < x_1. \end{aligned} \quad (25)$$

Лемма 2. Если $\bar{\omega}(x) \in C^1[x_0, x_1] \cap C^2(x_0, x_1)$, $\bar{\omega}(x_0) = \bar{\omega}(x_1) = 0$, то существует единственное регулярное решение $\bar{V}^+(x, y)$ смешанной задачи (14₂), (20), (22) в области D_0^+

вида
$$\bar{V}^+(x, y) = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, \xi) [R(\xi)\bar{\omega}(\xi) - \bar{\Phi}(\xi, 0)] d\xi, \quad (26)$$

где $G(x, y, \xi) = \frac{2}{x_1} \sum_{n=1}^{\infty} S_n(y) \sin \lambda_n x \sin \lambda_n \xi$, $\lambda_n = n\pi / x_1$, а

$$S_n(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m H(y - m\tau)(y - m\tau)^{\alpha(m+1)-1} \mathcal{E}_{\alpha, \alpha(m+1)}^{m+1} (-\lambda_n^2 (y - m\tau)^2),$$

$$\mathcal{E}_{\alpha, \beta}^\rho(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\rho)_k t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta) k!} = \frac{1}{\Gamma(\rho)} H_{12}^{11} \left[-t \middle| \begin{matrix} (1-\rho, 1) \\ (0, 1), (1-\beta, \alpha) \end{matrix} \right] - \text{обобщенная функция типа Миттаг-}$$

Леффера [3, с.45, 67], $(\rho)_k$ - символ Похгаммера [4, с.24], $H_{p,q}^{m,n} \left[z \middle| \begin{matrix} (a_p, A_p) \\ (b_q, B_q) \end{matrix} \right]$ - функция Фокса [3, с.58]. **Функциональное соотношение** между $\bar{\omega}(x)$ и $\bar{v}(x)$, приведенное из D_0^+ на линию изменения типа $I_0 = \{(x, y) : x_0 < x < x_1, y = 0\}$:

$$\frac{d}{dx} (R(x)\bar{\omega}(x) - \bar{\Phi}(x, 0)) = \int_{x_0}^{x_1} M(x, \xi) [R(\xi)\bar{v}(\xi) - \bar{\Phi}_y(\xi, 0)] d\xi, \quad (27)$$

$$\text{где } M(x, \xi) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x_1} \begin{cases} \xi, & x \geq \xi, \\ \xi - x_1, & \xi \geq x. \end{cases}$$

Вопрос существования решения задачи $T_{\bar{v}}$ в области D_0 сводится к разрешимости системы функциональных соотношений (25), (27), то есть к разностному уравнению

$$\begin{aligned} (1 - P_x^{2i\rho_0(x)})(R(x)\bar{v}(x) - \bar{\Phi}_y(x, 0)) = i(1 + P_x^{2i\rho_0(x)}) \int_{x_0}^{x_1} M(x, \xi)[R(\xi)\bar{v}(\xi) - \bar{\Phi}_y(\xi, 0)]d\xi - \\ - 2iP_x^{i\rho_0(x)} \left(\frac{d}{dx} (R(x)\bar{\varphi}(x) - \bar{\Phi}(x, -\rho_0(x))) \right), \quad x_0 < x < x_1. \end{aligned}$$

Список литературы

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
2. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
3. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam-Tokyo: Elsevier, 2005.
4. Агранович М.С. Обобщенные функции. М.: МЦИМО, 2008.

BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A MIXED-COMPOSITION EQUATION WITH FRACTIONAL DERIVATIVE, FUNCTIONAL DELAY AND ADVANCE

A.N. Zarubin

Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor
matdiff@yandex.ru

Orel

E.V. Chaplygina

Cand. Sci. (Phys.-Math.), associate professor
lena260581@yandex.ru

Orel

Orel State University
named after I. S. Turgenev

Orel State University
named after I. S. Turgenev

Abstract. The Tricomi problem for a mixed-composite equation with fractional derivative, functional delay, and advance is investigated. The General solution of the equation is constructed. The uniqueness theorem is proved.

Keywords: equations of mixed-composite type, Tricomi problem, fractional integration operator, difference operator.

References

1. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. (1987) Integraly` i proizvodny`e drobnogo poriadka i nekotory`e ikh prilozheniia [Integrals and derivatives of a fractional order and some of their applications]. Minsk: Science and technology.
2. Gradstein I.S., Ryzhik I.M. (1971) Tablitsy` integralov, summ, riadov i proizvedenii` [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow: Science.
3. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. (2005) Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam-Tokyo: Elsevier.
4. Agranovich M.S. (2008) Obobshchenny`e funktsii [The generalized functions]. M.: MTsIMO.

УДК
519.862.6**МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЙ КРИТЕРИЙ
ДЕТЕРМИНАЦИИ–АВТОКОРРЕЛЯЦИИ
В РЕГРЕССИОННОМ АНАЛИЗЕ****Михаил Павлович Базилевский**
к.т.н., доцент
mik2178@yandex.ru
г. ИркутскИркутский государственный
университет путей сообщения

Аннотация. При построении регрессионной модели одной из главных проблем является выбор её структурной спецификации. Поскольку каждая регрессия может быть охарактеризована множеством различных критериев адекватности, то такая задача часто оказывается многокритериальной. Вопросами решения многокритериальных задач занимается теория принятия решений. Актуальной задачей теории принятия решений является построение свёртки локальных критериев. В работе предложены две формы двухкритериального мультипликативного критерия детерминации – автокорреляции, одновременно характеризующего точность регрессии и автокорреляцию в её остатках. Для демонстрации потенциала предложенных критериев решена задача моделирования грузооборота Красноярской железной дороги. При этом выбор спецификации регрессионной модели осуществлялся как по мультипликативным критериям детерминации – автокорреляции, так и по их аддитивному аналогу, а также по методу «идеальной» точки. Достоинством одного из предложенных критериев является возможность его интеграции в виде целевой функции в задачу отбора информативных регрессоров.

Ключевые слова: регрессионная модель, критерий детерминации, критерий Дарбина-Уотсона, мультипликативный критерий детерминации-автокорреляции, грузооборот, теория принятия решений.

В рамках регрессионного анализа разработана емкая система критериев оценки адекватности регрессионных моделей [5]. Наиболее распространенными из этих критериев являются: критерий детерминации, Фишера, Дарбина-Уотсона, смещения, согласованности поведения, Акаике, Шварца и др. Они позволяют оценивать самые различные качественные стороны модельного описания исследуемого объекта или процесса. С помощью критериев адекватности осуществляется выбор структурной спецификации регрессионной модели, под которой понимается связь между переменными в математической форме. При этом такой выбор можно проводить как по одному критерию адекватности, так и решать многокритериальную задачу. В последнем случае целесообразно реализовывать алгоритмическую схему «конкурса» регрессионных моделей [3, 4, 5]. В теории принятия решений актуальной задачей является построение свертки локальных критериев (глобального критерия). Зачастую такая свертка представляет собой линейную комбинацию локальных критериев с заданными коэффициентами, т.е. каждый из этих критериев входит в свёртку аддитивно. Целью данной работы является исследование мультипликативного критерия оценки адекватности регрессионных моделей, представляющего из себя произведение двух локальных критериев: критерия детерминации и Дарбина-Уотсона. Рассмотрим линейную регрессионную модель:

$$y_i = \alpha_0 + \sum_{j=1}^m \alpha_j x_{ij} + \varepsilon_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где n – объем выборки; m – количество независимых переменных; y_i и x_{ij} , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$ – известные значения зависимой и независимых переменных соответственно; α_i , $i = \overline{0, m}$ – подлежащие оцениванию параметры; ε_i , $i = \overline{1, n}$ – ошибки аппроксимации. Будем считать, что оценки параметров линейной регрессии (1) находятся с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Тогда её адекватность можно охарактеризовать с помощью критерия детерминации R^2 и Дарбина-Уотсона DW .

Критерий детерминации R^2 находится по формуле:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \quad (2)$$

где $\hat{y}_i$, $i = \overline{1, n}$ – вычисленные значения зависимой переменной y ; $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ – среднее значение y ; $e_i = y_i - \hat{y}_i$, $i = \overline{1, n}$ – остатки модели. Критерий детерминации R^2 показывает, какой процент значимых факторов учтен в уравнении регрессии. В силу своего определения имеет место включение $R^2 \in [0, 1]$. Если $R^2 = 0$, то это значит, что переменные x_j , $j = \overline{1, m}$, не улучшают качество предсказания y по сравнению с тривиальным предсказанием $\hat{y}_i = \bar{y}$. Если же $R^2 = 1$, то все остатки равны нулю. Чем ближе значение R^2 к 1, тем выше качество регрессии. Модели с коэффициентом детерминации выше 0.8 можно считать приемлемыми.

Дробь в выражении (2) будем называть обратным критерием детерминации:

$$\bar{R}^2 = 1 - R^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \quad (3)$$

область значений которого $\bar{R}^2 \in [0, 1]$, наилучшее значение равно 0, а наихудшее – 1.

Критерий Дарбина-Уотсона DW находится по формуле:

$$DW = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2}. \quad (4)$$

Критерий Дарбина-Уотсона указывает на наличие или отсутствие автокорреляции (положительной или отрицательной) остатков e_i . Критерий DW принимает значения на отрезке $[0, 4]$. Идеальное его значение, указывающее на полное отсутствие автокорреляции остатков, равно двум. Для того чтобы придать критерию Дарбина-Уотсона однородный по отношению к критерию $\bar{R}^2$ вид, преобразуем его следующим образом:

$$DW^* = \frac{1}{2} |2 - DW| = \frac{1}{2} \left| 2 - \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2} \right|. \quad (5)$$

Область значений критерия $DW^* \in [0,1]$, наилучшее значение равно 0, а наихудшее – 1. Отметим, что этот критерий уже не позволяет идентифицировать знак автокорреляции остатков. Используя формулы (3) и (5), рассмотрим аддитивный критерий детерминации – автокорреляции [1]:

$$DA_{add} = w_1 \overline{R^2} + w_2 DW^*, \quad (6)$$

где w_1 и w_2 – «веса» локальных критериев. Если приоритеты по локальным критериям $\overline{R^2}$ и DW^* отсутствуют, то $w_1 = w_2 = 0,5$. В этом случае область значений критерия $DA_{add} \in [0,1]$, наилучшее значение равно 0, а наихудшее – 1.

Введем мультипликативный критерий детерминации – автокорреляции:

$$DA_{mult} = \overline{R^2} \cdot DW^* = \frac{1}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \left| \sum_{i=1}^n e_i^2 - \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{2} \right|. \quad (7)$$

Область значений критерия $DA_{mult} \in [0,1]$, наилучшее значение равно 0, а наихудшее – 1. Можно ввести еще одну форму мультипликативного критерия детерминации – автокорреляции:

$$DA_{mult}^* = R^2 \cdot (1 - DW^*) = \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \right) \cdot \left(1 - \left| 1 - \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{2 \sum_{i=1}^n e_i^2} \right| \right). \quad (8)$$

Область значений критерия $DA_{mult}^* \in [0,1]$, наилучшее значение равно 1, а наихудшее – 0. Для демонстрации свойств предложенных критериев адекватности решалась задача моделирования грузооборота Красноярской железной дороги (КЖД). Для этого была использована статистическая информация из работы [2] за период с 2000 г. по 2015 г. по следующим показателям КЖД: y – грузооборот, млн. т. км; x_1 – прием порожних вагонов, штук; x_2 – динамическая нагрузка, т. км / км; x_3 – среднесуточный пробег локомотива, км; x_4 – эксплуатируемый парк локомотивов, штук; x_5 – техническая скорость локомотивов, км / час. По исходным статистическим данным были построены все возможные двухфакторные линейные регрессионные модели, общее количество которых равно 10. Для каждой регрессии определялись критерии R^2 , DW , DA_{add} , DA_{mult} и DW_{mult}^* . Результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты моделирования

Модель	Регрессоры	R^2	DW	DA_{add}	DA_{mult}	DW_{mult}^*
1	1, 2	0,8804	1,4155	0,2059	0,03495	0,6231
2	1, 3	0,8878	1,4520	0,1931	0,03074	0,6445
3	1, 4	0,9362	0,9252	0,3006	0,03429	0,4331
4	1, 5	0,8958	1,4887	0,1799	0,02664	0,6668
5	2, 3	0,8184	1,5674	0,1989	0,03928	0,6414
6	2, 4	0,8891	0,7796	0,3606	0,06767	0,3466
7	2, 5	0,8451	1,6528	0,1642	0,02689	0,6984
8	3, 4	0,9722	2,2773	0,0832	0,00385	0,8374
9	3, 5	0,6009	1,0204	0,4444	0,19548	0,3066
10	4, 5	0,9515	1,8027	0,0736	0,00478	0,8577

Используя данные таблицы 1, построенные регрессии были упорядочены по убыванию значений критерия детерминации R^2 : 8, 10, 3, 4, 6, 2, 1, 7, 5, 9. С использованием критерия DW регрессии были упорядочены по убыванию эффекта автокорреляции остатков: 10, 8, 7, 5, 4, 2, 1, 9, 3, 6. Таким образом, лучшей по критерию детерминации является модель:

$$\hat{y} = -68066,4 + 82,8528x_3 + 209,510x_4,$$

а по критерию Дарбина-Уотсона модель:

$$\hat{y} = -245720 + 177,487x_4 + 4904,57x_5.$$

Затем осуществлялось упорядочивание регрессий одновременно по двум критериям: детерминации и Дарбина-Уотсона. Для этого применялся метод «идеальной» точки. Сначала значения критериев R^2 и DW нормировались по правилу:

$$\tilde{K}_i = \frac{K_i - \min(K)}{\max(K) - \min(K)}, \quad i = \overline{1, n}.$$

После чего построенные регрессии были упорядочены по убыванию суммы значений нормированных критериев R^2 и DW : 10, 8, 7, 4, 2, 1, 5, 3, 6, 9. И, наконец, построенные регрессии были упорядочены по возрастанию предложенных критериев детерминации – автокорреляции. По критерию DA_{add} : 10, 8, 7, 4, 2, 5, 1, 3, 6, 9; по критерию DA_{mult} : 8, 10, 4, 7, 2, 3, 1, 5, 6, 9. По убыванию критерия DW_{mult}^* регрессии упорядочены следующим образом: 10, 8, 7, 4, 2, 5, 1, 3, 6, 9. Таким образом, по критериям DA_{add} и DW_{mult}^* регрессии упорядочены абсолютно одинаково. По методу «идеальной» точки получен практически такой же результат, с единственным отличием в том, что модель 1 оказалась лучше регрессии 5. А вот порядок регрессий по критерию DA_{mult} оказался наиболее отличным от альтернативных вариантов. Полученные результаты демонстрируют сходство предложенных критериев адекватности, но всё же при решении конкретных задач спецификации каждый из этих критериев может приводить к построению разных регрессионных моделей. На наш взгляд, на практике стоит отдавать предпочтение мультипликативному критерию детерминации – автокорреляции DA_{mult} , достоинствами которого является компактность его аналитического выражения и возможность интеграции его в виде целевой функции в задачу отбора информативных регрессоров [5].

Список литературы

1. Базилевский М.П. (2017) Оценивание параметров регрессионных моделей со стохастическими переменными по критерию детерминации-автокорреляции // Транспортная инфраструктура Сибирского региона. Иркутск. Т.1. С.382-386.
2. Базилевский М.П., Врублевский И.П., Носков С.И., Яковчук И.С. (2016) Среднесрочное прогнозирование эксплуатационных показателей функционирования Красноярской железной дороги // Фундаментальные исследования. Москва. №10(3). С.471-476.
3. Базилевский М.П., Носков С.И. Методические и инструментальные средства построения некоторых типов регрессионных моделей // Системы. Методы. Технологии. Братск, 2012. №1 (13). С.80-87.
4. Базилевский М.П., Носков С.И. (2009) Технология организации конкурса регрессионных моделей // Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем. Иркутск. Вып. 7. С. 77-84.

5. Носков С.И. (1996) Технология моделирования объектов с нестабильным функционированием и неопределенностью в данных. Иркутск: РИЦ ГП «Облформпечать». 321 с.

MULTIPLICATIVE CRITERION OF DETERMINATION-AUTOCORRELATION IN REGRESSION ANALYSIS

M.P. Bazilevskiy

Cand. Sci. (Eng.), associate professor

mik2178@yandex.ru

Irkutsk

Irkutsk State Transport University

(Irkutsk, Russia)

Summary. When constructing a regression model, one of the main problems is the choice of its structural specification. Since each regression can be characterized by a variety of different adequacy criteria, such a task often turns out to be multi-criteria. The problems of solving multicriteria problems are solved by decision theory. The actual problem of the theory of decision-making is the construction of the convolution of local criteria. In article two forms of a two-criteria multiplicative criterion for determination - autocorrelation, simultaneously characterizing the accuracy of regression and autocorrelation in its residues, is proposed. To demonstrate the potential of the proposed criteria, the task of modeling the freight turnover of the Krasnoyarsk Railway is solved. At the same time, the choice of the regression model specification was carried out both by the multiplicative determination criteria - autocorrelation, and by their additive counterpart, and also by the method of the «ideal» point. The advantage of one of the proposed criteria is the possibility of its integration as an objective function in the task of «subset selection in regression».

Keywords: regression model, determination criterion, Darbin-Watson criterion, multiplicative criterion of determination-autocorrelation, freight turnover, decision theory.

References

1. Bazilevskii` M.P. (2017) Ocenivanie parametrov regressionny`kh modelei` so stohasticheskimi peremennymi po kriteriiu determinatsii-avtokorreliatsii [Estimation of parameters of regression model with stochastic variables parameter determination-autocorrelation] Transport infrastructure of Siberian region. Irkutsk. T. 1, pp. 382-386.
2. Bazilevskii` M.P., Vrublevskii` I.P., Noskov S.I., Iakovchuk I.S. (2016) Srednesrochnoe prognozirovaniye ekspluatatsionny`kh pokazatelei` funktsionirovaniia Krasnoyarskoi` zheleznoi` dorogi [Medium-term forecasting of operational performance of the Krasnoyarsk railway] Basic research. Moscow. №10, pp. 471-476.
3. Bazilevskii` M.P., Noskov S.I. (2012) Metodicheskie i instrumental`ny`e sredstva postroeniia nekotory`kh tipov regressionny`kh modelei` [Methodological and instrumental means to build certain types of regression models] The system. Methods. Technology. Bratsk. №1, pp. 80-87.
4. Bazilevskii` M.P., Noskov S.I. (2009) Tekhnologiya organizatsii konkursa regressionny`kh modelei` [Technology competition regression models] Information technologies and problems of mathematical modeling of complex systems. Irkutsk. №7, pp. 77-84.
5. Noskov S.I. (1996) Tekhnologiya modelirovaniia ob`ektov s nestabil`ny`m funktsionirovaniem i neopredelennost`iu v danny`kh. [Technology modeling objects with unstable functioning of and uncertainty in the data.] Irkutsk: RITC GP «Oblinformpechat`, 1996. 321 p.

УДК 511.14 | О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ РАЦИОНАЛЬНОСТИ СУММ СЛОЖНЫХ КУБИЧЕСКИХ РАДИКАЛОВ

Николай Николаевич Волотов

к.ф.-м.н., доцент
volotovnn132@yandex.ru
г. Липецк

Липецкий государственный
педагогический университет
имени П.П. Семенова-Тян-Шанского

Аннотация. В работе символами $N, Z, Q, Q^+, Q^-, J, R, R^+$ обозначены множества натуральных, целых, рациональных, рациональных положительных, рациональных отрицательных, иррациональных, всех вещественных и положительных вещественных чисел, соответственно. Суммы сложных кубических радикалов, т.е. числа вида

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}} \left(a \in R \setminus \{0\}, b \in R^+ : \sqrt{b}, \sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}} \in J \right), (*)$$

появляются [Курош, 2004: 234-239] при решении кубических уравнений методом Кардано: уравнение $x^3 + 3px + 2q = 0$ ($p, q \in R$) в случае, когда число $D = q^2 + p^3 \in R^+$, имеет два сопряженных комплексных корня и один вещественный корень, определяемый формулой Кардано через его коэффициенты при помощи квадрат-

ных и кубических радикалов:
$$x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}. \quad (1)$$

Под рационализацией алгебраических выражений понимается приведение их к выражениям, содержащим меньшее число алгебраических операций, которые следует произвести над входящими в них величинами для нахождения их значений. Задачи на рационализацию сумм сложных кубических радикалов при отдельных значениях параметров a и b не новы, но при этом отсутствуют алгоритмы нахождения таких a и b , при которых числа вида (*) допускают рационализацию. В частности, в работах [2]-[5], [7-11] приведены доказательства равенств сумм (*) для упорядоченных пар чисел $(a; b)$: $(2; 5), (7; 50), (9; 80), (20; 392), (45; 1682), (54; 2700), \left(6; \frac{847}{27}\right)$

числам 1, 2, 3, 4, $2\sqrt{2}$, 6, 3, соответственно. Они проводятся по следующему алгоритму (А): каждое число вида (*) обозначается через x ; возведением в куб полученного равенства-уравнения находится равносильное ему на множестве вещественных чисел приведённое кубическое уравнение с рациональными коэффициентами; по коэффициентам этого уравнения с помощью метода Горнера или непосредственной подстановкой, используя известные утверждения, находят один его рациональный корень; доказывается, что два других его корня — комплексные числа. Из всего этого следует, что исходное число вида (*) равно найденному вещественному корню кубического уравнения, полученного на втором шаге. В данной работе приведены: две теоремы о достаточных условиях рациональности чисел вида $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}}$ ($a \in Q \setminus \{0\}, b \in Q^+ : \sqrt{b}, \sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}} \in J$) алгоритмы и примеры нахождения при известных значениях a таких значений параметра b , при которых указанные числа рациональны.

Ключевые слова: сложные кубические радикалы; кубические и иррациональные уравнения; формула Кардано; алгоритмы рационализации.

Постановка задачи и её решение. Как найти такие значения параметров a и b , чтобы числа вида (*) были рациональными?

I. В работе [1], решая задачу "При каких рациональных значениях a и b , таких, что $\sqrt{b}, \sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}} \in J$, будет рациональным число $(*)$?", мы, обозначая выражение $(*)$ через x , после возведения в куб равенства $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}} = x$ (2)

и соответствующих преобразований, получили равносильное ему на множестве R приведённое кубическое уравнение $x^3 - 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 - b} \cdot x - 2a = 0$, (3)

имеющее [Курош: 2004, 236]) один вещественный корень $x_1 = \sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}}$ и два сопряжённых комплексных корня, так как для него число

$$D = (-a)^2 + (-\sqrt[3]{a^2 - b})^3 = a^2 - a^2 + b = b \text{ и при этом } b > 0. \quad (4)$$

В результате всего этого получили:

- теорему о достаточных условиях рациональности чисел $(*)$; - замечание;

- алгоритм нахождения таких значений параметра $b \in Q^+$: $\sqrt{b}, \sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}} \in J$, при фиксированном $a \in Q \setminus \{0\}$, при которых числа $(*)$ будут суммами сложных кубических радикалов, равными рациональным числам; - примеры применения этого алгоритма.

Приведём их здесь для справки и доказательства других результатов.

Теорема 1 (о достаточных условиях рациональности чисел вида $(*)$): *число $(*)$ существует и рационально при выполнении одного из следующих комплексов условий:*

- 1) $b = 0$ и $a = l^3$, где $l \in Q$; 2) $a \in Q \setminus \{0\}$ и $b \in Q^+$, такие, что $\sqrt{b}, \sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}} \in J$ и $a^2 - b = \left(\frac{m}{n}\right)^3$, где $m \in Z \setminus \{0\}$, $n \in N$: $(m, n) = 1$.

Кроме того, при выполнении условий 1) число $(*)$ равно $2l$, а при выполнении условий 2), когда $a = \frac{m_a}{n_a}$: $m_a \in Z \setminus \{0\}$, $n_a \in N$, $(m_a, n_a) = 1$, справедливы два равенства:

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}} = r_0, \quad (5)$$

где r_0 – то число из множества $K = \left\{r = \frac{p}{q} : p \in P, q \in L\right\}$, при котором $n_a n r_0^3 - 3 n_a m r_0 - 2 m_a n = 0$ (здесь P – множество целых делителей числа $(-2 m_a n)$,

L – множество натуральных делителей числа $n_a n$);

$$\sqrt[3]{(a^2 + b) + 2a\sqrt{b}} + \sqrt[3]{(a^2 + b) - 2a\sqrt{b}} = r \left(r = r_0^2 - 2\sqrt[3]{a^2 - b} \in Q \setminus \{0\} \right). \quad (6)$$

Замечание 1. Нетрудно видеть, что:

если $a \in Q^+$, то число $r_0 \in K_1 = K \cap Q^+$; если $a \in Q^-$, то $r_0 \in K_2 = K \cap Q^-$.

1-й алгоритм. При фиксированном значении $a \in Q \setminus \{0\}$ и некотором $l \in Q$ из уравнения $a^2 - b = l^3$ можно найти такое значение $b \in Q^+$: $\sqrt{b}, \sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}} \in J$, при котором будут рациональными второй коэффициент уравнения (3), равносильного на множестве R уравнению (2), и число $(*)$. Для этого следует:

- 1) записать кубическое уравнение (3) с неизвестным пока b ;
- 2) для каждого значения $l \in Q$, такого, при котором линейное относительно b уравнение $a^2 - b = l^3$ имеет корень $b \in Q^+$, иначе говоря, для $l \in Q$: $l^3 < a^2$, – найти это значение b ;

3) для каждой упорядоченной пары чисел $(a; b)$: $b = a^2 - l^3 \in Q^+$ записать уравнение (3'): $x^3 - 3 \cdot l \cdot x - 2a = 0$ и множества P, L, K_1 или K_2 ; так как для этого уравнения число $D = a^2 - l^3 = b > 0$, то оно имеет единственный вещественный корень;

4) если этот корень – рациональное число: $x = r_0$, то $r_0 \in K_1$ при $a > 0$ (или $r_0 \in K_2$ при $a < 0$) и при этом справедливо равенство $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}} = r_0$.

Искомое число $r_0 = x(a, b)$ можно найти непосредственной подстановкой в уравнение (3') значений из множества K_1 или K_2 .

С помощью этого алгоритма для следующих пар чисел $(a; l)$:

$$\left(5; -\frac{1}{3}\right), (5; -3), \left(6; -\frac{2}{3}\right), \left(6; -\frac{11}{3}\right), \left(7; -\frac{13}{3}\right), (8; -5), \\ (9; 1), \left(9; -\frac{17}{3}\right), \left(9; -\frac{5}{3}\right), (10; -2), \left(10; -\frac{19}{3}\right), (54; 6), \left(10; \frac{7}{9}\right)$$

найжены все возможные соответствующие положительные значения $b = a^2 - l^3$:

$$\frac{676}{27}, 52, \frac{980}{27}, \frac{2303}{27}, \frac{3520}{27}, \frac{6103}{27}, 80, \frac{7100}{27}, \frac{2312}{27}, 108, \frac{9559}{27}, 2700, \frac{72557}{27^2},$$

такие, что для упорядоченных пар чисел $(a; b)$:

$$\left(5; \frac{676}{27}\right), (5; 52), \left(6; \frac{980}{27}\right), \left(6; \frac{2303}{27}\right), \left(7; \frac{3520}{27}\right), \left(8; \frac{6103}{27}\right), \\ (9; 80), \left(9; \frac{7100}{27}\right), \left(9; \frac{2312}{27}\right), (10; 108), \left(10; \frac{9559}{27}\right), (54; 2700), \left(10; \frac{72557}{27^2}\right)$$

числа вида (*) будут суммами сложных кубических радикалов, при этом они рациональны и равны натуральным числам: 2, 1, 2, 1, 1, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 6, 3, соответственно.

II. Приведём новые, следующие из теоремы 1, теорему и алгоритм нахождения такого значения параметра $b = b(a, x_0) \in Q^+$: $\sqrt[3]{b}, \sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}} \in J$, при заданных рациональных значениях a, x_0 ($ax_0 \neq 0$), при котором число вида (*) будет суммой сложных кубических радикалов, равной этому числу x_0 .

При данных $a, x_0 \in Q \setminus \{0\}$ из (3), как из уравнения относительно b , найдём его значение:

$$x_0^3 - 3\sqrt[3]{a^2 - b} \cdot x_0 - 2a = 0 \Leftrightarrow a^2 - b = \left(\frac{x_0^3 - 2a}{3x_0}\right)^3 \Leftrightarrow b = a^2 - \left(\frac{x_0^3 - 2a}{3x_0}\right)^3. (7)$$

Нетрудно увидеть, что число $b \equiv b(a, x_0)$, определяемое по формуле (7), рациональное. Оно будет положительным тогда и только тогда, когда

$$a^2 > \left(\frac{x_0^3 - 2a}{3x_0}\right)^3; (8)$$

$$\text{при этом: } 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 - b} = 3 \cdot \sqrt[3]{a^2 - a^2 + \left(\frac{x_0^3 - 2a}{3x_0}\right)^3} = \frac{x_0^3 - 2a}{x_0} = x_0^2 - \frac{2a}{x_0} (9)$$

$$\text{и уравнение (3) принимает вид: } x^3 - \left(x_0^2 - \frac{2a}{x_0}\right) \cdot x - 2a = 0. (3'')$$

Это уравнение с рациональными коэффициентами может быть сведено к уравнению с целыми коэффициентами. При выполнении неравенства (8) для него будет положительным число D , определяемое формулой (4).

Значит, в силу теоремы 1, справедлива **Теорема 2:** *если рациональные числа a и x_0 ($a \cdot x_0 \neq 0$) удовлетворяют неравенству (8), то:*

- 1) *определяемое формулой (7) число $b(a, x_0)$ – рациональное и положительное;*
- 2) *уравнения (2), (3) и (3'') равносильны на множестве R , при этом коэффициенты уравнения (3'') рациональны и оно имеет единственный вещественный корень x_0 ;*
- 3) *справедливы равенства*

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{b(a, x_0)}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b(a, x_0)}} = x_0, (7')$$

$$\sqrt[3]{(a^2 + b) + 2a\sqrt{b}} + \sqrt[3]{(a^2 + b) - 2a\sqrt{b}} = r \left(r = x_0^2 - 2\sqrt[3]{a^2 - b} \in Q\right). (10)$$

Замечание 2. Нетрудно убедиться в том, что для чисел a и x_0 , удовлетворяющих условиям теоремы 2, уравнение (3'') можно привести к такому уравнению с целыми коэффициентами, что x_0 – одно из чисел множества K (см. теорему 1), найденного для этого уравнения. Теперь становится очевидным следующий **2-й алгоритм**: – алгоритм нахождения, при заданных рациональных значениях a, x_0 ($ax_0 \neq 0$), такого значения параметра $b = b(a, x_0) \in Q^+$: $\sqrt{b}, \sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}} \in J$, что число вида (*) – сумма сложных кубических радикалов, и при этом оно будет равно ранее взятому рациональному числу x_0 :

- 1) возьмём рациональные числа a и x_0 ($ax_0 \neq 0$), удовлетворяющие неравенству (8);
- 2) по формуле (7) найдём рациональное и положительное число $b = b(a, x_0)$;
- 3) запишем справедливое равенство $\sqrt[3]{a + \sqrt{b(a, x_0)}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b(a, x_0)}} = x_0$.

III. Применение 2-го алгоритма к решению соответствующих задач. Задача 1.

При $a = 2015$ найдём такие значения параметра $b \in Q^+$: $\sqrt{b}, \sqrt[3]{2015 \pm \sqrt{b}} \in J$, чтобы при каждом из них число (*) было бы суммой сложных кубических радикалов и рациональным.

Решение. Уравнение (3) имеет вид: $x^3 - 3 \cdot \sqrt[3]{2015^2 - b} \cdot x - 4030 = 0$. Если $b \in Q^+$ и число $3\sqrt[3]{2015^2 - b}$ – целое, то его рациональный корень содержится в множестве K_1 натуральных чисел – делителей числа $4030 = 1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 31$:

$$K_1 = \{1, 2, 5, 10, 13, 26, 31, 62, 65, 130, 155, 310, 403, 806, 2015, 4030\}.$$

Рассуждая в соответствии с 2-м алгоритмом, найдём, что задача имеет решения лишь при значениях $x \in \{1, 2, 5, 10, 13\} \subset K_1$. Действительно, при $x = 1$ имеем: $b(2015, 1) = 2015^2 + 1343^3 = 2426360832 > 0$ (см. (7)); $3 \cdot \sqrt[3]{a^2 - b} = 1^2 - \frac{4030}{1} = -4029$ (см. (9)); $x^3 + 4029x - 4030 = 0$ – уравнение (3''), $x = 1$ – единственный вещественный корень; и потому $\sqrt[3]{2015 + \sqrt{2426360832}} + \sqrt[3]{2015 - \sqrt{2426360832}} = 1$;

при $x = 2$ имеем: $b(2015, 2) = 2015^2 + \left(\frac{2^3 - 4030}{6}\right)^3 = 2015^2 + \frac{2011^3}{27} = \frac{8242353406}{27} > 0$; $3\sqrt[3]{a^2 - b} = 2^2 - \frac{4030}{2} = -2011$; $x^3 + 2011x - 4030 = 0$ – уравнение (3''), $x = 2$ – его единственный вещественный корень; потому $\sqrt[3]{2015 + \sqrt{\frac{8242353406}{27}}} +$

$$\sqrt[3]{2015 - \sqrt{\frac{8242353406}{27}}} = 2$$
; при $x = 5$ имеем: $b(2015, 5) = 2015^2 + \left(\frac{5^3 - 4030}{15}\right)^3 =$

$2015^2 + \frac{781^3}{27} = \frac{585224616}{27} > 0$; $3\sqrt[3]{a^2 - b} = 5^2 - \frac{4030}{5} = -781$; $x^3 + 781x - 4030 = 0$ – уравнение (3''), $x = 5$ – его единственный вещественный корень; и потому

$$\sqrt[3]{2015 + \sqrt{\frac{585224616}{27}}} + \sqrt[3]{2015 - \sqrt{\frac{585224616}{27}}} = 5$$
;

при $x = 10$ имеем: $b(2015, 10) = 2015^2 + \left(\frac{10^3 - 4030}{30}\right)^3 = 2015^2 + 101^3 = 5090526 > 0$; $3\sqrt[3]{a^2 - b} = 10^2 - \frac{4030}{10} = -303$; $x^3 + 303x - 4030 = 0$ – уравнение (3''), $x = 10$ – его единственный вещественный корень; и потому $\sqrt[3]{2015 + \sqrt{5090526}} +$

$\sqrt[3]{2015 - \sqrt{5090526}} = 10$; при $x = 13$ имеем: $b(2015,13) = 2015^2 + \left(\frac{13^3 - 4030}{3 \cdot 13}\right)^3 = 13^2 + 47^3 = 4164048 > 0$; $3\sqrt[3]{a^2 - b} = 13^2 - \frac{4030}{13} = -141$;

$x^3 + 141x - 4030 = 0$ – уравнение (3''), $x = 13$ – его единственный вещественный корень; и потому $\sqrt[3]{2015 + \sqrt{4164048}} + \sqrt[3]{2015 - \sqrt{4164048}} = 13$.

При всех других значениях $x \in K_1$, т.е. при $x \in K_1 \setminus \{1, 2, 5, 10, 13\}$, задача не имеет решений на множестве R , так как соответствующие им числа $b(2015, x)$ отрицательны (и, кроме того, они убывают на множестве $K_1 \setminus \{1, 2, 5, 10, 13\}$):

$$b(2015,26) = 2015^2 + \left(\frac{26^3 - 4030}{3 \cdot 26}\right)^3 = 2015^2 - \frac{521^3}{27} = -\frac{31794686}{27} < 0;$$

$$b(2015,31) = 2015^2 + \left(\frac{31^3 - 4030}{3 \cdot 31}\right)^3 = 2015^2 - 277^3 = -17193708 < 0;$$

$$b(2015,62) = 2015^2 + \left(\frac{62^3 - 4030}{3 \cdot 62}\right)^3 = 2015^2 - \left(1259\frac{2}{3}\right)^3 = \dots < 0; \dots;$$

$$0 > b(2015,26) > b(2015,31) > b(2015,62) > \dots > b(2015,4030).$$

С помощью этого алгоритма при значениях a , равных 3, 2014, 2016 и 2017, нами найдены по формуле (7) все возможные соответствующие положительные значения b , такие, что для упорядоченных пар чисел $(a; b)$:

$$\begin{aligned} &\left(3; \frac{368}{27}\right), \left(3; \frac{242}{27}\right), \left(2014; \frac{6639994060}{27}\right), (2014; 304819196), \left(2014; \frac{1802759563}{27}\right), \\ &\left(2016; \frac{65609296703}{27}\right), \left(2016; \frac{8254600640}{27}\right), (2016; 92185381), \left(2016; \frac{1085926400640}{27}\right), \\ &(2016; 13592384), \left(2016; \frac{256098095}{27}\right), \left(2016; \frac{194918912}{27}\right), \left(2016; \frac{1591657752}{27}\right), \\ &(2016; 4326400), \left(2016; \frac{110513600}{27}\right), \left(2016; \frac{109734848}{27}\right), \left(2016; \frac{108734912}{27}\right), \\ &(2016; 3492469), (2016; 158800), \left(2017; \frac{16183694036}{3}\right), (2017; 327119400) \end{aligned}$$

числа вида (*) – сложные кубические радикалы; при этом они рациональны и равны натуральным числам: 1, 2, 1, 2, 4, 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 16, 18, 21, 24, 1, 2, соответственно. По формулам (6) и (10) из приведённых в работе примеров можно получить новые примеры рационализации сумм сложных кубических радикалов.

В заключение заметим, что с помощью этих алгоритмов, а особенно второго, учитель математики может достаточно легко подготовить соответствующий дидактический материал для работы с одарёнными детьми и с учащимися классов естественно-математических профилей, для организации и проведения олимпиад. При этом, в качестве методического указания, рекомендуем сообщать учащимся, что доказательство равенств сумм сложных кубических радикалов для значений упорядоченных пар чисел $(a; b)$ соответствующим рациональным числам, найденных учителем с помощью 1-го или 2-го алгоритмов, можно и следует проводить в соответствии с указанным в резюме алгоритмом (А), применяя при этом в его втором шаге формулу «куба суммы» в форме: $(c + d)^3 = c^3 + d^3 + 3cd(c + d)$.

Список литературы

1. Волотов Н.Н. (2016) Технологии упрощения сумм сложных кубических радикалов / Н.Н. Волотов // Материалы областной научной конференции молодых учёных "Актуальные

- проблемы естественных наук и их преподавания": Липецк, 20-21 октября 2016 г. Липецк: ЛГПУ имени П.П. Семенова-Тян-Шанского. С. 45-54.
2. Дворянинов С.В. (2014) О решении уравнений вида $\sqrt[3]{a(x)} + \sqrt[3]{b(x)} = \sqrt[3]{c(x)}$ /С.В. Дворянинов // Математика в школе. №4. С. 14-17.
 3. Егерев В.К. (2013) Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во вузы: учебное пособие / В.К. Егерев, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемский и др.; под ред. М.И. Сканави. 6-е изд. М.: ООО "Издательство "Мир и Образование": ООО "Издательство "ОНИКС – ЛИТ". 608 с.: илл.
 4. Ивлев Б.М., Абрамов А.М., Дудницин Ю.П., Шварцбурд С.И. (1990) Задачи повышенной трудности: учебное пособие для 10-11 кл. средней школы. М.: Просвещение. 48 с.
 5. Купцов Л.П., Резниченко С.В., Терёшин Д.А. (1996) Российские математические олимпиады школьников: Книга для учащихся / под ред. чл.-корр. РАО Г.Н. Яковлева. Ростов-на-Дону: Феникс. 640 с.
 6. Курош А.Г. (2004) Курс высшей алгебры. СПб: Лань. 13-е изд.. 432 с.
 7. Кушечко В.С. (1966) Сборник конкурсных задач по математике. Л.: Судостроение. 3-е изд., стереотип. 591 с.
 8. Лидский В.Б., Овсянников Л.В., Тулайков А.И., Шабунин М.И. (1962) Задачи по элементарной математике. М.: Физматлит. 416 с.
 9. Сивашинский И.Х. (1968) Задачи по математике для внеклассных занятий. М.: Просвещение. 312 с.
 10. Цыпкин А.Г., Пинский А.И. (1989) Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит. 576 с.
 11. Шабунин М.И. (2006) Математика для поступающих в вузы: пособие / М.И. Шабунин. М.: Бином. 443 с.

ON SUFFICIENT CONDITIONS OF THE RATIONALIZATION OF THE SUM OF COMPLEX CUBIC RADICALS

N.N. Volotov

Cand. Sci. (Phys.–Math.), associate professor
volotovnn132@yandex.ru

Lipetsk

Lipetsk State Pedagogical

P. Semenov-Tyan-Shansky University

Summary. In this paper, the sets N, Z, Q, Q^+, Q^-, J, R and R^+ denote natural, integer, rational, rational positive, rational negative, irrational, all real and positive real numbers, respectively. The sums of complex cubic radicals, i.e. numbers of the form

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}} \left(a \in R \setminus \{0\}, b \in R^+ : \sqrt{b}, \sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}} \in J \right), (*)$$

appear [Kurosh, 2004: 234-239] when solving cubic equations by Cardano's method: the equation $x^3 + 3px + 2q = 0$ ($p, q \in R$) in the case when the number $D = q^2 + p^3 \in R^+$, has two conjugate complex roots and one real root, defined by the Cardano formula in terms of its coefficients by means of square and cubic radicals:

$$x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}. \quad (1)$$

The rationalization of algebraic expressions is understood as reducing them to expressions containing a smaller number of algebraic operations that must be performed on the entering into them to find their values quantities. The problems of rationalizing the sums of complex cubic radicals for individual values of parameters a and b are not new, but there are no algorithms for finding a and b for which numbers of the form $(*)$ allow rationalization. In particular, are given in [1] - [3], [5-10] the proofs of the equalities of the sums $(*)$

for ordered pairs of numbers (a; b): (2; 5), (7; 50), (9; 80), (20; 392), (45, 1682), (54; 2700), (6; 847/27) to the numbers 1, 2, 3, 4, $2\sqrt{2}$, 6, 3, respectively. They are carried out according to the following algorithm (A): every number of the form (*) is denoted by x; the cube equation with rational coefficients equivalent to it on the set of real numbers is placed in the cube of the resulting equality-equation; on the coefficient s of this equation, using Horner's method or by direct substitution, using known statements, one finds its rational root; it is proved that its other two roots are complex numbers. From all this it follows that the initial number of the form (*) is equal to the found real root of the cubic equation obtained at the second step. In this paper we give: two theorems on sufficient conditions for the rationalization of numbers $\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{b}}$ ($a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{Q}^+ : \sqrt{b}, \sqrt[3]{a \pm \sqrt{b}} \in \mathbb{J}$); algorithms and examples of finding for known values of a, those values of the parameter b for which these numbers are rational.

Keywords: complex cubic radicals; cubic and irrational equations; Cardano's formula; rationalization algorithms.

References

1. Dvoryaninov S.V. (2014) O reshenii uravnenii' vida $\sqrt[3]{a(x)} + \sqrt[3]{b(x)} = \sqrt[3]{c(x)}$ [On the solution of equations of the form $\sqrt[3]{a(x)} + \sqrt[3]{b(x)} = \sqrt[3]{c(x)}$] S.V. Dvoryaninov // Matematika v shkole. №4. P. 14-17.
2. Egerev V.K. (2013) Sbornik konkursny'h zadach po matematike dlya postupayuscih vo vtusy': uchebnoe posobie [Collection of competitive tasks in mathematics technical schools applicants: a course book] / pod. red. M.I. Scanawi. 6-eizd. M.: OOO Mir i Obrazovanie: OOO ONYX-LIT. 608 p.: ill.
3. Ivlev B.M. (1996) Zadachi povy'shennoi' trudnosti: uchebnoe posobie dlya 10-11 kl. srednei' shkoly' [Tasks of increased difficulty: a course book for high school students] B.M. Ivlev, A.M. Abramov, Yu.P. Dudnitsin, S.I. Schwarzbourd. - Moskva: Obrazovanie. 48 p.: ill.
4. Kuptsov L.P. (1996) Rossii'skie matematicheskie olimpiady' shkolnikov: kniga dlya uchashih'sya [Russian Mathematical Olympiads for Schoolchildren: A Book for Students] / L.P. Kuptsov, S.V. Reznichenko, D.A. Teryoshin; pod red. chl.-corr. RAO G.N. Yakovleva. Rostov-na-Donu: Fenix. 640 p.
5. Kurosh A.G. (2004) Kurs vy'sshei' algebry' [The course of higher algebra]/ A.G. Kurosh. - Sanct. Peterburg: Lan. 13-e izd. 432 p.
6. Kuschenko V.S. (1996) Sbornik konkursny'h zadach po matematike [Compilation of competitive tasks in mathematics]. L.: Sudostroenie. 3-e izd. 591 p.
7. Lidsky V.B., Ovsyannikov L.V., Tulajkov A.I., Shabunin M.I. (1962) Zadachi po elementarnoi' matematike [Problems in elementary mathematics]. M.: Fizmatlit. 416 p.
8. Shabunin M.I. (2006) Matematika dlya postupyayushih v vuzy': posobie [Mathematics for students entering universities: course book]. Moskva: Binom, 2006. 443 p.
9. Sivashinsky' I.Kh. (1968) Zadachi po matematike dlya vneklassny'h zanyatii' [Problems in mathematics for extracurricular activities] M.: Prosvesshenie, 1968. 312 p.
10. Tsy'pkin A.G. Pinsky A.I. (1989) Spravochnik po metodam resheniya zadach po matematike dlya srednei' shkoly' [Handbook on methods of solving problems in mathematics for secondary school]. 2-e izd. M.: Nauka. 576 p.
11. Volotov N.N. (2016) Tehnologiya uproscheniya sum slozhny'h kubicheskikh radikalov [Technologies for Simplifying the Sum of Complex Cubic Radicals/ N.N. Volotov // Materials of the regional scientific conference of young scientists "Current problems of natural sciences and their teaching": Lipetsk, October 20-21, 2016] Materialy' oblastnoi' nauchnoi' konferentsii molody'h uchenny'h "Aktualny'e problemy' estestvenny'h nauk i ih prepodavaniya": Lipetsk, 20-21 oktyabrya 2016. Lipetsk: LGPU imeni P.P. Semenova-Tyan-Shanskogo. P. 45-54.

УДК
517.956

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПОМИНАЮЩИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Исаева Севда Эльхан кызы
к.ф.-м.н., доцент
isayevasevda@rambler.ru
г. Баку (Азербайджан)

Бакинский Государственный
Университет (Баку, Азербайджан)

Резюме. В данной работе рассматривается смешанная задача одной системы полулинейных гиперболических уравнений с запоминающими операторами. Доказаны теоремы о существовании и единственности решений рассматриваемой задачи.

Ключевые слова. Полулинейное гиперболическое уравнение, гистерезис, запоминающий оператор, метод дискретизации по времени.

1. Введение

Исследованию решений дифференциальных уравнений с частными производными с гистерезисными нелинейностями, в частности с нелинейными запоминающими операторами, посвящены работы, например, [1] - [5]. В данной работе рассмотрена нижеуказанная смешанная задача для системы полулинейных гиперболических уравнений с запоминающими операторами и доказаны теоремы о существовании и единственности решений для этой задачи. Пусть $\Omega \subset R^N (N \geq 1)$ ограниченная область с достаточно гладкой границей Γ . В области $Q = \Omega \times (0, T)$ рассмотрим систему полулинейных гиперболических уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} [u + F_1(v)] - \Delta u = f_1, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} [v + F_2(u)] - \Delta v = f_2 \end{cases} \quad (1)$$

с граничными условиями:

$$u = 0, v = 0, (x, t) \in \Gamma \times [0, T] \quad (2)$$

и с начальными условиями:

$$[u + F_1(v)]|_{t=0} = u^{(0)} + w_1^{(0)}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = u^{(1)}, \quad (3)$$

$$[v + F_2(u)]|_{t=0} = v^{(0)} + w_2^{(0)}, \quad \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=0} = v^{(1)}, \quad (4)$$

где нелинейные операторы F_1, F_2 действуют из пространства $M(\Omega; C^0([0, T]))$ в $M(\Omega; C^0([0, T]))$. Здесь $M(\Omega; C^0([0, T]))$ есть пространство измеримых функций, действующих из Ω в $C^0([0, T])$. Предполагается, что операторы F_i ($i = 1, 2$) являются запоминающими операторами, которые действуют в каждой точке $x \in \Omega$ независимо, то есть $[F_i(u(x, \cdot))](t)$ зависит от $u(x, \cdot)|_{[0, t]}$ и не зависит от $u(y, \cdot)|_{[0, t]}$ для $y \neq x$.

Пусть операторы F_i ($i = 1, 2$) удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} \text{если для любых } u_1, u_2 \in M(\Omega; C^0([0, T])) \text{ и для любого } t \in [0, T] \\ u_1 = u_2 \text{ на } [0, t], \text{ то } [F_i(u_1)](\cdot, t) = [F_i(u_2)](\cdot, t) \text{ п.в. в } \Omega; \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \text{если } u_n \in M(\Omega; C^0([0, T])) \text{ и } u_n \rightarrow u \text{ равномерно,} \\ \text{то } F_i(u_n) \rightarrow F_i(u) \text{ равномерно на } [0, T], \text{ п.в. в } \Omega; \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \text{существуют такие } L > 0, g \in L^2(\Omega), \text{ что для любого } u \in M(\Omega; C^0([0, T])) \\ \| [F_i(u)](x, \cdot) \|_{C^0([0, T])} \leq L \| u(x, \cdot) \|_{C^0([0, T])} + g(x), \text{ п.в. в } \Omega; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \text{если } u \in M(\Omega; C^0([0, T])) \text{ и для любого } [t_1, t_2] \subset [0, T] \\ u(x, \cdot) \text{ является аффинной в } [t_1, t_2], \text{ п.в. в } \Omega, \\ \text{то } \{ [F_i(u)](x, t_2) - [F_i(u)](x, t_1) \} [u(x, t_2) - u(x, t_1)] \geq 0, \text{ п.в. в } \Omega; \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \text{существует такое } 0 < L_1 < 1/2, \text{ что для любого } u \in M(\Omega; C^0([0, T])) \text{ и для} \\ \forall [t_1, t_2] \subset [0, T] \text{ если } u(x, \cdot) \text{ является аффинной в } [t_1, t_2] \text{ п.в. в } \Omega, \text{ то} \\ \| [F_i(u)](x, t_2) - [F_i(u)](x, t_1) \| \leq L_1 |u(x, t_2) - u(x, t_1)| \text{ п.в. в } \Omega. \end{cases} \quad (9)$$

Предполагается, что

$$u^{(0)} \in H_0^1(\Omega), w_1^{(0)} \in L^2(\Omega), u^{(1)} \in L^2(\Omega), f_1 \in L^2(Q), \quad (10)$$

$$v^{(0)} \in H_0^1(\Omega), w_2^{(0)} \in L^2(\Omega), v^{(1)} \in L^2(\Omega), f_2 \in L^2(Q). \quad (11)$$

Определение. Пара функций (u, v) такая, что при $u, v \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ удовлетворяются включения

$F_1(v) \in L^2(Q), F_2(u) \in L^2(Q)$ и которая удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left\{ -\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - [u + F_1(v)] \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla u \cdot \nabla \bar{v} \right\} dx dt = \\ & = \iint_Q f_1 \bar{v} dx dt + \int_{\Omega} [u^{(0)}(x) + w_1^{(0)}(x) + u^{(1)}(x)] \bar{v}(x, 0) dx, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \iint_Q \left\{ -\frac{\partial v}{\partial t} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - [v + F_2(u)] \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \nabla v \cdot \nabla \bar{v} \right\} dx dt = \\ & = \iint_Q f_2 \bar{v} dx dt + \int_{\Omega} [v^{(0)}(x) + w_2^{(0)}(x) + v^{(1)}(x)] \bar{v}(x, 0) dx, \end{aligned} \quad (13)$$

для любого $\bar{v} \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega))$ ($\bar{v}(\cdot, T) = 0$ п.в. в Ω), называется решением задачи (1)-(4).

Теорема 1. Пусть выполняются условия (5)-(11). Тогда задача (1)-(4) имеет по крайней мере одно решение (u, v) , для которого имеет место

$$u, v \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad F_1(v), F_2(u) \in H^1(0, T; L^2(\Omega)). \quad (14)$$

Эта теорема доказывается методом дискретизации по переменному t (см. [6]).

Разобьем отрезок $[0, T]$ точками $t_n = nk$, $n = 0, 1, \dots, m$ на m частей. Примем следующие обозначения:

$$f_{1m}^n = f_1(x, nk), \quad f_{2m}^n = f_2(x, nk), \quad n = 1, \dots, m,$$

$$u_m^0 = u^{(0)}, \quad w_{1m}^0 = w_1^{(0)}, \quad u_m^1 = u^{(0)} + ku^{(1)}, \quad u_m^{-1} = u^{(0)} - ku^{(1)},$$

$$u_m^n(x) = u(x, nk), \quad n = 2, \dots, m,$$

$$v_m^0 = v^{(0)}, \quad w_{2m}^0 = w_2^{(0)}, \quad v_m^1 = v^{(0)} + kv^{(1)}, \quad v_m^{-1} = v^{(0)} - kv^{(1)},$$

$$v_m^n(x) = v(x, nk), \quad n = 2, \dots, m,$$

$$w_{1m}^n(x) = [F_1(v_m)](x, nk), \quad w_{2m}^n(x) = [F_2(u_m)](x, nk), \quad n = 1, \dots, m, \quad \text{п.в. в } \Omega,$$

где

$$u_m(x, \cdot) = \text{линейная интерполяция по времени } u(x, nk),$$

$$v_m(x, \cdot) = \text{линейная интерполяция по времени } v(x, nk)$$

для $n = 0, 1, \dots, m$ п.в. в Ω .

Аналогичным образом определяем $w_{1m}(x, \cdot), w_{2m}(x, \cdot)$. Рассмотрим задачу

$$\frac{u_m^n - 2u_m^{n-1} + u_m^{n-2}}{k^2} + \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} + \frac{w_{1m}^n - w_{1m}^{n-1}}{k} - \Delta u_m^n = f_{1m}^n \quad (15)$$

$$\frac{v_m^n - 2v_m^{n-1} + v_m^{n-2}}{k^2} + \frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{k} + \frac{w_{2m}^n - w_{2m}^{n-1}}{k} - \Delta v_m^n = f_{2m}^n \quad (16)$$

в $(H_0^1(\Omega))'$, $n = 1, 2, \dots, m$,

$$u_m^0 = u^{(0)}, \quad w_{1m}^0 = w_1^{(0)}, \quad u_m^1 = u^{(0)} + ku^{(1)}, \quad u_m^{-1} = u^{(0)} - ku^{(1)},$$

$$v_m^0 = v^{(0)}, \quad w_{2m}^0 = w_2^{(0)}, \quad v_m^1 = v^{(0)} + kv^{(1)}, \quad v_m^{-1} = v^{(0)} - kv^{(1)}.$$

Действуя аналогичным образом, как это сделано в работе [6], доказывается, что эта задача может быть решена шаг за шагом.

Умножая обе части равенств (15) и (16) на $u_m^n - u_m^{n-1}$ и $v_m^n - v_m^{n-1}$, соответственно, суммируя по $n = 1, 2, \dots, \ell$ для любого $\ell \in \{1, 2, \dots, m\}$ и интегрируя по Ω , получим

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left(\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} - \frac{u_m^{n-1} - u_m^{n-2}}{k} \right) \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} dx + \\
 & + k \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left(\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} \right)^2 dx + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} (w_{1m}^n - w_{1m}^{n-1}) (u_m^n - u_m^{n-1}) dx + \\
 & + \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \nabla u_m^n (\nabla u_m^n - \nabla u_m^{n-1}) dx = \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} f_1 (u_m^n - u_m^{n-1}) dx +, \\
 & \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left(\frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{k} - \frac{v_m^{n-1} - v_m^{n-2}}{k} \right) \frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{k} dx + \\
 & + k \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \left(\frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{k} \right)^2 dx + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} (w_{2m}^n - w_{2m}^{n-1}) (v_m^n - v_m^{n-1}) dx + \\
 & + \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} \nabla v_m^n (\nabla v_m^n - \nabla v_m^{n-1}) dx = \sum_{n=1}^{\ell} \int_{\Omega} f_2 (v_m^n - v_m^{n-1}) dx.
 \end{aligned}$$

откуда используя (5)–(11) имеем оценку

$$k \sum_{n=1}^m \left\| \frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{k} \right\|_{L^2(\Omega)}^2, k \sum_{n=1}^m \left\| \frac{v_m^n - v_m^{n-1}}{k} \right\|_{L^2(\Omega)}^2, \max_{n=1, \dots, m} \left\{ \|u_m^n\|_{H_0^1(\Omega)}, \|v_m^n\|_{H_0^1(\Omega)} \right\} \leq C,$$

(постоянная C не зависит от m), с помощью которой, можно перейти к пределу в уравнениях

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (u_m + w_{1m}) - \Delta \tilde{u}_m = \tilde{f}_{1m} \text{ и } \frac{\partial^2 v_m}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (v_m + w_{2m}) - \Delta \tilde{v}_m = \tilde{f}_{2m},$$

которые получаются из (15), (16) с помощью обозначений:

$\tilde{u}_m(x, t) = u_m^n(x)$ и $\tilde{v}_m(x, t) = v_m^n(x)$ п.в. в Ω , если $(n-1)k < t \leq nk$, $n = 1, 2, \dots, m$;
 $(\tilde{w}_{1m}, \tilde{w}_{2m}, \tilde{f}_{1m}, \tilde{f}_{2m})$ определяются аналогичным образом); после чего получаются (12)–(14).

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1, и условия

$$\begin{cases} \text{для любого } r > 0 \text{ существует такое } L_{2i}(r) > 0, \text{ что} \\ \text{для } \forall t \in (0, T] \text{ и } \forall u, v \in \left\{ \tilde{u} \in L^2(Q_t) : \|\tilde{u}\|_{L^2(Q_t)} \leq r \right\} \\ \left\| F_i(u) - F_i(v) \right\|_{L^2(\Omega; C^0([0, t]))} \leq L_{2i}(r) \|u - v\|_{L^2(\Omega; L^2([0, t]))} \text{ п.в. в } \Omega, \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (17)$$

Тогда решение задачи (1)–(4) единственно.

Доказательство. Пусть (u_1, v_1) и (u_2, v_2) два решения задачи (1)–(4). Тогда для пары разностей $(\theta_1, \theta_2) = (u_1 - u_2, v_1 - v_2)$ имеем:

$$\theta_{1tt} + \theta_{1t} + [F_1(\nu_1) - F_1(\nu_2)]_t - \Delta \theta_1 = 0, \quad (18)$$

$$\theta_{2tt} + \theta_{2t} + [F_2(u_1) - F_2(u_2)]_t - \Delta \theta_2 = 0, \quad (19)$$

$$\theta_i|_T = 0, \quad i=1,2,$$

$$\theta_i|_{t=0} = 0, \theta_{i_t}|_{t=0} = 0, [F_1(\nu_1) - F_1(\nu_2)]_{t=0} = 0, [F_2(u_1) - F_2(u_2)]_{t=0} = 0,$$

$$\theta_i \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)), \theta_{i_t} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad i=1,2.$$

Для доказательства того, что $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0$, используем классическую процедуру, применяемую в теории линейных гиперболических уравнений (см. [7]).

Пусть $s \in]0, T[$. Для $i=1,2$ положим

$$\psi_i(t) = \begin{cases} -\int_t^s \theta_i(\sigma) d\sigma, & t \leq s; \\ 0, & t > s, \end{cases} \quad \tilde{\theta}_i(t) = \int_0^t \theta_i(\sigma) d\sigma.$$

Отсюда ясно, что $\psi_i(t) = \tilde{\theta}_i(t) - \tilde{\theta}_i(s)$ при $t \leq s$ ($i=1,2$). Умножая скалярно (18) на $\psi_1(t)$ и (19) на $\psi_2(t)$ и учитывая, что $\psi_{i_t} = \theta_i, \psi_i(0) = -\tilde{\theta}_i(s), i=1,2$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\theta_1(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^s \|\theta_1\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{2} \|\tilde{\theta}_{1x}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= -\int_0^s (F_1(\nu_1) - F_1(\nu_2), \psi_{1_t}) dt, \\ \frac{1}{2} \|\theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^s \|\theta_2\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{2} \|\tilde{\theta}_{2x}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= -\int_0^s (F_2(u_1) - F_2(u_2), \psi_{2_t}) dt, \end{aligned}$$

где применяя неравенство Гельдера и условие (17), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\theta_1(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\theta_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^s \|\theta_1\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \int_0^s \|\theta_2\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{2} \|\tilde{\theta}_{1x}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\theta}_{2x}(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \\ &\leq \sqrt{s} L_{21}(r) \|\theta_2\|_{L^2(Q_s)} \|\theta_1\|_{L^2(Q_s)} + \sqrt{s} L_{22}(r) \|\theta_2\|_{L^2(Q_s)} \|\theta_1\|_{L^2(Q_s)}. \end{aligned}$$

или

$$\left(1 - \frac{\sqrt{s} L_{21}(r)}{2} - \frac{\sqrt{s} L_{22}(r)}{2}\right) \left(\|\theta_1\|_{L^2(Q_s)}^2 + \|\theta_2\|_{L^2(Q_s)}^2\right) \leq 0. \quad (20)$$

Пусть

$$1 - \frac{\sqrt{s} L_{21}(r)}{2} - \frac{\sqrt{s} L_{22}(r)}{2} > 0 \quad \text{или} \quad s < \min \left\{ T; \frac{4}{(L_{21} + L_{22})^2} \right\}.$$

Тогда полагая $\hat{T} = \min \left\{ T; \frac{4}{(L_{21} + L_{22})^2} \right\}$, из (20) получаем, что $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0$ п.в.

в $Q_{\hat{T}}$. Можно повторить эту процедуру на интервалах времени $[\hat{T}, 2\hat{T}]$, $[2\hat{T}, 3\hat{T}]$ и т.д.; отсюда получаем единственность решения в $[0, T]$.

Теорема 2 доказана.

Список литературы

1. Visintin A. (1993) Hysteresis and semigroups, in "Models of Hysteresis"// A.Visintin, ed. Longman, Harlow. P.192-206.
2. M.Hilpert M. (1989) On uniqueness for evolution problems with hysteresis // In: Mathematical Models for Phase Change Problems. Birkhauser,Basel. P. 377-388.
3. Aliev A.B., Isayeva S.E. (2015) A global attractor for one semilinear hyperbolic equation with memory operator, Pleiades Publishing Ltd, Computational Mathematics and Mathematical Physics. vol 55. №11.
4. Krejci P. (1986) Hysteresis and periodic solutions of semilinear and quasilinear wave equations// Math.Z. 193. P. 247-264.
5. Krejci P. (1993) Asymptotic stability of periodic solutions to the wave equation with hysteresis// In: Models of hysteresis (A.Visintin, ed.). Longman, Harlow. P. 77-90.
6. Visintin A. (1993) Differential Models of Hysteresis. Springer. 411 p.
7. Лионс Ж.Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE SYSTEM OF SEMILINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS WITH MEMORY OPERATOR

S.E. Isayeva

Cand. Sci. (Phys.-Math.), associate professor
isayevasevda@rambler.ru
Baku

Baku State University

Summary. In this work we consider the initial-boundary value problem for one system of semilinear hyperbolic equations with memory operators. We prove the existence and uniqueness of solutions for this problem.

Keywords. Semilinear hyperbolic equation, hysteresis, memory operator, time discretization method.

References

1. Visintin A. (1993) Hysteresis and semigroups, in "Models of Hysteresis"// A.Visintin, ed. Longman, Harlow. P.192-206.
2. M.Hilpert M. (1989) On uniqueness for evolution problems with hysteresis // In: Mathematical Models for Phase Change Problems. Birkhauser,Basel. P. 377-388.
3. Aliev A.B., Isayeva S.E. (2015) A global attractor for one semilinear hyperbolic equation with memory operator, Pleiades Publishing Ltd, Computational Mathematics and Mathematical Physics. vol 55. №11.
4. Krejci P. (1986) Hysteresis and periodic solutions of semilinear and quasilinear wave equations// Math.Z. 193. P. 247-264.
5. Krejci P. (1993) Asymptotic stability of periodic solutions to the wave equation with hysteresis// In: Models of hysteresis (A.Visintin, ed.). Longman, Harlow. P. 77-90.
6. Visintin A. (1993) Differential Models of Hysteresis. Springer. 411 p.
7. Leeons Z.L. (1972) Nekotory`e metody` resheniia nelinei`ny`kh kraevy`kh zadach [Some methods for solving nonlinear boundary value problems] M.: Mir, 1972.

УДК
004.9**ИНТЕРАКТИВНЫЙ МОТИВАТОР
ИЗУЧЕНИЯ ПРЕДМЕТА «ФЭМУЛАС»****Светлана Юрьевна Петрова**
к.т.н., доцент
svetlana.petrova@novsu.ru
г. Великий НовгородНовгородский государственный
университет им. Ярослава Мудрого

Аннотация. В статье рассматривается вопрос использования информационной технологии Фэмулас в образовании. Современная система образования сталкивается с проблемами совершенствования технологий самостоятельной работы студентов и организации инклюзивного образования инвалидов, особенно если студент слабо мотивирован в обучении. Выяснилось, что большинство студентов не в состоянии определить ценность публикации и самостоятельно найти нужные знания по проблемному предмету. Таким образом была поставлена задача разработки интерактивного мотиватора, позволяющего максимально упростить подборку актуальной, интересной и качественной информации по изучаемому предмету. Сбор данных для мотиватора осуществляет бот, основная функция которого направлена на обнаружение событий взаимодействия эксперта в изучаемой студеном предметной области с цифровыми образовательными ресурсами портала НовГУ и Интернет. Полученные данные анализируются с помощью технологического решения Фэмулас, формирующего глобальную историю причинно-следственных связей взаимодействия эксперта с цифровыми образовательными ресурсами и определения важности страницы. Во время фазы спецификации причинно-следственных связей переход пользователя по цифровым ресурсам мы рассматриваем как конечный автомат и определяем действия, которые вызывают переходы от одного цифрового ресурса к другому. Причинно-следственная связь локальных событий может быть получена из истории процесса. Два события в глобальной истории могут быть связаны. Если это так, ни одно из них не является причиной другого, следовательно, можно сказать, что такие события – это параллельные события. Полученные истории проходят процедуру обработки больших данных на вычислительном кластере Hadoop в НовГУ. Результатом обработки будет список ссылок на http страницы с актуальными, интересными и качественными публикациями по изучаемому предмету.

Ключевые слова: информационной технологии образования, большие данные, экспертные системы, персонализация образования.

Мировое образовательное пространство изменилось, на смену старым решениям приходят новые, например, смешанное обучение (Blended Learning). Мобильность – основной девиз современности. В связи с этим меняется вся инфраструктура информационного взаимодействия педагога со своими учениками, и во главу ставятся такие принципы как персонализация и мобильность образовательного процесса. Современная система образования сталкивается с проблемами совершенствования технологий самостоятельной работы студентов и организации инклюзивного образования инвалидов, особенно если студент слабо мотивирован в обучении. Изучая мировой опыт смешанного обучения, мы обнаружили, что одним из ключевых факторов успеха является привлечение внимания студента интересными публикациями в Интернете. Но вот в чем проблема. Как выяснилось, большинство из студентов не в состоянии определить ценность публикации и самостоятельно найти нужные знания по предмету. Интернет заполнен огромным количеством данных, качество которых сомнительно. Таким образом

была поставлена задача разработки интерактивного мотиватора, позволяющего максимально упростить подборку актуальной, интересной и качественной информации по изучаемому предмету.

Технологическое решение заключается в реализации следующего программного обеспечения: 1) разработка бота для сбора данных; 2) разработка морфологического анализатора для экспертизы и сортировки контента (фильтрация данных); 3) разработка облачного сервиса Фэмулас для интеграции данных и предоставления интерактивного взаимодействия мотиватора с этими данными; 4) разработка рекомендательного Виджета для мобильного и настольного решения.

Первый этап – сбор данных. Собрать данные можно различными способами, которые категоризируются по типу участия: непосредственное общение или опосредованное, и методу собора данных: прямой, косвенный, наблюдение и метод самообследования. Использование нескольких методов, помогают открыть различные аспекты деятельности пользователя, и дают уверенность, что найдена значимая информация, а не просто получен странный результат от одного метода.

Одной из частей технологии Фэмулас является бот, деятельность которого направлена на обнаружение событий взаимодействия эксперта в предметной области с цифровой информацией. Бот представляет собой программу (например, приложение для мобильного устройства), исполняемую в клиентской системе. К событиям взаимодействия эксперта с цифровой информацией можно отнести события, вызванные взаимодействием эксперта с информационным порталом НовГУ или другим образовательным цифровым ресурсом Интернет. Бот собирает данные, связанные с зарегистрированными событиями взаимодействия студента, и отправляет собранные данные на сервер. В некоторых случаях бот отправляет HTTP-запрос на сервер, в котором собранные данные кодируются в параметрах HTTP-запроса.

Процесс обнаружения одного или нескольких событий взаимодействия эксперта с цифровым ресурсом выглядит следующим образом. Событие создается человеческим взаимодействием с приложением, запущенным на клиентской системе. Пользователь обычно взаимодействует с клиентской системой с помощью стандартных устройств ввода/вывода, таких как мышь или клавиатура, или сенсорных экранов и устройств распознавания речи. На первом этапе выполняется инициализация бота. Инициализация включает в себя загрузку бота в клиентскую систему с сервера и его активацию. Бот – это программа, которой доверяет сервер. Программа может быть написана на различных языках программирования, таких как Java, JavaScript или Python [Bot Code Examples, 2017]. В некоторых вариантах реализации бот может быть загружен с сервера и работать в контексте пользовательского агента, такого как клиент браузера. Например, бот может содержать JavaScript-код, который отслеживает и регистрирует деятельность пользователя. Или бот может быть Java-программой, которая работает на виртуальной машине Java, которая сама по себе может быть плагином для пользовательского агента, такого как клиент браузера. Инициализация может быть инициирована событием передачи фокуса управления, генерируемые щелчками мыши или нажатием клавиш на клавиатуре.

В клиентской системе может быть несколько приложений. Боты могут работать со всеми приложениями, отслеживая взаимодействия и регистрируя события информационного характера. Инициализация бота обычно запускается, когда пользователь перемещает фокус управления (например, указатель мыши) на одно из запущенных в клиентской системе приложений. Как правило, бот инициализируется в каждом запущенном приложении в клиентской системе. Например, в клиентской системе может быть несколько приложений интернет-браузера. Бот может быть программой

JavaScript, встроенной в веб-страницу, и инициализироваться, когда приложение браузера получает фокус управления.

После инициализации бот проверяет, были ли обнаружены события взаимодействия человека с цифровыми образовательными ресурсами. В частности, регистрация метаданных цифровых ресурсов, с которыми осуществлялись манипуляции, и накопление данных в буфере, который затем обрабатывается операционной системой. Бот по сути подписывается на события ввода/вывода передаваемых через браузер. Бот периодически просыпается и ждет обнаружения подписанных событий, таких как событие уведомления о перемещении фокуса управления. Если какие-либо подписанные события были переданы боту во время пробуждения, он собирает данные о событии и метаданные о цифровом ресурсе, с которым взаимодействовал пользователь. Собранные данные отправляются на сервер в хранилище в виде файла данных, внедренного в http-запрос.

Валидация и анализ данных могут проводиться как в реальном времени, то есть, как только данные поступят на сервер, так и в автономном режиме, то есть при анализе журнала регистрации событий взаимодействия. В некоторых случаях сервер может корректировать политику регистрации событий. Например, сервер может игнорировать клики на рекламных объявлениях.

Процесс регистрации запросов в журнале сервера, генерируемых ботами, выглядит следующим образом. На первом этапе процесса бот получает идентификатор. Бот запускается в клиентской системе и взаимодействует с сервером. В журнале регистрации запросов сохраняются записи с одного или нескольких ботов в одной или нескольких клиентских системах. Когда бот взаимодействует с сервером, он отправляет http-запрос серверу для получения файла с предопределенным именем. Когда сервер получает http-запрос, он создает запись в журнале, указывающую на предопределенное имя файла и другие параметры в http-запросе. Для обеспечения безопасной передачи данных могут использоваться протоколы шифрования. Декодирование записи в журнале, позволяет получить IP-адрес, идентификатор бота, http-файл cookie и данные, связанные с событиями взаимодействия студента с информационным ресурсом портала НовГУ. Http-файлы cookie используются веб-серверами для идентификации пользователей и для поддержания данных, связанных с одним и тем же сеансом пользователя во время нескольких http-запросов.

Полученные данные анализируются и формируется глобальная история причинно-следственных связей взаимодействия эксперта с цифровыми образовательными ресурсами, а также определяется важность страницы. Обработка поступивших данных, для формирования списка, происходит с помощью технологического решения Фэмулас, которое задействует облачные вычисления.

Для ранжирования страниц требуется четкое понимание причинно-следственных связей поступивших данных. Во время фазы спецификации траектории, переход пользователя по цифровым ресурсам, мы рассматриваем как конечный автомат и определяем действия, которые вызывают переходы от одного цифрового ресурса к другому. Во время фазы анализа журнала данных, полученных от бота, мы должны определить причину, которая привела эксперта к определенному образовательному или учебно-значимому цифровому ресурсу.

Деятельность любого процесса поиска образовательного цифрового ресурса моделируется как последовательность событий, следовательно, бинарное отношение причинно-следственной связи должно быть выражено в терминах событий и должно выражать наше знание о том, что причина должна предшествовать следствию. Так же, мы должны различать локальные и коммуникационных события.

События, влияющие более чем на один процесс, являются значимыми для построения глобальной истории нескольких процессов [Marinescu, 2013]. Обозначим h_i как локальную историю процесса p_i и пусть e_i^k обозначает i -ое событие в этой истории.

Двоичная причинно-следственная зависимость между двумя событиями, обладает следующими свойствами:

Причинно-следственная связь локальных событий может быть получена из истории процесса:

$$\text{если } e_i^k, e_i^l \in h_i \text{ и } k < l \text{ тогда } e_i^k \rightarrow e_i^l. \quad (1)$$

Причинно-следственная связь коммуникационных событий:

$$\text{если } e_i^k = \mathcal{S}(m) \text{ и } e_j^l = \mathcal{R}(m) \text{ тогда } e_i^k \rightarrow e_j^l. \quad (2)$$

Транзитивность причинно-следственной связи:

$$\text{если } e_i^k \rightarrow e_j^l \text{ и } e_j^l \rightarrow e_m^n \text{ тогда } e_i^k \rightarrow e_m^n. \quad (3)$$

Два события в глобальной истории могут быть связаны. Если это так, ни одно из них не является причиной другого, следовательно, можно сказать, что такие события, это параллельные события. Логические часы $\mathcal{LC}$ являются необходимой абстракцией для обеспечения условия синхронизации в отсутствии глобальных часов. Каждый процесс p_i отображает события в целых положительных числах. Назовем $\mathcal{LC}(e)$ значением локальной переменной, связанной с событием e . Каждая временная метка процесса для каждого отправленного сообщения m со значением логических часов на время отправки $\mathcal{TS}(m) = \mathcal{LC}(\mathcal{S}(m))$. Правила для обновления логических часов задаются следующим соотношением:

$$\mathcal{LC}(e) = \begin{cases} \mathcal{LC} + 1 & \text{если } e \text{ это локальное событие, или } \mathcal{S}(m) \\ \max(\mathcal{LC} + \mathcal{TS}(m) + 1) & \text{если } e = \mathcal{R}(m) \end{cases}. \quad (4)$$

Процесс характеризуется его состоянием; состояние является совокупностью информации, которая нам нужна. Событие является изменением состояния процесса.

События, влияющие на состояние процесса p_1 нумеруются последовательно, как $e_1^1, e_1^2, e_1^3, \dots$. Каждый процесс последовательно маркирует свои локальные события и события отправки сообщений, пока не получит сообщение, отмеченное значением логических часов, которое больше, чем следующее значение локальных логических часов, как показано в уравнении (4). Отсюда следует, что логические часы не позволяют формировать глобальное упорядочение всех событий.

Предположим есть три процесса и набор событий с маркировкой $e_1^1, e_1^2, e_1^3, \dots$. Процесс p_1 находится в состоянии σ_i^j сразу после возникновения события e_i^j и остается в этом состоянии до наступления следующего события e_i^{j+1} . Все события в процессе p_1 локальные; процесс в состоянии σ_1 сразу после наступления события e_1^1 и остается в этом состоянии до наступления события e_1^2 . Два процесса p_1 и p_2 ; Событие e_2^1 является коммуникационным событием, p_1 отправляет сообщение p_2 ; e_3^2 является коммуникационным событием, процесс p_2 получает сообщение, посланное p_1 . Три процесса взаимодействуют посредством коммуникационных событий.

Корреляция между событиями и значениями логических часов следующая: $e_1^1, e_2^1, e_3^1 \rightarrow 1, e_1^5 \rightarrow 5, e_2^4 \rightarrow 7, e_3^6 \rightarrow 10, e_1^6 \rightarrow 12$ и так далее.

Глобальное упорядочение всех событий не представляется возможным, так как отсутствует возможность установить порядок событий e_1^1, e_1^2 и e_1^3 . Тем не менее, коммуникационные события позволяют этим трем процессам согласовывать свои логические часы. Например, процесс p_2 маркирует событие e_2^3 под номером 6, так как сообщение m_2 , которое несет информацию о значении логических часов было под номером

5, в то же самое время было отправлено сообщение m_3 . Напомним, что e_i^j это j -ое событие в процессе p_i .

Логические часы нуждаются в важном свойстве – обнаружение разрыва. Рассмотрим два события e и e' , значения их логических часов $LC(e)$ и $LC(e')$, невозможно установить, если существует событие e'' такое что:

$$LC(e) < LC(e'') < LC(e'). \quad (5)$$

Например, для процесса p_1 есть событие e_1^4 расположенное между событиями e_1^3 и e_1^5 , поэтому $LC(e_1^3) = 3$, $LC(e_1^5) = 5$, $LC(e_1^4) = 4$ и $LC(e_1^3) < LC(e_1^4) < LC(e_1^5)$. Однако для процесса p_3 событие e_3^3 и e_3^4 следуют как $LC(e_3^3) = 3$ и $LC(e_3^4) = 10$.

В экспертной системе требуется знание о причинно-следственных связях всех процессов, чтобы сформировать глобальное состояние. Бот отвечает за построение глобального состояния, он отправляет информацию о локальных состояниях каждого процесса. Построение глобального состояния эквивалентно созданию моментальных снимков отдельных процессов информационного взаимодействия студента с цифровым образовательным ресурсом, а экспертная система объединяет эти снимки в глобальное представление о состоянии системы. Объединение моментальных снимков — это несложный процесс, если все процессы имеют доступ к глобальным часам и снимки сделаны в одно и то же время и моментальные снимки будут соответствовать друг другу.

Причинно-следственная связь R – полное упорядочение всех событий в глобальной истории информационного взаимодействия в соответствии с локальной историей каждого процесса, участвующего в вычислениях:

$$R = (e_1^{j_1}, e_2^{j_2}, \dots, e_n^{j_n}). \quad (6)$$

Можно построить трехмерную решетку глобальных состояний начиная с инициации состояния $\Sigma^{(000)}$ и переходя в другое достижимое состояние $\Sigma^{(i j k)}$ с событиями i, j, k для процессов p_1, p_2, p_3 соответственно.

$R_1 = e_1^1, e_2^1, e_3^1, e_1^2$ соответствует как локальной истории каждого процесса, так и глобальной истории. Она является валидной, так как система прошла глобальные состояния:

$$\Sigma^{(000)}, \Sigma^{(100)}, \Sigma^{(110)}, \Sigma^{(000)}, \Sigma^{(111)}, \Sigma^{(211)}. \quad (7)$$

С другой стороны $R_2 = e_1^1, e_2^2, e_3^1, e_1^3, e_3^2$ является не валидным, потому что он противоречит глобальной истории. Система никогда не может достичь состояния $\Sigma^{(301)}$.

Сечение представляет собой подмножество локальных историй всех процессов. Если h_i^j обозначает историю процесса p_i включая его j -ое событие e_i^j , то сечение C является n -кортежем

$$C = \{h_i^j\} \text{ с } i \in \{1, n\} \text{ и } j \in \{1, n_i\}. \quad (8)$$

Граница сечения – это n -кортеж, состоящий из последнего события каждого процесса, включенного в сечение. Сечения обеспечивают необходимые знания для генерации глобального состояния, на основе обмена сообщениями между ботом и группой процессов. Для группы из трех процессов p_1, p_2, p_3 , описанных выше, можно сформировать два сечения, C_1 и C_2 . C_1 имеет границу основанную на событиях (4, 5, 2), то есть сечение останавливает процесс после четвертого события процесса p_1 , пятого события процесса p_2 и второго события процесса p_3 . И сечение C_2 имеет границу (5, 6, 3). Сечение представляет собой экземпляр, когда запрос на описание индивидуального состояния принимаются всеми членами группы. Очевидно, не все сечения имеют смысл. Например, сечение C_1 с границей (4, 5, 2) нарушает наше априорное знание о причинности. Оно включает в себя событие e_2^4 , вызванное получением сообщения m_3 процессом p_2 , но не включает в себя событие e_3^3 (отправка сообщения m_3), вызванное про-

цессом p_3 . На этом снимке работы бота процесс p_3 был приостановлен после второго события e_2^2 , прежде чем у него возникла возможность отправить сообщение m_3 , то есть причинно-следственная связь нарушается и система никогда не сможет достичь глобального состояния. Сечение $C_2 = (e_1^5, e_2^6, e_3^3)$ согласованное, так как нет причинно-следственного несоответствия, оно включает в себя событие e_2^6 (отправка сообщения m_4), но не включает в себя причинное следствия от него – событие e_3^4 (получение сообщения m_4 от процесса p_3).

Далее введём понятия согласованных и несогласованных сечений. Замкнутое сечение, подчиненное причинно-следственным приоритетам отношений, называется согласованным сечением. C является согласованным сечением для всех событий тогда и только тогда

$$\forall e, e', (e \in C) \wedge (e' \rightarrow e) \Rightarrow (e' \in C). \quad (9)$$

Используя согласованное сечение можно определить, произошло ли событие e до сечения.

Согласованный запуск событий R – общая упорядоченность событий, входящих в запуск, согласуется с частичным порядком, навязанным причинной-следственной связью. Для всех событий $e \rightarrow e'$ подразумевается что в запуске событий R , событие e появится до события e' .

Рассмотрим информационный поиск студента, состоящие из группы сообщающихся между собой процессов $G = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$. История $\gamma(e)$ причинно-следственного события e , является наименьшим согласованным сечением группы процессов G , включающим в себя событие e .

$$\gamma(e) = \{e' \in G | e' \rightarrow e\} \cup \{e\}. \quad (10)$$

Причинно-следственная история события e_2^5 это наименьшее согласованное сечение включающее событие e_2^5 :

$$\gamma(e_2^5) = \{e_1^1, e_1^2, e_1^3, e_1^4, e_1^5, e_2^1, e_2^2, e_2^3, e_2^4, e_2^5, e_3^1, e_3^2, e_3^3\}. \quad (11)$$

Это самый маленький согласованный срез, включающий в себя событие e_2^5 . Действительно, если опустить событие e_3^3 , то срез (5, 5, 2) будет противоречивым и несогласованным – он будет включать коммуникационное событие e_2^4 для приема сообщения m_3 , но не будет включать событие e_3^3 – отправка сообщения m_3 . Если опустить событие e_1^5 , то срез (4, 5, 3) также будет несогласованным, так как будет включать в себя событие e_2^3 , но не будет включать в себя событие e_1^5 .

Следующий алгоритм может быть использован для построения причинно-следственных истории:

Каждый процесс $p_i \in G$ начинается с $\Theta = \emptyset$.

Каждый раз когда процесс p_i получает сообщение от процесса p_j он создает историю:

$$\gamma(e_i) = \gamma(e_j) \cup \gamma(e_k) \quad (12)$$

где, e_i – коммуникационное событие получения сообщения; e_j – предыдущее локальное событие процесса p_i ; e_k – коммуникационное событие отправки сообщения процессом p_j .

К сожалению, такое объединение историй порождает слабоуправляемый прирос больших данных, так как причинно-следственные истории растут очень быстро.

Список литературы

1. Примеры кода бота. [Электронный ресурс] URL: <https://core.telegram.org/bots/samples> (дата обращения: 29.11.2017).
2. Маринеску Д. К. Теория и практика облачных вычислений [Текст]. США: Морган Кауфманн – издано в Элсевера, 2013. 415 с.

"FEMULAS" INTERACTIVE MOTIVATOR OF STUDYING THE SUBJECT

S.Yu. Petrova

Novgorod State University

Cand. Sci. (Engineering), associate professor

svetlana.petrova@novsu.ru

Velikiy Novgorod

Abstract. The article discusses the using Famulus - new information technologies in education. The modern education system faces problems of improving the technologies for substantive work of students and organizing inclusive education for disabled people, especially if the student is poorly motivated in training. It turned out that most students are not able to determine the value of the publication and independently find the necessary knowledge on the subject matter. Thus, there was formulation of the task: we need to develop an interactive motivator that makes it possible to simplify as much as possible a selection of relevant, interesting and qualitative information on the subject under study. Data collection for the motivator is gathered by a bot, whose main function is to detect events of interaction of the expert in the student's study, the subject area with digital educational resources of the NovSU portal and the Internet. The data obtained are analyzed by the Famulus technology solution, which forms a global history of cause and effect relations between the expert and digital educational resources and determines the importance of the page. During the phase of the specification of cause-effect relationships, the user's transition to digital resources, we view as a finite state machine and determine the actions that cause transitions from one digital resource to another. The causal relationship of local events can be obtained from the history of the process. Two events in the global history can be connected. If this is so, none of them is the cause of the other, so we can say that such events are parallel events. The received histories go through a procedure for processing big data by the Hadoop cluster at NovSU. The result of processing will be a list of links to http pages with relevant, interesting and high-quality publications on the subject under study.

Keywords: information technology in education, big data, expert systems, personalization of education

References

1. Bot Code Examples URL: <https://core.telegram.org/bots/samples> (Accessed: 29.11.2017).
2. Marinescu, D. C. (2013) Cloud Computing Theory and Practice. USA: Morgan Kaufmann is an imprint of Elsevier. 415 p.

УДК
004.912,
51-74

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЯЗЫКА

Мурат Казбекович Датиев
аспирант
г. Владикавказ

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Александр Юрьевич Кулай
старший научный сотрудник
г. Владикавказ

Московский институт радиотехники,
электроники и автоматики

Казбек Муратович Датиев
к.т.н., профессор
datiev_skgmi@mail.ru
г. Владикавказ

Северо-Кавказский горно-
металлургический институт

Аннотация. В работе рассматриваются современные статистические модели языка. Дано определение применяемым критериям эффективности моделей. Описываются следующие статистические модели языка: n -граммные модели, модели на основе деревьев решений, лингвистически мотивированные модели.

Ключевые слова: статистические языковые модели, n -граммные модели, перплексия.

Введение. При помощи статистического моделирования языка (Statistical Language Modeling (SLM)) формализуются закономерности естественного языка для улучшения производительности различных естественно-языковых приложений. Статистическое языковое моделирование строит оценку вероятностного распределения различных лингвистических единиц, таких как слова, предложения, тексты [Розенфельд, 1996]. Статистические модели языка применяются в большом количестве приложений: распознавание речи, машинный перевод, классификация документов, информационный поиск, распознавание рукописного текста, проверка орфографии и др.

SLM использует технологии статистической оценки, применяя для обучения языковые данные – текст. Из-за категориальной природы языка и огромного словарного запаса статистические технологии должны оценивать большое количество параметров и, следовательно, сильно зависят от доступности значительного количества обучающих данных. За последние десятилетия большое количество текстов различных типов стало доступно в сети Интернет. В результате, в областях, где подобные данные стали доступными, качество языковых моделей резко улучшилось. Однако, сейчас это усовершенствование приближается к своему пределу. Даже если онлайн-тексты накапливаются по экспоненте, то качество статистических моделей языка, используемых в настоящее время, вряд ли значительно улучшится.

Как это ни удивительно, но самые производительные SLM технологии используют очень мало знаний о языке как таковом. Например, n -граммные модели никак не используют информацию, что моделируется язык, они аналогично могут моделировать последовательности произвольных символов, за которыми не стоит никакой глубокой структуры или смысла. Предпринимаются различные попытки создать модели языка, которые применяют знания о том, что на самом деле представляет собой язык. По это-

му поводу один из первых инициаторов статистического подхода к языковому моделированию Фред Джелинек сказал: «необходимо вернуть язык в языковое моделирование». Было предпринято определенное количество попыток включить лингвистическую структуру, теории или знание в статистические модели языка, большинство этих попыток было мало результативным.

Применение моделей языка. Статистическое языковое моделирование – это вероятностное распределение $P(s)$ для всех возможных предложений s (или слов, или устных высказываний, документов или любых других лингвистических единиц).

Сравним статистическое моделирование языка с вычислительной лингвистикой (computational linguistics). Следует отметить, что обе эти области имеют нечеткие границы и значительно совпадают. Пусть S – последовательность слов данного предложения, а H – какая-то связанная с ним скрытая структура (т.е. дерево грамматического разбора, смыслы слов и т.д.). Статистическое моделирование языка преимущественно нацелено на оценку вероятности $P(S)$, тогда как вычислительная лингвистика – больше на оценку условной вероятности $P(H|S)$. Естественно, если можно оценить совместную вероятность $P(S, H)$, то из него могут быть получены и $P(S)$, и $P(H|S)$. На практике это обычно невозможно. Статистические модели языка обычно используются в контексте байесовского классификатора, где они могут выполнять роль априорной функции или функции правдоподобия. Например, при распознавании речи исследуется акустический сигнал a , цель – найти предложение s , которое было произнесено с наибольшей вероятностью. При использовании байесовского подхода решение будет следующим:

$$s^* = \arg \max_s P(s | a) = \arg \max_s P(a | s) \cdot P(s),$$

здесь языковая модель $P(s)$ играет роль априорной функции.

Однако, при классификации документов имеется документ d , цель – найти класс c , которому он принадлежит. Как правило, имеются образцы документов для каждого из k классов, из которых строятся k различных языковых моделей $\{P_1(d), P_2(d), \dots, P_k(d)\}$. Используя байесовский классификатор, решение c^* следующее:

$$c^* = \arg \max_c P(c | d) = \arg \max_c P(d | c) \cdot P(c), \quad (*)$$

здесь модель языка $P_c(d)$ исполняет роль функции правдоподобия.

Аналогично можно вывести роль моделей языка в байесовском классификаторе для других языковых технологий.

Критерии эффективности моделей языка. Для оценки качества техники моделирования языка обычно используется правдоподобие новых данных. Среднее логарифмическое правдоподобие (average log likelihood) нового произвольного образца

определяется следующим образом: $Average-Log-Likelihood(D | M) = \frac{1}{n} \sum_i \log P_M(D_i)$,

где $D = \{D_1, D_2, \dots, D_N\}$ – это новый образец данных, M – используемая языковая модель. Последняя величина также может рассматриваться, как эмпирическая оценка кросс-энтропии (перекрестной энтропии (cross-entropy)) истинного (но неизвестного) распределения P с учетом распределения модели P_M :

$$cross-entropy(P; P_M) = - \sum_D P(D) \cdot \log P_M(D).$$

Фактическая производительность языковой модели обычно определяется с помощью перплексии (perplexity): $perplexity(P; P_M) = 2^{cross-entropy(P; P_M)}$.

Перплексию может интерпретировать как средний (геометрический) коэффициент ветвления языка в соответствии с моделью. Это функция, как языка, так и модели. Применительно к функции модели, она оценивает, насколько хороша модель (чем луч-

ше модель, тем ниже перплексия). Применительно к языку, она оценивает энтропию или сложность этого языка. В конечном счете, качество языковой модели должно быть определено её производительностью в конкретном приложении, для которого она разрабатывалась, а именно, процентом ошибок в данном приложении. Однако, процент ошибок, как правило, нелинейные и плохо понятные функции языковой модели. Более низкая перплексия обычно приводит к более низкому проценту ошибок, но в литературе встречается много обратных примеров. Эмпирически, уменьшение перплексии на 5% фактически незаметно, уменьшение на 10%-20% заметно и обычно (но не всегда) приводит к некоторому улучшению производительности приложения, уменьшение перплексии на 30% и выше является весьма существенным (и редким).

Некоторые недостатки языковых моделей. Даже самая простая языковая модель существенно влияет на приложения, в которых она используется (в этом можно убедиться, например, убрав языковую модель из системы распознавания речи). Однако, даже современные методы языкового моделирования далеко не оптимальны. Есть несколько причин:

Уязвимость в предметной области. Современные модели языка крайне чувствительны к изменениям в стиле, теме или жанре текста, на котором они обучались.

Ложное предположение о независимости. Для того чтобы оставаться «легко поддающимися обработке» фактически все используемые языковые методы моделирования принимают некоторую форму независимости между различными частями одного и того же документа.

Эксперименты по Шеннону. Клод Шеннон применял технику извлечения знания человека о языке, просив людей предсказывать следующий элемент текста. Шеннон использовал этот метод для оценки энтропии английского языка. Общее наблюдение во время подобных экспериментов заключается в том, что люди улучшают работу языковой модели достаточно легко и существенно. Они, вероятно, делают это за счет использования рассуждений на уровнях предметной области, лингвистики и здравого смысла.

Обзор основных техник статистического языкового моделирования. Практически все модели языка раскладывают вероятность предложения в произведение

условных вероятностей:
$$P(s) \stackrel{\text{def}}{=} P(w_1 \dots w_n) = \prod_{i=1}^n P(w_i | h_i),$$

где w_i – i -ое слово в предложении, а $h_i = \{w_1, w_2, \dots, w_{i-1}\}$ – его история.

В настоящее время, помимо моделей на нейронных сетях, применяются следующие статистические модели языка:

- n -граммные модели;
- модели на основе деревьев решений;
- лингвистически мотивированные модели:
 - контекстно-независимая грамматика;
 - грамматика связей.

N -граммные модели (n -grams). n -граммные модели являются основными моделями языка в современных технологиях распознавания речи. Практически все коммерческие продукты распознавания речи используют некоторую форму n -граммных моделей. n -граммная модель понижает размерность задачи, моделируя язык как дискретный Марковский источник порядка $(n-1)$: $P(w_i | h_i) \approx P(w_i | w_{i-n+1}, \dots, w_{i-1})$.

Значение n изменяет соотношение стабильности оценки (т.е. дисперсии) и ее правильности (т.е. смещения). Получение вероятностей используемых n -грамм до сих пор сталкивается с «проблемой нулевых переходов», даже на очень больших корпусах дан-

ных. Более того, даже среди найденных n -грамм, подавляющее большинство встречается лишь однажды, а многие другие характеризуются низкой встречаемостью. Поэтому непосредственное использование оценок максимального правдоподобия (ОМП) для нахождения оценок вероятностей n -грамм по их частотам нежелательно. Для решения данной проблемы предложены различные методы сглаживания. Один из перспективных подходов был предложен авторами данной работы в [Датиев, Кулай, Датиев, 2013].

Модели на основе деревьев решений (decision tree models). Деревья решений и алгоритмы типа CART впервые описаны в [Баль, Браун, де Соуза, Мерсер, 1989]. Двоичное дерево решений состоит из множества неконечных и конечных вершин. Каждая неконечная вершина связана с двоичным вопросом и имеет два перехода в вершины следующего уровня. Пример двоичного вопроса: « $w_{i-3} \in \{[and], [or], [not]\}$?». Подобным образом двоичное дерево решений произвольно разбивает пространство историй путем задавания бинарных вопросов об истории h на каждом из внутренних узлов. Каждая конечная вершина (лист) помечена вероятностным распределением для последующего слова $P(w|h)$, для оценивания которого применяются обучающие данные. Для снижения дисперсии оценки распределения в листе интерполируются с распределениями во внутренних узлах, встречающихся на пути от корня. Для того чтобы найти вероятность слова w_i с предысторией h_i необходимо пройти из корня по неконечным вершинам графа по пути, определяемым ответами на двоичные вопросы, пока не найдется конечная вершина. Вероятность слова w_i находится из распределения, которым помечен этот лист.

Лингвистически мотивированные модели (linguistically motivated models). Так как SLM основаны на интуитивном подходе к языку, в большинстве моделей лингвистическое содержание незначительно. Однако, некоторые технологии заимствованы непосредственно из грамматик, широко используемых лингвистами.

Контекстно-независимая грамматика (context free grammar). Контекстно-независимая грамматика [Чен, 1996] – грубая, но очень ясная модель естественного языка. Она состоит из словаря, набора нетерминальных символов и набора правил перехода и образования. Предложения формируются, начиная с начального нетерминального символа, посредством повторяющегося применения правил перехода, каждое из которых преобразует нетерминальный символ в последовательность терминальных (т.е. слов) и нетерминальных, пока не получится предложение, состоящее только из терминальных последовательностей.

Грамматика состоит из правил, которые определяют, как структуры одного уровня языка переходят в формы структур следующего уровня.

Грамматика связей (link grammar). Грамматика связей – модель, предложенная в [Слеатор, Тамперлей, 1991]. От остальных контекстно-независимых грамматик, грамматику связей отличает отсутствие явных составляющих и высокая степень лексикализации. Последнее свойство делает грамматику связей привлекательной при вероятностном моделировании.

Заключение. В работе описаны статистические модели языка, применяемые в настоящее время. Благодаря возросшему доступу к большим объемам данных, статистические модели показывают все более впечатляющие результаты. Несмотря на это, перед статистическими моделями языка по-прежнему стоит ряд сложностей, которые исследуются и решаются иностранными и отечественными авторами.

Список литературы

1. Баль Л.Р., Браун П.Ф., де Соуза П.В., Мерсер Р.Л. (1989) Статистическая языковая модель для распознавания речи, основанная на деревьях. IEEE Труды по акустике, речи и обработки сигналов.
2. Датиев М.К., Кулай А.Ю., Датиев К.М. (2013) Новый метод сглаживания вероятностей. Труды молодых ученых. ВНИЦ РАН, Владикавказ.
3. Розенфельд Р. (1996) Два десятилетия статистического языкового моделирования. Куда нам идти? Сборник трудов Университета Карнеги Меллон, Питсбург, США.
4. Слеатор Д., Тамперлей Д. (1991) Разбор английского языка при помощи грамматических связей. Технический отчет CMU-CS-91-196, Университет Карнеги Меллон, Питсбург, США.
5. Чен С. (1996) Построение вероятностных моделей для естественного языка. Гарвардский университет.

STATISTICAL LANGUAGE MODELS

M.K. Datiev
graduate student
Vladikavkaz

Moscow Institute of Radio Engineering,
Electronics and Automation

A.Y. Kulay
senior researcher
Vladikavkaz

Moscow Institute of Radio Engineering,
Electronics and Automation

K.M. Datiev
Cand. Sci. (Engineering), professor
datiev_skgmi@mail.ru
Vladikavkaz

North-Caucasian Institute of
Mining and Metallurgy

Abstract. Modern statistical language models are considered in the article. The applicable criteria of models' efficiency are defined. The following statistical language models are described: n-gram models, decision tree models, linguistically motivated models.

Keywords: statistical language models, n-gram models, perplexity.

References

1. Bahl L.R., Brown P.F., de Souza P.V., Mercer R.L. (1989) Statisticheskaya iazykovaia model' dlia raspoznavaniia rechi, osnovannaia na derev'iaxh [A tree-based statistical language model for natural language speech recognition] IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing.
2. Chen S. (1996) Postroenie veroiatnostnykh modelei dlia estestvennogo iazyka [Building Probabilistic Models for Natural Language]. Harvard university.
3. Datiev M.K., Kulay A.Y., Datiev K.M. (2013) Novyi metod sglazhivaniia veroiatnostei [The new method in probability smoothing]. Trudi molodih uchenih. Vladikavkaz.
4. Rosenfeld R. (1996) Dva desiatiletiia statisticheskogo iazykovogo modelirovaniia. Kuda nam idti? [Two decades of statistical language modeling: where do we go from here?]. Carnegie Mellon University, Pittsburgh, USA.
5. Sleator D., Temperley D. (1991) Razbor angliiskogo iazyka pri pomoshchi grammatiki sviazei [Parsing English with a link grammar. Technical Report CMU-CS-91-196]. Carnegie Mellon University, Pittsburgh, USA.

УДК
517.9 | **ОБ ОПЕРАТОРАХ И УРАВНЕНИЯХ ТИПА
РОМАНОВСКОГО С ЧАСТНЫМИ ИНТЕГРАЛАМИ**

Ирина Адольфовна Елецких
д.ф.-м.н., доцент
yeletskikh.irina@yandex.ru
г. Елец

Елецкий государственный
университет им. И.А. Бунина

Аннотация. В статье приводится задача теории марковских цепей, поставленная в 1932 году известным советским математиком В.И. Романовским, вводится определение операторов типа Романовского и приводится их классификация. Исследуются линейные операторы типа Романовского с частными интегралами в пространстве непрерывных функций. Свойства таких операторов лежат в основе исследования разрешимости соответствующих уравнений типа Романовского и могут быть использованы при исследовании интегральных уравнений некоторых прикладных задач. Основные результаты получены с применением общей и спектральной теории линейных операторов, а также методов теории интегральных уравнений. В исследовании изучены различные классы таких операторов (с непрерывными, вырожденными, с непрерывными в целом и интегрально ограниченными ядрами) и их пространства. Критерии фредгольмовости и обратимости операторов типа Романовского с перечисленными выше типами ядер применены к изучению условий разрешимости соответствующих уравнений. Изучены композиции операторов и выделен класс операторов, композиции которых являются интегральными операторами. С использованием Теорем Рисса и Радона о представлении линейных функционалов и операторов в пространстве непрерывных функций двух переменных, получены критерии действия операторов типа Романовского с частными интегралами в этом пространстве. Эти критерии применены к изучению свойств пространств операторов типа Романовского с частными интегралами. Получены достаточные условия действия таких операторов в пространстве непрерывных функций и в пространствах Лебега, критерии регулярности операторов, условия существования двойственных к ним операторов. Изучена структура двойственных операторов в пространствах Лебега.

Ключевые слова: операторы с частными интегралами, фредгольмовость, линейный функционал, спектральная теория, двойственные операторы.

Основные труды известного математика Всеволода Ивановича Романовского (1879–1954) относятся к математической статистике и теории вероятностей. В 1932 году В.И. Романовский описал задачу теории марковских цепей, которая приводится к линейному интегральному уравнению вида

$$x(t, s) = \int_a^b m(t, s, \sigma) x(\sigma, t) d\sigma + f(t, s) \quad (1)$$

Уравнение (1) в случае ядра, непрерывного по совокупности переменных, В.И. Романовский исследовал в пространстве непрерывных функций методом, аналогичным методу определителей Фредгольма. Оператор, входящий в это уравнение, не является вполне непрерывным, поэтому теория исследования оператора и соответствующего уравнения существенно отличается от теории интегральных уравнений Фредгольма. Это потребовало изучения свойств соответствующих операторов в различных

пространствах, рассмотрения более общих видов операторов и уравнений, которые впоследствии получили название операторов и уравнений типа Романовского с частными интегралами. Поэтому исследование операторов и уравнений типа Романовского с частными интегралами имеет важное прикладное значение и актуально.

Линейные операторы типа Романовского с частными интегралами конструируются из операторов, содержащих интегралы Лебега:

$$(Lx)(t, s) = \int_a^b l(t, s, \tau)x(\tau, s)d\tau, \quad (2)$$

$$(Mx)(t, s) = \int_a^b m(t, s, \sigma)x(t, \sigma)d\sigma, \quad (3)$$

$$(Nx)(t, s) = \int_a^b \int_a^b n(t, s, \tau, \sigma)x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma, \quad (4)$$

в которых $l(t, s, \tau)$, $m(t, s, \sigma)$, $n(t, s, \tau, \sigma)$ измеримы по совокупности переменных, $t, s, \tau, \sigma \in [a, b]$.

Оператором с частными интегралами называется оператор $K = L + M + N$. С помощью оператора K и оператора перестановки $\Pi: x(t, s) \rightarrow x(s, t)$ получаются операторы типа Романовского:

$$\begin{aligned} K_1 &= L \circ \Pi + M + N, K_2 = L \circ \Pi + M + N \circ \Pi, K_3 = L + M \circ \Pi + N, \\ K_4 &= L + M \circ \Pi + N \circ \Pi, K_5 = L + M + N \circ \Pi, K_6 = L \circ \Pi + M \circ \Pi + N, \\ K_7 &= L \circ \Pi + M \circ \Pi + N \circ \Pi = (L + M + N) \circ \Pi = K \circ \Pi. \end{aligned} \quad (5)$$

Определения уравнений типа Романовского можно найти в [Елецких, 2005:19]:

«Уравнение

$$x(t, s) = (K_i x)(t, s) + f(t, s) \quad (i = 1, \dots, 7) \quad (6)$$

называется неоднородным интегральным уравнением типа Романовского с частными интегралами второго рода.»

«Уравнение (6) с $f(t, s) \equiv 0$, т.е. уравнение вида

$$x(t, s) = (K_i x)(t, s) \quad (i = 1, \dots, 7) \quad (7)$$

называется однородным интегральным уравнением типа Романовского второго рода, соответствующим уравнению (6).»

Классификация уравнений (6) и (7) проведена в соответствии с видом, входящих в операторы L , M и N ядер (вырожденные, симметричные, непрерывные в целом, интегрально ограниченные) и пределов интегрирования: постоянные (уравнения типа Романовского), переменные (уравнения Вольтерра-Романовского) и смешанные (уравнения Вольтерра-Фредгольма-Романовского). В дальнейшем будем рассматривать операторы и уравнения типа Романовского с частными интегралами.

Свойства операторов (5) изучены автором в пространстве непрерывных функций $C(D)$ и пространстве Лебега $L^p(D)$ ($1 \leq p \leq \infty$). Оператор K в пространстве непрерывных функций исследовался в работах Ю. Аппеля (J. Appell), А.С. Калитвина, П.П. Забрейко, Е.В. Фроловой, О.П. Околелова, в которых установлено, что из действия оператора K в пространстве $C(D)$ вытекает его непрерывность. Из непрерывности оператора Π вытекает непрерывность оператора K_7 , действующего в пространстве $C(D)$. Для операторов K_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) с применением теоремы Банаха о замкнутом графике доказано, что если оператор $C + K_i$ с частными интегралами действует в пространстве $C(D)$, то он непрерывен. Здесь $C = (Cx)(t, s) = c(t, s)x(t, s)$. В [Калитвин, 2014: 18] определены достаточные условия действия операторов K_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) в простран-

стве $C(D)$: для того чтобы оператор $C + K_i$ был непрерывным линейным оператором, достаточно, чтобы функция $c(t, s)$ была непрерывна, а ядра $l(t, s, \tau)$, $m(t, s, \sigma)$, $n(t, s, \tau, \sigma)$ непрерывны в целом и интегрально ограничены в $C(D)$, причем справедлива следующая оценка нормы оператора

$$\|C + K_i\| \leq \sup \left(|c(t, s)| + \int_a^b |l(t, s, \tau)| d\tau + \int_a^b |m(t, s, \sigma)| d\sigma + \int_a^b \int_a^b |n(t, s, \tau, \sigma)| d\tau d\sigma \right).$$

Обозначим через $\mathcal{L}$ пространство непрерывных линейных операторов, действующих в $C(D)$, а через $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_0$ – множества операторов

$$C \circ \Pi + L \circ \Pi + M \circ \Pi + N \circ \Pi$$

и

$$C \circ \Pi + L \circ \Pi + M \circ \Pi + N$$

соответственно.

Критерий действия даёт полную характеристику операторов, входящих в $\mathcal{L}_i$ ($i = 1, 2$). Из него следует, что $\mathcal{L}_i$ – замкнутое собственное подпространство пространства $\mathcal{L}$.

Пространство $\mathcal{L}$ с естественной операцией композиции операторов в качестве умножения является банаховой алгеброй. В работах [Калитвин, 2014: 36; Фролова, 2000: 51; Appell, 2004: 25-32] показано, что подпространство операторов с частными интегралами является подалгеброй алгебры $\mathcal{L}$, причем композиции таких операторов являются операторами с частными интегралами того же вида. Для операторов типа Романовского аналогичное утверждение не имеет места [Елецких, 2005: 38].

В пространствах Лебега получены критерии регулярности операторов типа Романовского с частными интегралами вида

$$R_1 = K \circ \Pi, R_2 = C + L \circ \Pi + M \circ \Pi + N, R_3 = C + L \circ \Pi + M \circ \Pi + N \circ \Pi, \\ R_4 = C + L + M + N \circ \Pi,$$

где L , M и N – операторы (2) – (4).

Введем следующие обозначения:

$$(|C[x])(t, s) = |c(t, s)|x(t, s), (|L[x])(t, s) = \int_a^b |l(t, s, \tau)|x(\tau, s)d\tau, \\ (|M[x])(t, s) = \int_a^b |m(t, s, \sigma)|x(t, \sigma)d\sigma, (|N[x])(t, s) = \int_a^b \int_a^b |n(t, s, \tau, \sigma)|x(\tau, \sigma)d\tau d\sigma.$$

Оператор $R_i: X \rightarrow Y$ ($i = 1, \dots, 4$), где $X = L^p(D)$, $Y = L^q(D)$ ($1 \leq p, q \leq \infty$), регулярен тогда и только тогда, когда из X в Y действуют операторы $|C|$, $|L|$, $|M|$, $|N|$. При этом $|R_i| = |R_i|$ ($i = 1, \dots, 4$).

Для операторов типа Романовского, определяемых формулами (5), в пространстве Лебега установлен вид сопряженных операторов к операторам K_i ($i = 1, 2, \dots, 7$). Если L , M и N – регулярные операторы, то сопряженными к этим операторам будут операторы

$$(L^*y)(t, s) = \int_a^b l(\tau, s, t)y(\tau, s)d\tau, (M^*y)(t, s) = \int_a^b m(t, \sigma, s)y(t, \sigma)d\sigma, \\ (N^*y)(t, s) = \int_a^b \int_a^b n(\tau, \sigma, t, s)y(\tau, \sigma)d\tau d\sigma.$$

Операторами, сопряженными к операторам K_i ($i = 1, 2, \dots, 7$), будут следующие операторы:

$$\begin{aligned} K_1^* &= \Pi \circ L^* + M^* + N^*, K_2^* = \Pi \circ L^* + M^* + \Pi \circ N^*, \\ K_3^* &= L^* + \Pi \circ M^* + N^*, K_4^* = L^* + \Pi \circ M^* + \Pi \circ N^*, \\ K_5^* &= L^* + M^* + \Pi \circ N^*, K_6^* = \Pi \circ L^* + \Pi \circ M^* + N^*, \\ K_7^* &= \Pi \circ L^* + \Pi \circ M^* + \Pi \circ N^*. \end{aligned}$$

Их вид найден с помощью теоремы Фубини и определения сопряженного оператора.

Для уравнения (6) типа Романовского с частными интегралами получены критерии фредгольмовости в случае непрерывных в целом и интегрально ограниченных ядер операторов K_i ($i = 1, \dots, 4$), определяемых формулами (5). Установлено, если ядра $l(t, s, \tau)$, $m(t, s, \sigma)$, $n(t, s, \tau, \sigma)$ непрерывные в целом и интегрально ограниченные функции на $D \times [a, b]$ и $D \times D$ соответственно, то фредгольмовость в $C(D)$ оператора $I - K_i$ ($i = 1, 2$) равносильна фредгольмовости в $C(D)$ оператора $I - M$, а при $i = 3, 4$ равносильна фредгольмовости оператора $I - L$. При этом фредгольмовость уравнения $x = K_i x + f$ ($i = 1, \dots, 4$) равносильна при $i = 1, 2$ обратимости уравнения $x = Mx + f$, а при $i = 3, 4$ – обратимости уравнения $x = Lx + f$. Здесь I – тождественный оператор.

В случае вырожденных ядер

$$\begin{aligned} l(t, s, \tau) &= \sum_{i=1}^p l_i(t, s) a_i(\tau), m(t, s, \sigma) = \sum_{j=1}^q m_j(t, s) b_j(\sigma), \\ n(t, s, \tau, \sigma) &= \sum_{k=1}^r n_k(t, s) c_k(\tau, \sigma), \end{aligned}$$

где l_i, a_i ($i = 1, 2, \dots, p$), m_j, b_j ($j = 1, 2, \dots, q$), n_k, c_k ($k = 1, 2, \dots, r$) – непрерывные функции, а системы функций $\{a_i | i = 1, 2, \dots, p\}$ и $\{b_j | j = 1, 2, \dots, q\}$ ортонормированы, фредгольмовость уравнения $x = K_i x + f$ равносильна условию

$$D_1(t) = \begin{vmatrix} 1 - v_{11}(t) & \cdots & -v_{1q}(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ -v_{q1}(t) & \cdots & 1 - v_{qq}(t) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ для } i = 1, 2,$$

$$v_{jk} = \int_a^b b_j(\sigma) m_k(t, \sigma) d\sigma \quad (j, k = 1, \dots, q)$$

и условию

$$D_2(s) = \begin{vmatrix} 1 - \mu_{11}(s) & \cdots & -\mu_{1p}(s) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ -\mu_{p1}(s) & \cdots & 1 - \mu_{pp}(s) \end{vmatrix} \neq 0 \text{ для } i = 3, 4,$$

$$\mu_{ij}(s) = \int_a^b a_i(\tau) l_j(\tau, s) d\tau \quad (i, j = 1, \dots, p).$$

Рассмотрим теперь пространство $L^p = L^p(D)$. Уравнение (6) при $i = 1$ и $i = 2$ равносильно уравнению

$$(I - M) \circ (I - L \circ \Pi) x = f + (N \circ \Pi^j + M \circ (L \circ \Pi)) x \quad (8)$$

при $j = 0$ и $j = 1$ соответственно. Поэтому в случае существования обратных операторов $(I - M)^{-1}$ и $(I - L \circ \Pi)^{-1}$ уравнение (8) эквивалентно уравнению

$$(I - P)x = g, \quad (9)$$

где

$$P = (I - L \circ \Pi)^{-1} \circ (I - M)^{-1} \circ (N \circ \Pi^j + M \circ (L \circ \Pi)),$$

$$g = (I - L \circ \Pi)^{-1} \circ (I - M)^{-1} f.$$

Для того чтобы оператор $I - K_i$ ($i = 1, 2$) был обратим в пространстве L^p , достаточно, чтобы в этом пространстве были обратимы операторы $I - M$, $I - L \circ \Pi$, $I - P$. Аналогичное утверждение справедливо для случая $i = 3, 4$: оператор $I - K_i$ обратим в L^p , если обратимы в пространстве L^p операторы $I - L$, $I - M \circ \Pi$, $I - H$, где

$$H = (I - L)^{-1} \circ (I - M \circ \Pi)^{-1} \circ (N \circ \Pi^j + L \circ (M \circ \Pi)).$$

Так как операторы $N \circ \Pi^j + M \circ (L \circ \Pi)$ и $N \circ \Pi^j + L \circ (M \circ \Pi)$ при естественных условиях являются двумерными интегральными операторами, то уравнения (9) и уравнение $(I - H)x = v$, где $v = (I - L)^{-1} \circ (I - M \circ \Pi)^{-1} f$, есть обычные интегральные уравнения, к которым можно применять все основные результаты классической теории интегральных уравнений.

Для уравнения (6) в пространстве L^p в [Елецких, 2005: 95-97] доказана альтернатива Фредгольма в предположении о непрерывности операторов L , M , N , компактности операторов $(L \circ \Pi)^2$ и $N \circ \Pi^i + L \circ (M \circ \Pi)$ ($i = 1, 2$) и выполнения условия $1 \notin \sigma(M)$:

1) либо уравнения $x = K_i x + f$ ($i = 1, 2$) и $y = K_i^* y + g$ ($i = 1, 2$) разрешимы при любых правых частях и их решения единственны;

2) либо однородные уравнения $x = K_i x$ и $y = K_i^* y$ имеют одинаковое число линейно-независимых решений $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$ соответственно.

В пространстве $C(D)$ непрерывных функций условия фредгольмовости уравнений (6) формулируются в зависимости от вида ядер операторов L , M и N . Для непрерывных в целом и интегрально ограниченных ядер альтернатива Фредгольма для уравнения $x = K_i x + f$ ($i = 1, 2$) ($x = K_i x + f$ ($i = 3, 4$)) справедлива точно тогда, когда $1 \notin \sigma(M)$ ($1 \notin \sigma(L)$). С другими свойствами операторов и уравнений типа Романовского с частными интегралами можно детально ознакомиться в приведённой ниже литературе. Основные результаты были получены с применением общей и спектральной теории линейных операторов, а также методов теории интегральных уравнений.

Таким образом, из приведенного обзора можно сделать вывод о том, что свойства операторов типа Романовского с частными интегралами лежат в основе исследования разрешимости соответствующих уравнений типа Романовского и могут быть использованы при исследовании интегральных уравнений некоторых прикладных задач.

Список литературы

1. Елецких И.А. Вопросы теории операторов и уравнений типа Романовского с частными интегралами: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Липецк, 2005. 112 с.
2. Калитвин А.С. Интегральные уравнения типа В.И. Романовского с частными интегралами. Липецк: ЛГПУ, 2014. 195 с.
3. Фролова Е.В. Линейные операторы с частными интегралами в пространстве непрерывных функций: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. Липецк, 2000. 123 с.

4. Appell J. A note on the Fredholm property of partial integral equations of Romanovskij type / J. Appell, I.A. Eletsikh, A.S. Kalitvin // J. Integral Equ. Applications. 2004. V. 16, № 1. P. 25-32.

ON ROMANOVSKY TYPE OPERATORS AND EQUATIONS WITH PARTIAL INTEGRALS

I.A. Yeletsikh

Bunin Yelets State University

Cand. Sci. (Phys.–Math.), associate professor
yeletsikh.irina@yandex.ru

Yelets

Abstract. The article presents the problem of the theory of Markov chains, formulated in 1932 by the famous Soviet mathematician V.I. Romanovskii, we introduce the definition of operators of Romanovskii type and classify theirs. We investigate linear Romanovsky type operators with partial integrals in the space of continuous functions. The properties of such operators underlie the investigation of the solvability of the corresponding Romanovsky type equations and can be used in the investigation of integral equations of some applied problems. The main results are obtained using the general and spectral theory of linear operators, as well as the methods of the theory of integral equations. In the under investigation, various classes of such operators (with continuous, degenerate, with global continuous and indecomposable kernels) and their spaces are studied. Criteria for the Fredholm property, and invertibility of Romanovsky type operators with the types of kernels listed above are applied to the study of the solvability conditions for the corresponding equations. The compositions of operators are studied and a class of operators whose compositions are integral operators is singled out. Using the Riesz and Radon Theorems on the representation of linear functionals and operators in the space of continuous functions of two variables, we obtain criteria for the action of operators of Romanovsky type with partial integrals in this space. These criteria are applied to the study of the properties of spaces of Romanovsky type operators with partial integrals. Sufficient conditions for the action of such operators in the space of continuous functions and in Lebesgue spaces, criteria for regularity of operators, conditions for the existence of dual operators are obtained. The structure of dual operators in Lebesgue spaces is studied.

Keywords: operators with partial integrals, Fredholm property, linear functional, spectral theory, dual operators.

References

1. Yeletsikh I.A. (2005) Voprosy teorii operatorov i uravneniy tipa Romanovskogo s chastnymi integralami [Questions of the theory of operators and equations of Romanovskii type with partial integrals]: Diss. ... kand. fiz.-matem. nauk. Lipetsk. 112 p.
2. Kalitvin A.S. (2014) Integral'niye uravneniya tipa V.I. Romanovskogo s chastnymi integralami [Integral equations of Romanovskii type with partial integrals] Lipetsk. 195 p.
3. Frolova Ye.V. (2000) Linejnye operatory s chastnymi integralami v prostranstve nepre-ryvnyh funkciy [Linear operators with partial integrals in the space of continuous functions]: Diss. ... kand. fiz.-matem. nauk. Lipetsk. 123 p.
4. Appell J. (2004) A note on the Fredholm property of partial integral equations of Romanovskij type / J. Appell, I.A. Eletsikh, A.S. Kalitvin // J. Integral Equ. Applications. V. 16, № 1. P. 25-32.

УДК
519.6,
519.7**КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА
СТАБИЛИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМОЙ МАЯТНИКОВОЙ
СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ****Елена Викторовна Игонина**
к.ф.-м.н., доцент
elenaigonina7@mail.ru
г. ЕлецЕлецкий государственный
университет им. И.А. Бунина

Аннотация. Сложность большого количества современных систем управления зачастую не позволяет получить заранее полное описание процессов, протекающих внутри системы, и ее взаимодействия со средой. Достаточно часто математическая модель управляемой системы учитывает лишь допустимые области изменения ее параметров и характеристик отдельных элементов без их конкретизации. В связи с этим возникает, с одной стороны, необходимость в развитии методов исследования систем с неполной информацией, предваряющих компьютерное моделирование, а с другой стороны – в разработке и использовании новых программных средств вычислительной техники. Математические модели управляемых маятниковых систем служат для описания широкого класса управляемых процессов и объектов, которые обладают нестабильным поведением. В режиме реального времени эксперименты с данными системами без надлежащего контроля могут представлять опасность. Построение алгоритмов стабилизации управляемых маятниковых систем в условиях неполной информации и их компьютерная реализация являются важной прикладной задачей, связанной с анализом динамических режимов функционирования управляемых гироскопических и транспортных систем. В статье на основе метода функций Ляпунова и построения логического регулятора в условиях неполной информации разработан алгоритм стабилизации системы управления перевернутым маятником. С учетом полученных условий асимптотической устойчивости исследуемой системы редуцирована база правил логического регулятора, каждое правило которой сводится к нахождению значений управляющего воздействия. Приведены результаты компьютерной реализации процесса стабилизации рассматриваемой маятниковой системы в среде Visual Studio на языке C#, подтверждающие эффективность применения синтезированного логического регулятора.

Ключевые слова: управляемые системы с неполной информацией, логический регулятор, стабилизация, функция Ляпунова, система управления перевернутым маятником.

При изучении управляемых динамических систем актуальной является проблема моделирования систем с неполной информацией [1–2]. Указанные системы встречаются в случаях, когда управляемый объект (или процесс) достаточно сложен для получения его точного математического описания (математической модели), что обусловлено многообразием физических эффектов, нестационарностью объекта, наличием неконтролируемых постоянно изменяющихся внешних воздействий или дефицитом априорной информации о поведении системы. Наиболее наглядным примером систем с неполной информацией являются управляемые маятниковые системы с логическим регулятором [3].

В большинстве случаев изучение устойчивости и разработка алгоритмов стабилизации моделей управляемых маятниковых систем базируется на изучении модели перевернутого маятника. Возрастающий интерес к проблеме устойчивости

модели перевернутого маятника объясняется значительным расширением класса реальных управляемых объектов и процессов, имеющих аналогичную математическую модель. В космической отрасли с позиции перевернутого маятника можно рассматривать модель ракеты на старте или солнечные батареи искусственных спутников. С помощью модели перевернутого маятника можно описать динамику составных частей сложных управляемых технических систем, например, подсистемы звеньев роботов-манипуляторов, шагающих роботов и других многосвязных управляемых систем.

Завершающим этапом разработки алгоритма стабилизации любой управляемой системы является его апробация. В случаях, когда реальные испытания процесса стабилизации затруднены из-за финансовых или физических препятствий или могут дать непредсказуемый результат, целесообразным является выполнение компьютерной реализации исследуемого алгоритма. Наиболее эффективным для выполнения компьютерной реализации алгоритмов стабилизации управляемых систем с логическими регуляторами является использование проблемно-ориентированных языков программирования, структуры данных которых отражают структуру некоторой предметной области. Как правило, такие языки являются достаточно простыми, поскольку они не предполагают использования вне данной области. В настоящей статье с помощью построения логического регулятора разработан алгоритм стабилизации системы управления перевернутым маятником и приведена его программная реализация в среде Visual Studio на языке C#.

Система управления перевернутым маятником представляется моделью вида:

$$\dot{x} = f(x) + b(x)u, \quad (1)$$

где $x = (x_1 \ x_2)^T$ – вектор состояния, $f(x) = (x_2 \ g \sin(x_1)/l)^T$, $b(x) = (0 \ -1/((m+M)l^2))^T$, x_1 – угол отклонения маятника от вертикали, x_2 – угловая скорость, u – управляющее воздействие, оказываемое на каретку и создаваемое регулятором, l – длина стержня, удерживающего маятник, m – масса маятника, M – масса каретки, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – гравитационная постоянная. Переменные x_1 и x_2 определены соотношениями $x_1 \in [-80, 80]$, $x_2 \in [-30, 30]$.

Процесс стабилизации маятника заключается в его удержании в верхнем вертикальном положении за счет горизонтального перемещения каретки. Для модели (1) определим функцию Ляпунова $V: R^n \rightarrow R$, $V(x) = x^T P x$, где $P \in R^{n \times n}$ – положительно определенная матрица. Производная функции Ляпунова примет вид $\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = G_1(x) + G_2(x)u(x)$, где $G_1(x) = f^T(x)P x + x^T P b(x)$, $G_2(x) = b^T(x)P x + x^T P b(x)$.

Теорема 1 [3]. Пусть задана система вида (1), для которой $x = 0 \in R_n$ является состоянием равновесия. Пусть существует положительно определенная неограниченная функция $V: R_n \rightarrow R$, $V(x) = x^T P x$, $P \in R_{n \times n}$, удовлетворяющая свойствам:

$$1) G_1(x) \leq 0 \quad \forall x \in G_2^0,$$

$$2) u_i(x) \leq -G_1(x) / G_2(x) \text{ для } x \in A_i \cap G_2^+ \text{ и } u_i(x) \geq -G_1(x) / G_2(x) \text{ для } x \in A_i \cap G_2^-, \\ i = 1, 2, \dots, r,$$

$$3) \text{ множество } \{x \in E \mid \dot{V}(x) = 0\} \text{ не содержит решений, кроме тривиального, } x(t) = 0 \text{ для } t > 0.$$

Тогда система (1) асимптотически устойчива в целом в начале координат.

На основе вышеприведенной теоремы 1 выполним разработку процесса стабилизации системы управления перевернутым маятником. Задача управления, вырабатываемого логическим регулятором, состоит в стабилизации перевернутого маятника в вер-

тикальном положении на возможно более продолжительное время за счет горизонтального перемещения каретки. Построение логического регулятора начинается с процедуры фаззификации [3]. Лингвистическим термы переменных x_1 и x_2 характеризуются значениями: положительный (П), нуль (Н) и отрицательный (О). В процедуре вывода логического регулятора используются операторы MIN и MAX [3], с помощью которых формируется база правил, представленных в табл. 1.

Табл. 1

База правил логического регулятора

Правило, Π_i	Антецедент		Консеквент, u_i
	x_1	x_2	
1	П	П	u_1
2	О	О	u_2
3	П	О	u_3
4	О	П	u_4
5	П	Н	u_5
6	О	Н	u_6
7	Н	П	u_7
8	Н	О	u_8
9	Н	Н	u_9

В первом столбце табл. 1 указаны номера правил, во втором и третьем столбцах даны значения переменных x_1 и x_2 в антецеденте каждого из девяти правил, в третьем столбце приведены значения управления u в консеквенте каждого правила. В структуре логического регулятора используется дефаззификация методом взвешенной суммы [3]. Суммированием вычисляются параметры–консеквенты u_i в девяти правилах управления.

Таким образом, процедура построения алгоритма стабилизации сводится к нахождению значений u_i , для которых систему (1) можно стабилизировать логическим регулятором. Процесс стабилизации перевернутого маятника представлен следующими этапами.

Этап 1. Рассмотреть возможную функцию Ляпунова и убедиться, что она является положительно определенной.

Для рассматриваемого случая функция вида $V(x)=x^TPx = x_1^2 + x_2^2$, где $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, определяет функцию Ляпунова и является положительно определенной.

Если $\|x\| \rightarrow \infty$, то $V(x) \rightarrow \infty$, выполняется условие $V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$.

Этап 2. Найти производную функции Ляпунова и показать, что множество $\{x \in E: \dot{V}(x) = 0\}$ не содержит траекторий состояния кроме тривиального.

В рассматриваемом в настоящей работе случае имеем, что $\dot{V}(x) = 2x_2 \left(x_1 + \frac{g}{l} \sin(x_1) - \frac{1}{(m+M)l^2} u \right)$, причем $\dot{V}(0) = 0$. В предположении, что существует траектория, для которой $x_2(t) = 0$ и $x_1(t) \neq 0$, выполнено соотношение $\dot{x}_2(t) = \frac{g}{l} \sin(x_1(t)) - \frac{1}{(m+M)l^2} u(t) \neq 0$, которое означает, что $x_2(t)$ не является постоянной. Следовательно, траектория $x(t) = 0$ является положительной траекторией состоя-

ния, для которой $\dot{V}(x) = 0$. Таким образом, множество $\{x \in E: \dot{V}(x) = 0\}$ не содержит траекторий системы, кроме тривиальной траектории $x(t) = 0$ для $t \geq 0$.

Этап 3. Определить множества $G_1(x)$, $G_2(x)$, G_2^0 , G_2^- , G_2^+ следующим образом:

$$G_1(x) = 2x_2 \left(x_1 + \frac{g}{l} \sin(x_1) \right), \quad G_2(x) = -\frac{2x_2}{(m+M)l^2},$$

$$G_2^0 = \{(x_1, 0) \in X: x_1 \in [-1, 1]\}, \quad G_2^- = \{(x_1, x_2) \in X: x_2 > 0\},$$

$$G_2^+ = \{(x_1, x_2) \in X: x_2 < 0\}, \quad -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1)).$$

Этап 4. Если $x \in G_2^0$, то $x_2 = 0$ и $G_1(x) = 0$.

Этап 5. Реализовать правила, составляющие базу правил логического регулятора, с учетом свойств, введенных для множеств в шаге 3.

Получим, что для системы (1) база правил логического регулятора будет представлена девятью правилами следующего вида:

П₁: x_1 есть П, x_2 есть П. Имеем $A_1 = (0, 80] \times (0, 30]$, $A_1 \cap G_2^+ = \emptyset$ и $A_1 \cap G_2^- = (0, 80] \times (0, 30]$. Таким образом, $u_1(x) \geq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1))$. Выберем функцию $u_1(x) = l(m+M)(x_1 l + g)$, которая удовлетворяет условию 2) теоремы 1.

П₂: x_1 есть О, x_2 есть О. Имеем $A_2 = [-80, 0] \times [-30, 0]$, $A_2 \cap G_2^+ = [-80, 0] \times [-30, 0]$ и $A_2 \cap G_2^- = \emptyset$. Таким образом, $u_2(x) \leq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1))$.

Выберем функцию $u_2(x) = l(m+M)(x_1 l - g)$, удовлетворяющую условию 2) теоремы 1.

П₃: x_1 есть П, x_2 есть О. Имеем $A_3 = (0, 80] \times (-30, 0]$, $A_3 \cap G_2^- = \emptyset$ и $A_3 \cap G_2^+ = (0, 80] \times (-30, 0]$. Таким образом, $u_3(x) \leq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1))$. Выберем функцию $u_3(x) = -x_1$, которая удовлетворяет условию 2) теоремы 1.

П₄: x_1 есть О, x_2 есть П. Имеем $A_4 = [-80, 0] \times (0, 30]$, $A_4 \cap G_2^+ = \emptyset$ и $A_4 \cap G_2^- = [-80, 0] \times (0, 30]$. Таким образом, $u_4(x) \geq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1))$. Выберем функцию $u_4(x) = -x_1$, удовлетворяющую условию 2) теоремы 1.

П₅: x_1 есть П, x_2 есть Н. Имеем $A_5 = (0, 80] \times (-5, 5)$. Тогда возможны следующие два случая:

а) для $x \in A_5 \cap G_2^- = (0, 80] \times [0, 5)$ имеем $u_5(x) \geq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1))$;

б) для $x \in A_5 \cap G_2^+ = (0, 80] \times (-5, 0]$ имеем $u_5(x) \leq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1))$.

Для выполнения указанных условий а) и б) выберем функцию $u_5(x) = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1))$.

П₆: x_1 есть О, x_2 есть Н. Имеем $A_6 = [-80, 0] \times (-5, 5)$. Возможны следующие случаи:

а) для $x \in A_6 \cap G_2^- = [-80, 0] \times [0, 5)$ имеем $u_6(x) \geq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1))$;

б) для $x \in A_6 \cap G_2^+ = [-80, 0) \times (-5, 0]$ имеем $u_6(x) \leq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1))$.

Для выполнения указанных условий а) и б) выберем функцию $u_6(x) = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1))$.

П7: x_1 есть Н, x_2 есть П. Имеем $A_7 = (-10, 10) \times (0, 30]$, $A_7 \cap G_2^+ = \emptyset$ и $A_7 \cap G_2^- = (-10, 10) \times (0, 30]$. Таким образом, $u_7(x) \geq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1))$. Положим $u_7(x) = l(m+M)(x_1 l + g)$. Функция $u_7(x)$ удовлетворяет условию 2) теоремы 1.

П8: x_1 есть Н, x_2 есть О. Имеем $A_8 = (-10, 10) \times [-30, 0]$, $A_8 \cap G_2^+ = (-10, 10) \times (-30, 0]$ и $A_8 \cap G_2^- = \emptyset$. Таким образом, $u_8(x) \leq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1))$. Положим $u_8(x) = l(m+M)(x_1 l - g)$. Функция $u_8(x)$ удовлетворяет условию 2) теоремы 1.

П9: x_1 есть Н, x_2 есть Н. Имеем $A_9 = (-10, 10) \times (-5, 5)$. Возможны следующие случаи:

а) для $x \in A_9 \cap G_2^+ = (-10, 10) \times (-5, 0]$ имеем $u_9(x) \leq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1))$;

б) для $x \in A_9 \cap G_2^- = (-10, 10) \times (0, 5)$ имеем $u_9(x) \geq -\frac{G_1(x)}{G_2(x)} = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1))$.

Для выполнения указанных условий а) и б) положим $u_9(x) = l(m+M)(x_1 l + g \sin(x_1))$.

По теореме 1 маятниковая система (1), с построенным логическим регулятором, является асимптотически устойчивой в целом в начале координат.

Программа, реализующая процесс стабилизации управляемой маятниковой системы (1), на языке C# будет представлена следующими модулями: 1) объявление переменных (описание и обозначение входящих величин); 2) модуль инициализации (выполняется построение «окна», в котором будут отражены конкретные числовые значения входящих величин и результаты компьютерного моделирования в виде графиков); 3) вспомогательный модуль (описание команд для построения графика, изменения цвета и толщины линий, обозначения координатных осей и т.д.); 4) модуль, содержащий описание базы правил логического регулятора; 5) основной модуль, реализующий численное решение системы (4) с учетом начальных данных.

На рис. 1 приведен фрагмент листинга программы (модуль 4), в котором для описания правил использованы команды if (если), else (иначе), && (и). Оценка начальных условий проведена с учетом сопоставления лингвистических термов реальным значениям входящих величин.

```

Form1.cs  X
C# Pendulum

if ((x1 > 0 && x1 < 1.4) && (x2 > 0 && x2 < 0.52)) {
    bot1 = 0; top1 = 1.4;
    bot2 = 0; top2 = 0.52;
    u = 1 * (mP + mT) * (x1 * 1 + G);
} else if ((x1 >= -1.4 && x1 <= 0) && (x2 >= -0.52 && x2 <= 0)) {
    bot1 = -1.4; top1 = 0;
    bot2 = -0.52; top2 = 0;
    u = 1 * (mP + mT) * (x1 * 1 - G);
} else if ((x1 > 0 && x1 <= 1.4) && (x2 > -0.52 && x2 <= 0)) {
    bot1 = 0; top1 = 1.4;
    bot2 = -0.52; top2 = 0;
    u = -x1;
} else if ((x1 >= -1.4 && x1 < 0) && (x2 > 0 && x2 <= 0.52)) {
    bot1 = -1.4; top1 = 0;
    bot2 = 0; top2 = 0.52;
    u = -x1;
} else if ((x1 > 0 && x1 <= 1.4) && (x2 > -0.09 && x2 < 0.09)) {
    bot1 = 0; top1 = 1.4;
    bot2 = -0.09; top2 = 0.09;
}
    
```

Рис. 1. Фрагмент листинга программы в С#

При проведении компьютерного моделирования системы (1) использованы следующие значения параметров маятника $m = 2$ кг, $M = 8$ кг, $2l = 1$ м. Для выполнения вычислительных расчетов значения входящих величин x_1 и x_2 записываются в радианах и радиан/сек соответственно. На рис. 2 представлены графики угла отклонения при условиях $x_1 = -8^0$ и $x_1 = 8^0$ соответственно.

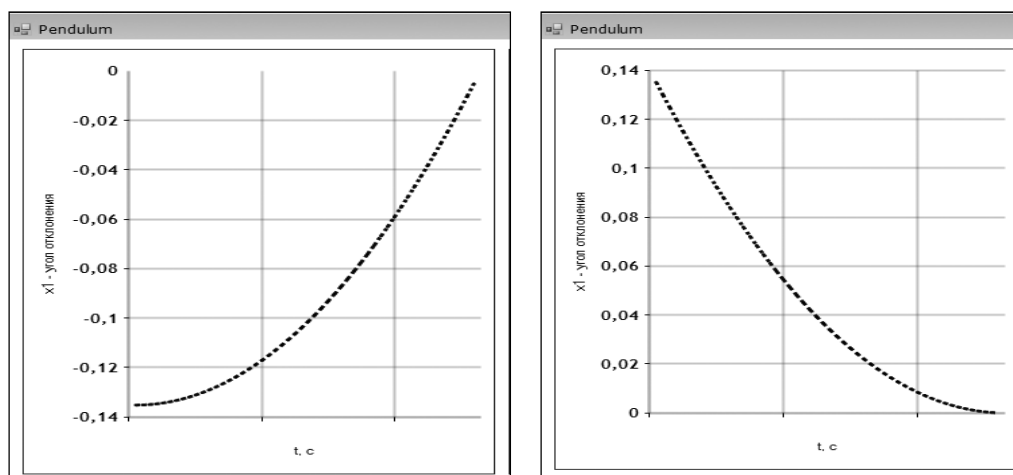


Рис. 2. Графики угла отклонения при $x_1 = -8^0$ и $x_1 = 8^0$

Результаты компьютерного моделирования системы (1), полученные и для других начальных условий, подтверждают эффективность применения синтезированного логического регулятора. Предложенная в настоящей статье процедура стабилизации управляемой маятниковой системы может быть использована для синтеза логических регуляторов в транспортных, гироскопических системах, а также в многосвязных системах управления сложными динамическими объектами.

Список литературы

1. Дорф Р., Бишоп Р. (2004) Современные системы управления. М.: Лаборатория базовых.

2. Афанасьев В.Н. (2007) Динамические системы управления с неполной информацией: алгоритмическое конструирование. М.: УРСС.
3. Масина О.Н., Дружинина О.В. (2011) Моделирование и анализ устойчивости некоторых классов систем управления. М.: ВЦ РАН.

COMPUTER SIMULATION OF THE PROCESS STABILIZATION OF CONTROLLED PENDULAR SYSTEMS UNDER CONDITIONS OF INCOMPLETE INFORMATION

E.V. Igonina

Can.Sci. (Phys.-Math.), associate professor
elenaigonina7@mail.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

Abstract. The complexity of a large number of modern control systems often does not allow us to obtain in advance a complete description of the processes occurring within the system and its interaction with the environment. Quite often, the mathematical model of a controlled system takes into account only allowable areas for changing its parameters and the characteristics of individual elements without specifying them. In this connection, on the one hand, there is a need to develop methods for studying systems with incomplete information that precedes computer modeling, and on the other hand the development and use of new computer software. Mathematical models of controlled pendulum systems serve to describe a wide range of controlled processes and objects that have unstable behavior. In real time, experiments with these systems without proper monitoring can be dangerous. The construction of algorithms for the stabilization of controlled pendulum systems under incomplete information and their computer implementation are an important applied problem related to the analysis of dynamic regimes for the operation of controlled gyroscopic and transport systems. In the article, based on the method of Lyapunov functions and the construction of a logic controller under incomplete information, an algorithm for stabilizing the control system of an inverted pendulum has been developed. Taking into account the obtained conditions of asymptotic stability of the investigated system, the basis of the rules of the logical controller is reduced, each rule of which reduces to finding the values of the control action. The results of the computer implementation of the stabilization process of the pendulum system under consideration in a Visual Studio environment in C # language, confirming the effectiveness of using the synthesized logic controller are presented.

Keywords: controlled systems with incomplete information, logic controller, stabilization, Lyapunov function, control system of an overturned pendulum.

References

1. 1.Dorf R., Bishop R. (2004) Sovremennyy`e sistemy` upravleniya [Modern management systems]. M.: Laboratoriya bazov`x.
2. Afanas`ev V.N. (2007) Dinamicheskie sistemy` upravleniya s nepolnoj informaciej: algoritmicheskoe konstruirovaniye [Dynamic control systems with incomplete information: algorithmic design]. M.: URSS.
3. Masina O.N., Druzhinina O.V. (2011) Modelirovaniye i analiz ustojchivosti nekotory`x klassov sistem upravleniya [Modeling and analysis of the stability of some classes of control systems]. M.: VCz RAN.

УДК 004.4 | ПРИМЕНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СПИСКОВ ПРИ РАБОТЕ
С УПРАВЛЯЕМЫМИ ФОРМАМИ

Дмитрий Васильевич Корниенко

к.ф.-м.н., доцент
dmkornienko@mail.ru
г. Елец

Елецкий государственный
университет им. И.А. Бунина

Аннотация. Статья посвящена описанию применения динамического списка в управляемых формах. Динамические списки служат для отображения данных на формах. Сами данные берутся из таблиц базы данных.

Ключевые слова: управляемые формы, динамический список, табличная часть, обработчик события, обработка.

В данной статье рассматривается вопрос применения динамического списка на форме обработки. Обработка будет представлять собой механизм подбора необходимой номенклатуры в документ реализации товара. Подбор будет реализован в виде «корзины», которая накапливает необходимый товар, после чего перемещает его в табличную часть документа. В самой форме обработки номенклатура будет выводиться с показателем цены и остатка данного товара на соответствующем складе.

Динамические списки - это определенный тип данных, служащий для отображения данных на управляемых формах в системе 1С:Предприятие 8 [2, стр. 634]. Сами данные берутся из таблиц базы данных, которые указывает разработчик прикладного решения.

Весь механизм работы основан на системе компоновки данных. Он предоставляет возможности для сортировки, группировки, отбора, поиска, и условного оформления получаемых данных. Причем источником данных выступает запрос, который формируется системой автоматически или пишется разработчиком вручную.

В случае добавления на форму реквизита типа Динамический список программист может выбрать один из двух способов формирования запроса к таблицам базы данных. Первый способ заключается в задании основной таблицы (поле Основная таблица), которая и будет являться источником данных для системы при автоматическом формировании запроса. Второй способ – это указание использования произвольного запроса, при котором будет доступно ручное формирование запроса.

При использовании ручного формирования запроса можно задавать выборку данных из нескольких таблиц.

При этом желательно указать основную таблицу в запросе, чтобы динамический список «мог определить», какие данные будут главными, а какие – второстепенными [3, стр. 521]. С другой стороны, если в запросе не получается выделить основную таблицу, то ее можно не указывать, и тогда динамический список не будет предоставлять команды, связанные с основной таблицей и будет существенно снижена производительность получения данных динамическим списком.

В целях ее повышения, желательно все соединения, которые указаны в произвольном запросе для получения дополнительных данных, делать необязательными с помощью расширения языка запросов СКД [4, стр. 35].

Настройка динамического списка осуществляется путем нажатия на гиперссылку Открыть свойства Настройка списка. Установка настроек списка осуществляется таким же образом, как и подобные операции в СКД.

Создадим объект конфигурации обработка ПодборСКорзиной. Для данного объекта укажем форму (Форма) и разместим на ней реквизит Список типа Динамический список. Для формирования запроса к таблицам базы данных будем использовать произвольный запрос с параметрами. Следовательно, первоначальная установка значений параметров должна выполняться в обработчике ПриСозданииНаСервере. В качестве параметров укажем ВидЦены, Организация, Склад, УникальныйИдентификатор (ключевой параметр).

```

&НаСервере
Процедура ПриСозданииНаСервере(Отказ, СтандартнаяОбработка)
    список.Параметры.УстановитьЗначениеПараметра("склад", параметры.склад);
    список.Параметры.УстановитьЗначениеПараметра("организация", парамет-
ры.организация);
    список.Параметры.УстановитьЗначениеПараметра("видцены", парамет-
ры.видцены);
КонецПроцедуры

```

В качестве источников данных для запроса укажем следующие таблицы:

- 1) таблица справочника Номенклатура - НоменклатураСПР;
- 2) виртуальная таблица регистра ОстаткиНоменклатуры - ОстаткиНоменклатурыОстатки;
- 3) виртуальная таблица регистра ЦеныНоменклатуры - ЦеныНоменклатурыСрезПоследних.

Из данных таблиц выберем соответствующие поля и укажем виды соединений [1, стр. 215].

```

ВЫБРАТЬ
    НоменклатураСПР.Ссылка КАК Номенклатура,
    ОстаткиНоменклатурыОстатки.КоличествоОстаток КАК КоличествоОстаток,
    ЦеныНоменклатурыСрезПоследних.Цена КАК Цена
ИЗ
    Справочник.Номенклатура КАК НоменклатураСПР
    ЛЕВОЕ СОЕДИНЕНИЕ РегистрНакопления.ОстаткиНоменклатуры.Остатки(
        Организация = &Организация
        И Склад = &Склад) КАК ОстаткиНоменклатурыОстат-
ки
    ПО (ОстаткиНоменклатурыОстатки.Номенклатура = Номенклату-
раСПР.Ссылка)
    ЛЕВОЕ СОЕДИНЕНИЕ РегистрСведе-
ний.ЦеныНоменклатуры.СрезПоследних( ВидЦены = &ВидЦены) КАК ЦеныНоменкла-
турыСрезПоследних
    ПО (ЦеныНоменклатурыСрезПоследних.Номенклатура = Номенклату-
раСПР.Ссылка)

```

Далее на форме разместим табличную часть (ТабЧасть) в которой создадим рек-визиты Номенклатура, Цена, Количество соответствующих типов.

Данная табличная часть в дальнейшем будет играть роль корзины для накопления выбранного товара пользователем. Для того чтобы перенести товар из корзины в документ реализации необходимо добавить соответствующую команду (ПеренестиВДокумент) и создать обработчик данной команды. Причем процедуры будут реализованы как на стороне клиента, так и на стороне сервера.

‡НаКлиенте

Процедура ПеренестиВДокумент(Команда)

адрес = ПеренестиВДокументСервер();

ОповеститьОВыборе(адрес);

КонецПроцедуры

‡НаСервере

Функция ПеренестиВДокументСервер()

Адрес = ПоместитьВоВременноеХранилище(ДанныеФормыВЗначение(ТабЧасть,тип("ТаблицаЗначений")) ,параметры.уникальныйИдентификатор);

возврат Адрес;

КонецФункции

Форма обработки ПодборСКорзиной будет открываться из формы документа **Продажа товара**. Поэтому в модуле формы документа пропишем обработчик команды **ПодборНоменклатуры**:

‡НаКлиенте

Процедура ПодборНоменклатуры(Команда)

параметрыФормы = новый структура("склад, организация, видцены, уникальныйИдентификатор", объект.Склад, объект.Организация, объект.ВидЦены, ЭтаФорма.УникальныйИдентификатор);

ОткрытьФорму("Обработка.ПодборСКорзиной.Форма.Форма",параметрыФормы,ЭтаФорма);

КонецПроцедуры

Следующей задачей будет создание формы (ЗапросКоличество) для указания количества выбранного товара. В модуле данной формы пропишем процедуры, отвечающие за заполнение реквизитов формы и обработку команд.

‡НаСервере

Процедура ПриСозданииНаСервере(Отказ, СтандартнаяОбработка)

Номенклатура = Параметры.Номенклатура;

Цена = Параметры.Цена;

КонецПроцедуры

‡НаКлиенте

Процедура ОК(Команда)

Закрыть(Количество);

КонецПроцедуры

‡НаКлиенте

Процедура Отмена(Команда)

Заккрыть(Неопределено);
КонецПроцедуры

Эта форма будет открываться при выборе товара пользователем в форме ПодборСКорзиной. Для этих целей создадим обработчик:

```

&НаКлиенте
Процедура списокВыбор(Элемент, ВыбраннаяСтрока, Поле, СтандартнаяОбработка)
    СтандартнаяОбработка = ложь;
    текст = элементы.список.ТекущиеДанные;
    стр = новый структура("номенклатура, цена", текст.номенклатура, текст.цена);
    ОткрытьФорму("Обработка.ПодборСКорзиной.Форма.ЗапросКоличество", стр, "",
Новый ОписаниеОповещения("ОбработкаВыбораКоличества", ЭтотОбъект, Новый
Структура("стр", стр)), );
КонецПроцедуры
    
```

```

&НаКлиенте
Процедура ОбработкаВыбораКоличества(Результат, ДополнительныеПараметры)
Экспорт
    если Результат <> Неопределено тогда
        стр = ДополнительныеПараметры.стр;

        запись = ТабЧасть.Добавить();
        Запись.Номенклатура = стр.номенклатура;
        Запись.Цена = стр.Цена;
        Запись.количество = результат;
    конецЕсли;
КонецПроцедуры
    
```

В заключении остается написать обработчик события для формы документа Продажа товара.

```

&НаКлиенте
Процедура ОбработкаВыбора(ВыбранноеЗначение, ИсточникВыбора)
    ОбработкаВыбораСервер(ВыбранноеЗначение);
КонецПроцедуры
&НаСервере
Процедура ОбработкаВыбораСервер(ВыбранноеЗначение)
    тз = ПолучитьИзВременногоХранилища(ВыбранноеЗначение);
    для каждого строка из ТЗ цикл
        стрДокумента=объект.Товары.Добавить();
        стрДокумента.Номенклатура = строка.номенклатура;
        стрДокумента.Цена = строка.Цена;
        стрДокумента.количество = строка.Количество;
        стрДокумента.Сумма = стрДокумента.Количество * стрДокумента.Цена ;
    конецЦикла;
КонецПроцедуры
    
```

Список литературы

1. Хрусталева Е.Ю. (2013) Язык запросов «1С:Предприятие 8». М.: ООО «1С-Паблишинг». 369 с.: ил. (Библиотека разработчика).
2. Радченко М.Г., Хрусталева Е.Ю. (2013) 1С:Предприятие 8.3. Практическое пособие разработчика. Примеры и типовые приемы». М.: ООО "1С-Паблишинг". 964 с.: ил. (Библиотека разработчика).
3. Габец А.П., Гончаров Д.И., Козырев Д.В., Кухлевский Д.С., Радченко М.Г. (2013) Профессиональная разработка в системе 1С:Предприятие 8. Под ред. М.Г. Радченко. М.: ООО «1С-Паблишинг». 808 с.:ил. (Библиотека разработчика).
4. Хрусталева Е.Ю. (2012) Разработка сложных отчетов в «1С:Предприятие 8». Система компоновки данных. М.: ООО «1С-Паблишинг». 484 с.: ил. (Библиотека разработчика).

**THE USE OF DYNAMIC LISTS DURING PROCESSING
WITH MANAGED FORMS**

D.V. Kornienko

Cand. Sci. (Phys.–Math.), associate professor
dmkornienko@mail.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

Abstract. The article describes the application of dynamic list in managed forms. Dynamic lists are used to display data on forms. The data itself is taken from the database tables.

Keywords: managed forms, dynamic list, table part, event handler, processing.

References

1. Khrustaleva E. Y. (2013) Iazyk zaprosov «1S:Predpriiatie 8» [Query Language "1C:Enterprise 8"]. Moscow: 1C-Publishing LLC. 369 p.: ill. (Developer library).
2. Radchenko M. G., Khrustaleva E. Y. (2013) Prakticheskoe posobie razrabotchika. Primery i tipovy'e priemy» [1C: Enterprise 8.3. A practical guide developers on. Examples and typical methods]. M.: 1C-Publishing LLC. 964 p.: ill. (Developer library).
3. Gabets A. P., Goncharov D. I., Kozыrev D. V., Kukhlevsky D. S., Radchenko M. G. (2013) Professional`naia razrabotka v sisteme 1S:Predpriiatie 8 [Professional development in 1C:Enterprise 8]. Ed. M. G. Radchenko. M.: LLC "1C-Publishing". 808 p.: ill. (Developer library).
4. Khrustaleva E. Y. (2012) Razrabotka slozhny`kh otchetov v «1S:Predpriiatie 8». Sistema komponovki danny`kh [Development of complex reports in «1C:Enterprise 8». System layout of the data]. Moscow: 1C-Publishing LLC. 484 p.: ill. (Biblioteca developer).

УДК
517.18
+ 371.3

**О СОВЕРШЕНСТВОВАНИИ ИЗУЧЕНИЯ ПОНЯТИЙ
«ПОЛИНОМ» И «РАЦИОНАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ»
В ШКОЛЕ И В ВУЗЕ**

Сергей Вячеславович Костин
старший преподаватель
kostinsv77@mail.ru
г. Москва

Московский технологический университет
(МИРЭА)

Аннотация. Важность работы по совершенствованию методики обучения школьников и студентов ключевым понятиям и утверждениям курса математики не вызывает никаких сомнений. В данной статье мы рассматриваем два крайне важных понятия как школьного, так и вузовского курса математики, а именно, понятия «полином» («многочлен») и «рациональная функция». Мы сопоставляем функциональный и алгебраический подходы к определению понятия полинома (многочлена) и делаем вывод, что в старших классах школы целесообразен переход от рассмотрения полинома как формального выражения (суммы одночленов) к рассмотрению полинома как функции. Также мы обсуждаем различные подходы к определению понятия «рациональная функция» и приводим строгое определение этого понятия. Результаты данной работы, по нашему мнению, могут быть использованы как школьными учителями математики, так и преподавателями математики в вузах.

Ключевые слова: многочлен, полином, рациональная функция, преподавание математики.

Введение

Одной из важнейших линий школьного курса математики является функционально-графическая линия. На протяжении всего курса алгебры основной школы и курса алгебры и начал математического анализа старшей школы учащиеся знакомятся с важнейшими (как для самой математики, так и для практики) функциями и классами функций.

Школьники изучают линейную функцию $y = kx + b$, квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), функцию «обратная пропорциональность» $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$), функцию «арифметический квадратный корень» $y = \sqrt{x}$, функцию «модуль» $y = |x|$, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, степенные, показательные, логарифмические функции и т. д. При этом из поля зрения большинства школьных учебников математики по непонятным причинам выпадают два чрезвычайно важных класса элементарных функций, а именно, полиномы и рациональные функции.

Возможно, это связано с тем, что авторы школьных учебников математики ориентируются на действующий государственный образовательный стандарт, составители которого забыли упомянуть в нем полиномы и рациональные функции.

Во избежание недоразумений отметим, что понятие «многочлен», конечно, присутствует в школьных учебниках математики. Однако, к сожалению, в большинстве учебников математики многочлен рассматривается исключительно как формальное выражение (то есть как алгебраическая сумма одночленов), а не как функция.

На начальном этапе изучения математики, когда учащиеся еще не готовы к восприятию понятия функции, и когда школьникам важно овладеть техникой тождествен-

ных преобразований («работой с буквами»), рассмотрение многочлена как формального выражения совершенно оправданно и не вызывает никаких вопросов.

Непонятно другое: почему в старших классах школы, когда акцент смещается в сторону математического анализа и в сторону исследования функций (в том числе, средствами математического анализа), авторы многих школьных учебников математики продолжают придерживаться «алгебраического» подхода к понятию многочлена и не переходят к трактовке многочлена как функции.

Что касается рациональных функций, то им «повезло» еще меньше, чем многочленам. В подавляющем большинстве школьных учебников математики вообще не вводится чрезвычайно важное (как для математики, так и для ее приложений) понятие рациональной функции. Вводится лишь понятие дробно-линейной функции, которое является весьма специальным частным случаем понятия рациональной функции.

В нашей статье мы обсудим некоторые вопросы, связанные с изучением понятий «полином» и «рациональная функция» в школе и в вузе.

Сравнение алгебраического и функционального подхода к понятию многочлена (полинома)

В нашей статье мы для простоты ограничимся рассмотрением многочленов (полиномов) с действительными коэффициентами, зависящих от одной действительной переменной.

Для большей четкости терминологии мы будем придерживаться следующего соглашения: термином «многочлен» мы будем называть формальное выражение (сумму одночленов), а термином «полином» мы будем называть функцию. Иначе говоря, полином — это функция, которая определена на множестве всех действительных чисел $\mathbf{R}$, причем эта функция на всем своем множестве определения может быть задана аналитически с помощью одной формулы, имеющей вид многочлена.

Многочлен степени n ($n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$) — это формальное выражение¹ вида $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$, где $c_0, c_1, \dots, c_n$ — действительные числа, причем $c_n \neq 0$. Числа $c_0, c_1, \dots, c_n$ называются *коэффициентами* многочлена. Число 0 (нуль), по определению, тоже является многочленом. Этот многочлен называется *нулевым* многочленом. Степень нулевого многочлена равна $-\infty$.

Пусть $P_n(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ ($c_n \neq 0$) — многочлен степени n , $Q_m(x) = d_m x^m + d_{m-1} x^{m-1} + \dots + d_1 x + d_0$ ($d_m \neq 0$) — многочлен степени m и пусть $n \geq m$. Многочлены $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ называются *равными*, если $m=n$ и при всех $i \in [0..n]$ имеет место равенство $c_i = d_i$. (Символом $[p..q]$, где $p, q \in \mathbf{Z}$, мы обозначаем множество $\{x \in \mathbf{Z} \mid p \leq x \leq q\}$. Это множество мы называем «*сегмент от p до q* ». Другое, более длинное название: «*отрезок целых чисел от p до q* ».)

Суммой многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ называется многочлен $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_{m+1} x^{m+1} + (c_m + d_m) x^m + (c_{m-1} + d_{m-1}) x^{m-1} + \dots + (c_1 + d_1) x + (c_0 + d_0)$. *Произведением*

¹ Некоторые авторы (см., например, [Кострикин, 2000: 181]) подходят совсем формально и определяют многочлен просто как упорядоченный набор действительных чисел $\langle c_n, c_{n-1}, \dots, c_0 \rangle$. Операции над многочленами (сложение многочленов, умножение многочленов и т.д.) определяются в этом случае как некоторые операции над упорядоченными наборами действительных чисел. Такой формальный подход, будучи абсолютно строгим с математической точки зрения, на практике тем не менее оказывается не очень удобным. Поэтому в нашей статье мы определяем многочлен не как упорядоченный набор действительных чисел, а как формальное выражение.

многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ называется многочлен $e_{m+n}x^{m+n} + e_{m+n-1}x^{m+n-1} + \dots + e_1x + e_0$, где при всех $k \in [0..m+n]$ имеет место равенство $e_k = \sum_{i=0}^k c_i d_{k-i}$ (считаем, что $c_i = 0$ при $i > n$ и $d_j = 0$ при $j > m$).

Множество всех многочленов с действительными коэффициентами, зависящих от одной переменной x , обозначается символом $\mathbf{R}[x]$. Можно доказать, что относительно введенных операций сложения и умножения многочленов множество $\mathbf{R}[x]$ является ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей (в качестве единицы выступает многочлен нулевой степени, равный числу 1) и без делителей нуля (в качестве нуля, то есть в качестве нейтрального элемента аддитивной группы кольца $\mathbf{R}[x]$, выступает нулевой многочлен). Иначе говоря, $\mathbf{R}[x]$ — это целостное кольцо или область целостности.

Отметим, что $P_n(x)$ — это просто удобный символ, служащий для краткого обозначения многочлена $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$. Запись $P_n(x)$ следует рассматривать как единый символ, то есть эту запись не надо (во всяком случае, пока мы говорим о многочленах) воспринимать как значение некоторой функции P_n в точке x .

Каждому многочлену можно поставить в соответствие определенную функцию. Функция f , которая ставится в соответствие многочлену $P_n(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ ($c_n \neq 0$), обладает следующими свойствами: 1) множеством определения и множеством прибытия функции f является множество всех действительных чисел $\mathbf{R}$, иначе говоря, функция f отображает множество всех действительных чисел $\mathbf{R}$ в себя ($f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$); 2) $(\forall x_0 \in \mathbf{R}): f(x_0) = c_n x_0^n + c_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + c_1 x_0 + c_0$.

Функция f называется *полиномом*, соответствующим многочлену $P_n(x)$. Будем говорить также, что многочлен $P_n(x)$ порождает полином f .

Для того чтобы упростить обозначения, в дальнейшем мы будем обозначать полином f символом P_n . Таким образом, в равенстве $P_n(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$ становится возможным воспринимать символ $P_n(x)$ как составной символ, а именно, как значение полинома P_n в точке x .

Пусть $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ — произвольная функция, отображающая множество действительных чисел $\mathbf{R}$ в себя. Функция f называется полиномом, если существует многочлен $P_n(x)$, который порождает функцию f .

Множество всех полиномов мы будем обозначать символом $\text{Poly}(\mathbf{R})$. Множество $\text{Poly}(\mathbf{R})$ является подмножеством множества $M(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ всех функций, отображающих множество действительных чисел $\mathbf{R}$ в себя.

Из определения полинома следует, что сумма и произведение двух полиномов снова являются полиномами. Иначе говоря, множество $\text{Poly}(\mathbf{R})$ замкнуто относительно операций сложения и умножения своих элементов. Отсюда следует, что множество всех полиномов $\text{Poly}(\mathbf{R})$ является подкольцом в кольце всех функций $M(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Кольцо $\text{Poly}(\mathbf{R})$ является ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей (в качестве единицы выступает функция, тождественно равная единице) и без делителей нуля (в качестве нуля, то есть в качестве нейтрального элемента аддитивной груп-

пы кольца $\text{Poly}(\mathbf{R})$, выступает функция, тождественно равная нулю). Иначе говоря, $\text{Poly}(\mathbf{R})$ — это целостное кольцо или область целостности.

Можно доказать (см., например, [Винберг, 1980: 17]), что отображение $\varphi: \mathbf{R}[x] \rightarrow \text{Poly}(\mathbf{R})$, ставящее в соответствие каждому многочлену $P_n(x) \in \mathbf{R}[x]$ порожаемый им полином $P_n(x) \in \text{Poly}(\mathbf{R})$, является изоморфизмом кольца $\mathbf{R}[x]$ на кольцо $\text{Poly}(\mathbf{R})$. Это означает, что соответствие между многочленами и полиномами является взаимно однозначным, а также что операции сложения и умножения многочленов «согласованы» с операциями сложения и умножения полиномов.

В некоторых курсах высшей алгебры (см., например, [Кострикин, 2000], [Куликов, 1979]), предназначенных для студентов математических факультетов университетов и педагогических вузов, рассматриваются многочлены не над полем действительных или комплексных чисел, а над произвольным ассоциативно-коммутативным кольцом с единицей K . В этом случае возможна ситуация, когда двум различным многочленам из кольца $K[x]$ соответствует один и тот же полином из кольца $\text{Poly}(K)$. Это означает, что отображение $\varphi: K[x] \rightarrow \text{Poly}(K)$ уже не является изоморфизмом (однако это отображение остается гомоморфизмом кольца $K[x]$ в кольцо $\text{Poly}(K)$).

Например, если $K = \mathbf{Z}_3$ — кольцо классов вычетов по модулю 3, то многочлены $P(x) = x$ и $Q(x) = x^3$ порождают один и тот же полином $f: \mathbf{Z}_3 \rightarrow \mathbf{Z}_3$. Действительно, $P(\bar{0}) = \bar{0} = Q(\bar{0})$, $P(\bar{1}) = \bar{1} = Q(\bar{1})$, $P(\bar{2}) = \bar{2} = \bar{8} = Q(\bar{2})$.

Какой же подход к трактовке многочлена (полинома) более уместен в средней школе — алгебраический или функциональный?

В основной школе (во всяком случае, до 7–8 класса включительно) предпочтительным (а на начальном этапе изучения алгебры — единственно возможным) является, по нашему мнению, алгебраический подход. На этом этапе основной задачей школьников является овладение техникой тождественных преобразований (сложение и умножение многочленов, приведение подобных членов, разложение многочленов на множители и т. д.). Функциональная природа многочлена здесь не играет скольконибудь существенной роли, да и не может быть в полной мере оценена школьниками.

Напротив, в старшей школе, по нашему мнению, надо переходить к рассмотрению многочлена как функции. Приведем несколько аргументов в пользу нашей точки зрения.

1. Внутренняя логика школьного курса математики. В старших классах учащиеся систематически знакомятся с самыми разными элементарными функциями (тригонометрическими, степенными, показательными, логарифмическими и т. д.). Многочлены образуют один из основных классов элементарных функций и они по праву должны занять свое достойное место среди других элементарных функций, а не оставаться «формальными выражениями» и «суммами одночленов».

2. Преемственность средней и высшей школы. В курсах высшей математики и математического анализа, читаемых в вузах, многочлен обычно рассматривается как функция. Исключение составляют некоторые курсы высшей алгебры, ориентированные на студентов, специализирующихся в области математики (см., например, [Кострикин, 2000], [Куликов, 1979]). Однако и здесь ситуация далеко не однозначна. Например, в предисловии к учебному пособию [Размыслович, 1987], написанному авторами из Белорусского государственного университета, и предназначенному для студентов факультета прикладной математики, авторы специально подчеркивают одну из особенностей этого пособия: «...принятие в качестве исходного определения много-

члена как функции. При таком подходе, во-первых, прослеживается межпредметная связь (с математическим анализом), во-вторых, упрощаются доказательства свойств кольца многочленов».

3. Упрощение ряда формулировок. Если многочлен рассматривается как формальное выражение (то есть как сумма одночленов), то надо специально определять такие понятия, как равенство двух многочленов, сумма двух многочленов, произведение двух многочленов. Если же многочлен рассматривается как функция, то все эти определения становятся лишними, поскольку соответствующие понятия для функций (равенство двух функций, сумма двух функций, произведение двух функций) учащимся уже известны.

Строгое определение понятий «полином» и «рациональная функция»

Во многих учебниках математики (как для средней, так и для высшей школы) приводится, по нашему мнению, не совсем корректное (или, во всяком случае, не совсем полное) определение понятия «полином».

Например, в учебнике [Бугров, 1988], предназначенном для студентов инженерно-технических специальностей вузов, на стр. 89 читаем: «Функция $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_0$, где a_k — постоянные коэффициенты, называется полиномом степени n ». (В оригинале используется слово «многочлен». Мы заменили это слово на слово «полином», имея в виду наше понимание терминов «многочлен» и «полином».)

По поводу этого определения можно сделать сразу несколько замечаний. Во-первых, авторы забыли про условие $a_n \neq 0$. Без этого условия можно утверждать лишь, что $P(x)$ — это полином степени не выше n . Во-вторых, непонятна фраза « a_k — постоянные коэффициенты». В математике есть понятие «коэффициент полинома», есть понятие «коэффициент гомотетии», есть понятие «коэффициент корреляции», но нет абстрактного понятия «коэффициент». Иначе говоря, слово «коэффициент» само по себе, то есть без указания другого понятия, к которому это слово относится, не имеет четко определенного значения. Правильнее говорить, что a_k — это действительные (или комплексные) числа, причем эти числа называются коэффициентами полинома $P(x)$. В-третьих, из приведенного определения не совсем понятно следующее. Предположим, что нам дана некоторая функция. Как определить, является ли эта функция полиномом? Наконец, если функция является полиномом, то однозначно ли определены степень этого полинома и его коэффициенты?

Для того чтобы снять все эти вопросы, мы приведем строгое определение понятия «полином», а также строгое определение понятия «рациональная функция».

Напомним (см., например, [Ляшко, 1988: 16]), что *отображение* f множества A во множество B ($B \neq \emptyset$), — это упорядоченная тройка множеств $\langle A, B, C \rangle$, причем множество C является подмножеством декартова произведения $A \times B$ ($C \subset A \times B$) таким, что:

$$1) (\forall a \in A) (\exists b \in B): \langle a, b \rangle \in C;$$

$$2) (\forall a \in A) (\forall b_1, b_2 \in B): (\langle a, b_1 \rangle \in C) \wedge (\langle a, b_2 \rangle \in C) \Rightarrow (b_1 = b_2).$$

Множество A называется *множеством определения* отображения f и обозначается символом $V(f)$. Множество B называется *множеством прибытия* отображения f и обозначается символом $Z(f)$. Множество C называется *носителем* отображения

f и обозначается символом $R(f)$. Множество $\{b \in B | (\exists a \in A): \langle a, b \rangle \in C\}$ называется *множеством значений* отображения f и обозначается символом $W(f)$. Подробнее об используемой нами терминологии и системе обозначений можно прочитать в нашей статье [Костин, 2009].

Пусть $f = \langle A, B, C \rangle$ — отображение множества A во множество B , пусть $A \neq \emptyset$ и пусть $a \in A$. Из определения отображения следует, что существует и притом ровно один элемент $b \in B$ такой, что $\langle a, b \rangle \in C$. Этот элемент b называется *значением* отображения f на элементе a и обозначается символом $f(a)$.

Отметим, что множество определения $A = V(f)$ отображения $f = \langle A, B, C \rangle$ может быть пустым множеством. Поскольку $C \subset A \times B$, то носитель $C = R(f)$ отображения f тогда тоже является пустым множеством. В этом случае говорят, что f — это *пустое отображение* во множество B , и пишут $f = \emptyset_B$.

Например, действительная функция одной действительной переменной, задаваемая аналитически формулой $f(x) = \arccos x + \ln(x^2 - 4)$, имеет, как легко видеть, пустое множество определения, а значит, является пустой функцией с множеством прибытия $\mathbf{R}$ (то есть $f = \emptyset_{\mathbf{R}}$).

Отметим, что существует бесконечно много различных пустых отображений, которые различаются своими множествами прибытия, например, $\emptyset_{\mathbf{R}}$, $\emptyset_{\mathbf{Z}}$ и т. д., тогда как пустое множество $\emptyset$ существует только одно.

Отображение $f = \langle A, B, C \rangle$ называется *функцией*, если множество прибытия $B = Z(f)$ отображения f является подмножеством множества действительных чисел $\mathbf{R}$ или подмножеством множества комплексных чисел $\mathbf{C}$ (то есть $B \subset \mathbf{R}$ или $B \subset \mathbf{C}$).

Пусть $f = \langle A, B, C \rangle$ — функция. Множество $\{a \in A | f(a) = 0\}$ называется *нулевым* множеством (или нуль-множеством) функции f и обозначается символом $N(f)$.

В школе (да и в вузе) обычно рассматриваются функции одного, и притом числового, аргумента. В этом случае не только множество прибытия $B = Z(f)$, но и множество определения $A = V(f)$ функции f является подмножеством множества действительных чисел $\mathbf{R}$ или подмножеством множества комплексных чисел $\mathbf{C}$ (то есть $A \subset \mathbf{R}$ или $A \subset \mathbf{C}$). В нашей статье мы ограничимся рассмотрением действительных функций одного действительного аргумента, то есть мы будем считать, что $A = V(f) \subset \mathbf{R}$ и $B = Z(f) \subset \mathbf{R}$.

После этого краткого теоретического введения мы вполне подготовлены для того, чтобы дать строгие определения понятий «полином» и «рациональная функция».

Определение 1. Функция f называется *полиномом*, если:

- 1) множеством определения функции f является множество всех действительных чисел $\mathbf{R}$ (то есть $V(f) = \mathbf{R}$);
- 2) множеством прибытия функции f является множество всех действительных чисел $\mathbf{R}$ (то есть $Z(f) = \mathbf{R}$);
- 3) имеет место хотя бы одно из следующих двух условий:
 - 3а) $(\exists n \in \mathbf{N} \cup \{0\}) (\exists c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbf{R}, c_n \neq 0) (\forall x \in \mathbf{R}): f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \dots + c_1 x + c_0$;

3б) $(\forall x \in \mathbf{R}): f(x) = 0$. $\square$

Теорема 1 (теорема единственности). Справедливы следующие два утверждения.

1. Условия 3а) и 3б) не могут иметь место одновременно.
2. Если имеет место условие 3а), то натуральное число n и действительные числа $c_0, c_1, \dots, c_n$ определены однозначно. $\square$

Определение 2. Если имеет место условие 3а), то полином f называется *ненулевым* полиномом, число n называется *степенью* полинома f , а числа $c_0, c_1, \dots, c_n$ называются *коэффициентами* полинома f (в частности, c_n — старший коэффициент, c_0 — свободный член).

Если имеет место условие 3б), то полином f называется *нулевым* полиномом, символ $-\infty$ называется *степенью* этого полинома. $\square$

Степень полинома f обозначается символом $\deg f$.

Множество всех полиномов обозначается символом $\text{Poly}(\mathbf{R})$. Множество $\text{Poly}(\mathbf{R})$ является областью целостности.

Теперь перейдем к определению рациональной функции.

Определение 3. Функция f называется *рациональной* функцией, если множеством прибытия функции f является множество всех действительных чисел $\mathbf{R}$ (то есть $Z(f) = \mathbf{R}$) и существуют полиномы g и h такие, что:

1) множество определения функции f совпадает с множеством $\mathbf{R} \setminus N(h)$ (то есть $V(f) = \mathbf{R} \setminus N(h)$);

2) $(\forall x \in V(f)): f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$. $\square$

Из приведенного определения можно сделать, в частности, следующие два вывода.

1. Любой полином f является рациональной функцией. Действительно, функция f получается, например, если положить $g = f$, $h = 1$.

2. Пустая функция с множеством прибытия $\mathbf{R}$ (то есть функция $\emptyset_{\mathbf{R}}$) является рациональной функцией. Действительно, функция $\emptyset_{\mathbf{R}}$ получается, например, если положить $g = 1$, $h = 0$.

Определение 4. Функция $\emptyset_{\mathbf{R}}$ называется *пустой* рациональной функцией. $\square$

Пусть f — непустая рациональная функция. Множеством определения $V(f)$ функции f является либо множество всех действительных чисел, либо множество всех действительных чисел за исключением конечного числа точек. Это следует из того, что любой ненулевой многочлен h либо не имеет действительных корней, либо имеет конечное число действительных корней, а значит, нулевое множество $N(h)$ многочлена h либо является пустым множеством, либо состоит из конечного числа точек.

Определение 5. Непустая рациональная функция f называется *нулевой* рациональной функцией, если $(\forall x \in V(f)): f(x) = 0$. $\square$

Существует бесконечно много различных нулевых рациональных функций. (Тогда как нулевой полином существует только один.) Например, $f_1(x) = \frac{0}{x-1}$,

$f_2(x) = \frac{0}{x^2-x}$ и $f_3(x) = \frac{0}{x^3-x^2}$ — нулевые рациональные функции, причем различных

среди этих функций только две, поскольку функции $f_2(x)$ и $f_3(x)$ совпадают друг с другом (эти нулевые функции имеют одинаковое множество определения). Нулевые рациональные функции образуют класс нулевых рациональных функций.

Пусть f — непустая и ненулевая рациональная функция. Полиномы g и h , о которых идет речь в определении 3, определены неоднозначно. Например, если положить $g_1(x) = g(x)(x^2 + 1)$, $h_1(x) = h(x)(x^2 + 1)$, то полиномы g_1 и h_1 задают («порождают») ту же самую рациональную функцию f , что и полиномы g и h . Однако имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Разность $\Delta = \deg g - \deg h$ степеней полиномов g и h определена однозначно. Иначе говоря, разность Δ не зависит от выбора полиномов g и h , порождающих рациональную функцию f , а зависит только от самой рациональной функции f . $\square$

Определение 6. Если $\Delta < 0$, то рациональная функция f называется *правильной*. Если $\Delta \geq 0$, то рациональная функция f называется *неправильной*. $\square$

Любой ненулевой полином f является (хотя это может показаться на первый взгляд неожиданным) неправильной рациональной функцией. Действительно, полином f получается, например, если положить $g = f$, $h = 1$. Поскольку $\Delta = \deg g - \deg h = \deg f \geq 0$, то полином f — это неправильная рациональная функция.

Теорема 3. Любую неправильную рациональную функцию можно представить в виде суммы полинома и правильной рациональной функции. $\square$

Множество всех рациональных функций обозначается символом $\text{Rat}(\mathbf{R})$. На множестве $\text{Rat}(\mathbf{R}) \setminus \{\emptyset_{\mathbf{R}}\}$ всех непустых рациональных функций можно ввести отношение эквивалентности.

Определение 7. Непустые рациональные функции f и g называются *эквивалентными*, если $(\forall x \in V(f) \cap V(g)): f(x) = g(x)$. $\square$

Равносильное определение: рациональные функции f и g называются эквивалентными, если их разность $f - g$ является нулевой рациональной функцией.

Можно доказать, что введенное нами отношение является рефлексивным, симметричным и транзитивным, то есть действительно является отношением эквивалентности. Тот факт, что рациональные функции f и g эквивалентны, будем записывать так: $f \sim g$.

Например, рациональные функции $f_1(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ и $f_2(x) = \frac{x}{x^2+2x}$ являются эквивалентными, то есть $f_1(x) \sim f_2(x)$.

Относительно введенного отношения эквивалентности множество $\text{Rat}(\mathbf{R}) \setminus \{\emptyset_{\mathbf{R}}\}$ всех непустых рациональных функций распадается на классы эквивалентности. Символом $[f]$ будем обозначать класс эквивалентности, содержащий рациональную функцию f .

Стандартным образом вводятся операции сложения и умножения классов эквивалентности: $[f] + [g] = [f + g]$, $[f][g] = [fg]$. (Можно доказать, что результат операции над классами эквивалентности не зависит от выбора представителей f и g этих классов.) Имеет место следующий замечательный факт: относительно введенных операций сложения и умножения классов эквивалентности

фактормножество $(\text{Rat}(\mathbf{R}) \setminus \{\emptyset_R\})/\sim$ образует поле. Это поле (возможно, не совсем точно) называют полем рациональных функций.

В качестве нулевого элемента поля рациональных функций выступает класс [0] рациональных функций, эквивалентных константе 0 (это не что иное, как класс нулевых рациональных функций). В качестве единичного элемента поля рациональных функций выступает класс [1] рациональных функций, эквивалентных константе 1.

Отметим, что в некоторых книгах вместо термина «рациональная функция» используется термин «рациональная дробь». Последний термин, по нашему мнению, является не совсем удачным. Дело в том, что прилагательное rational (рациональный) происходит от существительного ratio — отношение, дробь. Поэтому говорить «рациональная дробь» — это все равно, что говорить «масло масляное». Кроме того, слово «функция» представляется нам более точным и содержательным, чем расплывчатое слово «дробь». Исходя из этих соображений, в нашей статье мы используем термин «рациональная функция».

Мы привели строгие определения понятий «полином» (определение 1) и «рациональная функция» (определение 3). Именно такие строгие определения этих понятий, по нашему мнению, должны присутствовать в вузовских курсах высшей математики и математического анализа (во всяком случае, в курсах, предназначенных для студентов математических специальностей университетов и педагогических вузов, а также в курсах, предназначенных для студентов технических вузов с расширенной программой по математике). В средней школе эти определения должны упрощаться с учетом реального уровня подготовки школьников. Естественно, что степень формализации должна зависеть также от того, на каком уровне (базовом или профильном) ведется изложение материала в старших классах школы.

Заключение

В старших классах школы, по нашему мнению, предпочтительным является функциональный (а не алгебраический) подход к понятию многочлена (полинома). Кроме того, крайне полезным, как мы считаем, было бы знакомство школьников с классом рациональных функций. Класс рациональных функций замкнут относительно операций сложения, вычитания, умножения, деления и включает в себя степенные функции с целым показателем степени, полиномы и дробно-линейные функции. Фактически понятие рациональной функции — это исключительно важное интегрирующее понятие, позволяющее учащимся по-новому взглянуть на многие известные им классы функций.

Изучение в старших классах школы полиномов и рациональных функций, по нашему мнению, должно расширить кругозор школьников, повысить их математическую культуру, а также подготовить к дальнейшему обучению в вузе.

Автор будет благодарен читателям за любые комментарии или замечания по затронутым в данной статье вопросам.

Список литературы

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. (1988) Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. 3-е изд., испр. М.: Наука.
2. Винберг Э.Б. (1980) Алгебра многочленов. М.: Просвещение.
3. Костин С.В. (2009) Система обозначений для основных многозначных функций комплексной переменной и для их значений // Математика в высшем образовании. № 7. С. 39–80.

4. Кострикин А.И. (2000) Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. М.: Физматлит.
5. Куликов Л.Я. (1979) Алгебра и теория чисел. М.: Высш. шк.
6. Ляшко И.И., Емельянов В.Ф., Боярчук А.К. (1988) Основы классического и современного математического анализа. Киев: Выща шк.
7. Размыслович Г.П., Феденя М.М., Ширяев В.М. (1987) Геометрия и алгебра. Минск: Университетское.

**ON IMPROVEMENT OF STUDYING OF THE CONCEPTS
«POLYNOM» AND «RATIONAL FUNCTION» AT SCHOOL
AND IN HIGHER EDUCATION INSTITUTIONS**

S.V. Kostin | Moscow technological university
senior lecturer
kostinsv77@mail.ru
Moscow

Abstract. Importance of further work on improvement of techniques of training of school and university students in key concepts and statements of mathematics doesn't raise any doubts. In this article we consider two extremely important concepts of both school and high school mathematics, namely, the concepts «polynomial» and «rational function». We compare functional and algebraic approaches to the definition of a concept of polynomial and draw at a conclusion that in secondary school transition from consideration of a polynomial as a formal expression (sum of monomials) to consideration of a polynomial as a functions is expedient. Also we discuss various approaches to definition of the concept «rational function» and give strict definition of this concept. We hope that results of our work can be used both by school and university mathematics teachers.

Keywords: polynomial, rational function, teaching of mathematics.

References

1. Bugrov Ya.S., Nikol'skiy S.M. (1988) Vysshaya matematika. Differentsial'noe i integral'noe ischislenie. 3-e izd., ispr. [Higher mathematics. Calculus] M.: Nauka.
2. Kostin S.V. (2009) Sistema oznacheniya dlya osnovnykh mnogoznachnykh funktsiy kompleksnoy peremennoy i dlya ikh znacheniya [System of designations for multi-valued functions of complex variable and for values of these functions] // Matematika v vysshem obrazovanii. № 7. S. 39–80.
3. Kostrikin A.I. (2000) Vvedenie v algebru. Chast 1. Osnovy algebr [Introduction to algebra. Part 1. Basics of algebra] M.: Fizmatlit.
4. Kulikov L.Ya. (1979) Algebra i teoriya chisel [Algebra and number theory] M.: Vyssh. shk.
5. Lyashko I.I., Emel'yanov V.F., Boyarchuk A.K. (1988) Osnovy klassicheskogo i sovremennogo matematicheskogo analiza [Basics of classic and modern calculus]. Kiev: Vyshcha shk.
6. Razmyslovich G.P., Fedenya M.M., Shiryayev V.M. (1987) Geometriya i algebra [Geometry and algebra] Minsk: Universitetskoe.
7. Vinberg E.B. (1980) Algebra mnogochlenov [Algebra of polynomials] M.: Prosveshchenie.

НОВШЕСТВА ФГОС И ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

УДК
372.851 | **ФОРМИРОВАНИЕ МОТИВАЦИИ В ИЗУЧЕНИИ
МАТЕМАТИКИ: РОЛЬ ГЕОМЕТРИИ
(СОЦИОКУЛЬТУРНЫЙ ПОДХОД)**

Сергей Николаевич Бычков

д.ф.н., доцент
bytc@mail.ru
г. Москва

Московский педагогический
государственный университет

Евгений Алексеевич Зайцев

к.ф.-м.н., доцент
e_zaitsev@mail.ru
г. Москва

Институт истории естествознания
и техники им. С.И. Вавилова РАН

Аннотация. Акцент в обучении математике на овладение навыками численных расчетов и алгебраических преобразований, доминировавший в докомпьютерную эру, постепенно утрачивает значение. Согласно действующим ФГОС, сегодня одной из важнейших целей становится формирование общих способов интеллектуальной деятельности, характерных для математики и являющихся основой познавательной культуры, значимой для различных сфер человеческой деятельности. Изучение математики тем самым ориентируется на достижение учащимися метапредметных результатов, существенных не только для неё самой. В работе предлагается общий подход к формированию метапредметных результатов, основывающийся на понятии опосредования. Обосновывается точка зрения, что геометрия является наилучшим среди школьных дисциплин предметом, способствующим овладению искусством опосредования. С этой целью рассматриваются два конкретных примера из школьной программы: площадь треугольника и решение квадратных уравнений. На этих примерах демонстрируется творческий характер искусства опосредования, способствующий достижению наряду с метапредметными также личностных результатов учащимися. На основе идей социокультурного подхода предлагается моделировать учебные ситуации таким образом, чтобы учащийся оказывался в условиях, аналогичных тем, которые приводили в свое время к становлению новых разделов математики. При таком обучении учащегося будет вести за собой не «логика» постоянно усложняющихся формальных правил, а «логика развития самого предмета». Данный подход может оказаться особенно эффективным на базовом уровне, когда учащийся предпочтёт изучение математики в «минимально необходимом» для себя объеме. Не обременяя голову формализмами, подход, основывающийся на идее опосредования, мог бы существенным образом способствовать развитию творческих способностей у этой группы учащихся.

Ключевые слова: изучение математики, метапредметные результаты, социокультурный подход, опосредование, творческое мышление.

Компьютеризация, изменившая облик современной научно-образовательной культуры, привела к необходимости переосмысливания целей и задач обучения математике в школе. В докомпьютерную эпоху математическое образование имело целью овладение навыками проведения численных расчетов и символьных (алгебраических) преобразований, необходимых в различных сферах науки и производства. На их формирование и были направлены основные усилия учителей. Повсеместное внедрение компьютерной техники поставило перед педагогами и методистами новые проблемы. В их числе – переориентация школьного образования на одновременное достижение как предметных, так и метапредметных целей.

Согласно действующим ФГОС, одной из важнейших метапредметных целей математического образования является «формирование *общих способов* интеллектуальной деятельности, характерных для математики и являющихся основой познавательной культуры, значимой для *различных сфер* человеческой деятельности» (курсив наш. – авт.). Иными словами, преподавание математики должно быть направлено на достижение учащимися результатов, значение которых выходит за рамки самой этой науки. Речь идет, по большому счёту, о формировании научного мышления средствами математики.

Особенность научного мышления состоит в том, что оно обнаруживает связи между различными аспектами действительности, которые недоступны обыденному взгляду. Обнаружение таких связей достигается путем нахождения «промежуточных ситуаций» (одной или нескольких), которые являются связующим звеном между исходными данными задачи, которую предстоит решить, и требуемым результатом. Такие «ситуации» находятся как бы «посередине», и потому их поиск носит название *опосредование*. Обучение искусству научного опосредования является одним из наиболее перспективных способов достижения метапредметных результатов [Бычков, Зайцев, 2015].

Особая роль в обучении опосредованию принадлежит, на наш взгляд, школьной геометрии. Её метапредметное значение связано, однако, не столько с аксиоматико-дедуктивной формой изложения, сколько с наглядно-предметным содержанием. На содержательном уровне поиск промежуточных звеньев в ходе решения геометрической задачи осуществляется не посредством выбора нужных предложений из фиксированного списка аксиом, а при помощи реально осуществляемого построения на плоскости или в пространстве [Бычков, 2014]. Покажем, как происходит такое наглядно-предметное опосредование на простейшем примере. Рассмотрим вопрос о площади треугольника.

Обычная практика освоения этой темы в школьном курсе состоит в механическом запоминании формулы $S = \frac{1}{2} ah$ и её многократном использовании при решении задач. При таком подходе от реального «предметного» опосредования, лежащего в основе самой этой формулы, не остаётся и следа. Другое дело, когда учащийся, поставив цель найти площадь треугольника, сам производит необходимые для этого построения.

Решение математической задачи есть, по крылатому выражению С.А. Яновской, ее сведение к уже решенной. С точки зрения предметного опосредования это означает, что должна быть найдена фигура, к которой «сводится» треугольник и для которой задача нахождения площади уже решена. Такой фигурой является, очевидно, прямоугольник. В основу выражения $S = \frac{1}{2} ah$ может быть положен, например, чертеж (см. [Локхард, 2014]):

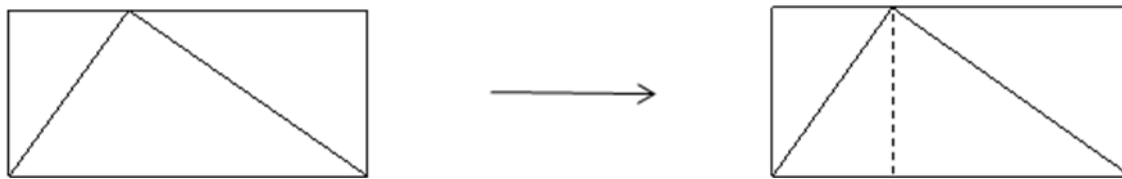


Рис. 1

Если картинка нарисована и редукция треугольника к половине описанного вокруг него прямоугольника произведена, то решение задачи получается автоматически. Но как ученику догадаться, что вокруг треугольника следует сначала описать прямоугольник, а затем опустить высоту?

Чтобы ответить на этот вопрос, обратимся к истории становления понятия площади, то есть встанем на точку зрения социокультурного, а не формально-логического подхода [Бычков, Зайцев, 2006]. Какая фигура – с исторической точки зрения – являлась исходной при измерении площадей?

Конечно же, прямоугольник, площадь которого сводится к площади (единичного) квадрата. Заметим, что и в школьном курсе геометрии площадь прямоугольника определяется в самом начале. Поэтому решение задачи нахождения площади треугольника надо попытаться связать (опосредовать) с построением некоторого связанного с ним прямоугольника. Очевидно, что с треугольником «наиболее тесно связан» *описанный вокруг него прямоугольник*; осознание этого обстоятельства и самостоятельное построение такого прямоугольника не должно вызвать особых трудностей для учащегося.

Несколько сложнее обстоит дело с поиском высоты, но и здесь может помочь целенаправленное применение предметного опосредования. Какая фигура является «связующим звеном» между треугольником общего вида и прямоугольником? Ясно, что такой фигурой будет *прямоугольный* треугольник. Для прямоугольного треугольника нахождение площади посредством описанного прямоугольника является очевидным. Таким образом, школьнику остаётся только догадаться, как свести случай произвольного треугольника к случаю прямоугольного. Вся цепочка опосредований, отображенная на чертеже, тем самым восстановлена.

В приведенной задаче обратим особое внимание на *целенаправленный* характер поиска звеньев, опосредующих между исходными данными и полученным результатом. Такой поиск носит по-настоящему творческий характер, способствует формированию у учащегося навыков научного мышления и достижению, пока лишь совсем элементарных, «метапредметных» результатов.

Противопоставление двух научно-образовательных стратегий – формально-аналитического вывода и наглядно-предметного опосредования – может быть проведено в отношении практически всех разделов школьной математики [Зайцев, 2011]. Продемонстрируем это на примере алгебры.

В основе школьного курса этой дисциплины сегодня лежит сугубо формальный подход, восходящий к Виету и Декарту, суть которого сводится к запоминанию правил манипулирования алгебраическими символами. Центральным разделом этого курса является решение квадратных уравнений, осуществляемое посредством сведения их к каноническому виду и последующему использованию формулы для вычисления корней «через дискриминант». Использование данной формальной стратегии приводит к тому, что у значительной части учащихся уровень «понимания» действий, необходимых для поиска корней, ограничивается освоением техники символьных преобразований и подстановкой числовых значений коэффициентов в формулу корней. Очевидно, что такой подход не способствует достижению метапредметных результатов.

В качестве альтернативы мы предлагаем использовать лежащее в основе формулы корней наглядно-предметное построение, осуществляемое средствами так называемой «геометрической алгебры». В реконструкции этого построения нам поможет социокультурный подход – обращение к истории.

Геометрическая алгебра, получившая развитие в древней и античной математике (вавилонской, индийской и древнегреческой), изучает величины, представляя их наглядно с учетом размерности. Она позволяет: исследовать свойства линейных и плоских величин, производить тождественные преобразования сложных выражений и решать задачи на нахождение неизвестных. В рамках геометрической алгебры можно доказывать алгебраические тождества и решать квадратные уравнения (или системы уравнений второй степени с двумя неизвестными). Основное её преимущество перед буквенной алгеброй состоит в том, что геометрическая алгебра не только приводит к искомому результату, но и прямо указывает на *причину*, по которой этот результат оказывается верным. Причина истинности полученного результата буквально «вычитывается» из дополнительного построения, используемого для решения задачи.

Рассмотрим несколько примеров. В качестве первого приведем хорошо известное геометрическое доказательство алгебраического тождества

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \quad (1)$$

Доказательство.

Будем считать a и b величинами-отрезками. Величина, находящаяся в левой части тождества, является квадратом со стороной $a + b$ (рис. 2). Очевидно, что величина этого квадрата равна сумме величин составляющих его фигур: квадрата со стороной a , квадрата со стороной b и двух равных прямоугольников со сторонами a и b .

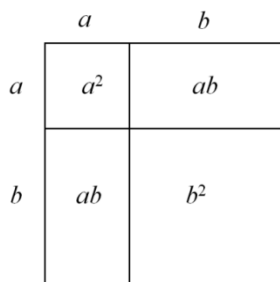


Рис. 2

Запишем тождество (1) при помощи обозначений-сокращений, близких по форме лежащим в их основе геометрическим фигурам:

$$\square(a + b) = \square_a + 2 \cdot \square_{a \cdot b} + \square_b.$$

Символ $\square(a + b)$ обозначает площадь квадрата со стороной $a + b$, символы $\square_a$ и $\square_b$ – площади квадратов со сторонами a и b , соответственно, а символ $\square_{a \cdot b}$ – площадь прямоугольника со сторонами a и b .

Такая форма записи лучше выражает геометрическое содержание тождества (1), нежели обычная алгебраическая символика.

В качестве второго примера рассмотрим геометрическое доказательство тождества

$$(a + b)^2 = 4ab + (a - b)^2 \text{ при условии } a > b. \quad (2)$$

Доказательство.

Построим квадрат со стороной $a + b$, приложив друг к другу четыре прямоугольника $A = ab$, как показано на рисунке 3. В результате внутри большого квадрата со стороной $a + b$ образуется малый квадрат со стороной $a - b$.

Фигура на рисунке 3 похожа на стилизованный пропеллер, «осью» которого является малый квадрат со стороной $a - b$, а «лопастями» – четыре прямоугольника A . Из чертежа сразу следует, что площадь внешнего квадрата равна сумме площадей четырех прямоугольных «лопастей» и квадратной «оси». Это обстоятельство может быть выражено посредством сокращенной записи $\square(a+b) = 4 \cdot A + \square(a-b)$,

которая и представляет собой алгебраическое тождество (2). Доказательство закончено.

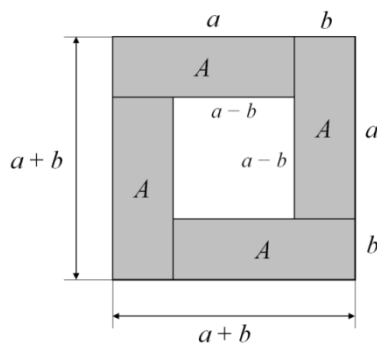


Рис. 3

Идею представления квадрата в виде четырех прямоугольных «лопастей» и квадратной «оси» можно использовать в качестве альтернативы решению квадратных уравнений при помощи дискриминанта. Преимущество такого способа решений перед его формальным аналогом состоит в том, что в нем центральное опосредующее звено – выделение полного квадрата – осуществляется наглядно-предметным образом. Учащийся просто строит соответствующий квадрат.

Для начала необходимо выделить три канонических типа уравнений второй степени в зависимости от соотношения знаков коэффициентов:

$$x^2 + px = A \quad \text{или} \quad \square_{x(x+p)} = A, \quad (3)$$

$$x^2 - px = A \quad \text{или} \quad \square_{x(x-p)} = A, \quad (4)$$

$$px - x^2 = A \quad \text{или} \quad \square_{x(p-x)} = A. \quad (5)$$

Чтобы придать уравнениям геометрический смысл, будем считать, что неизвестное x и коэффициент p являются линейными величинами (отрезками), а свободный член A – плоской величиной (прямоугольником).

В каждом из трех уравнений требуется найти неизвестную геометрическую величину x , исходя из известных величин p и A .

Решим уравнение (3) (рис. 4).

Решение.

Для решения этого уравнения построим квадратный «пропеллер», в качестве «лопасти» которого будет использован прямоугольник $A = \square_{x(x+p)}$. Поскольку $x + p \geq x$, то большая и, соответственно, меньшая сторона прямоугольника A определяются однозначно. «Осью» пропеллера является, очевидно, квадрат со стороной p . Из рисунка следует, что квадрат со стороной $2x + p$ раскладывается на четыре равных прямоугольника («лопасти») и внутренний квадрат («ось»), чему соответствует формула

$$\square_{(2x+p)} = 4 \cdot A + \square_p. \quad (6)$$

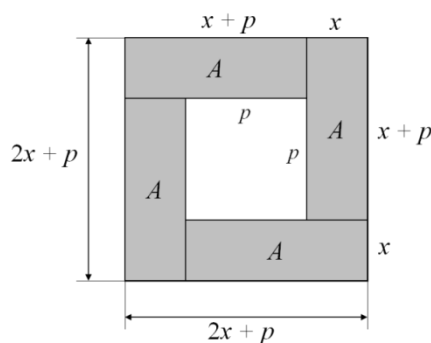


Рис. 4

Вычисляя значение правой части тождества (6), находим квадрат неизвестной величины $2x + p$, а затем, извлекая корень, и саму эту величину. В итоге легко находим искомую величину отрезка x . Задача решена.

Решим теперь уравнение (3) (рис. 5).

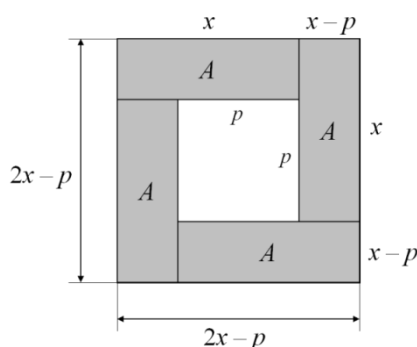


Рис. 5

Решение.

В качестве «лопасти» квадратного пропеллера возьмем прямоугольник $\square_{x(x-p)}$. Поскольку $x - p \leq x$, то бо́льшая и меньшая стороны этого прямоугольника определяются однозначно. «Осью» пропеллера является внутренний квадрат, сторона которого равна p . Разложению квадрата со стороной $2x - p$ на четыре равных прямоугольника («лопасти») и внутренний квадрат («ось») соответствует формула:

$$\square_{(2x-p)} = 4 \cdot A + \square_p. \quad (7)$$

Вычисляя, как и в предыдущем примере, значение правой части тождества (7), находим квадрат неизвестной величины $2x - p$, а затем и саму эту величину. Откуда легко находим искомую величину x . Решение найдено.

Рассмотрим, наконец, уравнение (4).

Решение.

Для его решения в качестве «лопасти» возьмем прямоугольник $\square_{x(p-x)}$. Поскольку неясно, какая из сторон этого прямоугольника больше, рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $x \geq p - x$, то есть $x \geq \frac{p}{2}$ (рис. 6).

Внешний квадрат имеет сторону p , а внутренний квадрат – сторону $2x - p$. Разложению внешнего квадрата со стороной p на четыре равных прямоугольника («лопасти») и внутренний квадрат («ось») соответствует формула:

$$\square_p = 4 \cdot A + \square_{(2x-p)} \text{ или}$$

$$\square_{(2x-p)} = \square_p - 4 \cdot A. \quad (8)$$

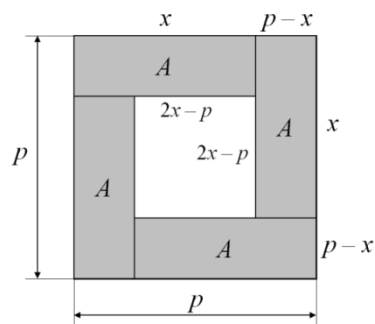


Рис. 6

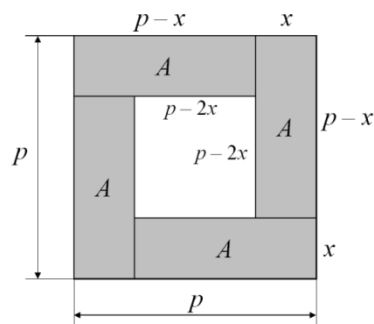


Рис. 7

Вычисляя значение правой части формулы (8), находим квадрат неизвестной величины $p - 2x$, а затем и саму эту величину. После чего легко находим искомую величину x .

Случай 2. Пусть $x \leq p - x$ (рис. 7). Внешний квадрат имеет сторону p , а внутренний квадрат – сторону $p - 2x$. Разложению квадрата со стороной p на четыре равных прямоугольника («лопасти») и внутренний квадрат («ось») соответствует формула:

$$\square_p = 4 \cdot A + \square_{(p-2x)} \text{ или}$$

$$\square_{(p-2x)} = \square_p - 4 \cdot A. \quad (9)$$

Вычисляя значение правой части формулы (9), находим квадрат неизвестной величины $p - 2x$, а затем и саму эту величину. После чего находим значение искомой величины x . Задача решена. Аналогичным способом, используя подходящий квадратный «пропеллер», можно находить наглядные решения систем уравнений второго порядка.

Очевидный недостаток этого метода состоит в необходимости отдельного рассмотрения каждого из трех канонических типов квадратных уравнений. Кроме того, геометрическим способом невозможно найти отрицательные решения. Здесь придётся обратиться к обычной формально-символической технике. Учитывая плюсы и минусы предлагаемого нами подхода, можно попробовать ввести элементы геометрической алгебры в качестве дополнения к обычной символической алгебре, изучаемой в 8 классе. Их освоение позволит учащемуся понять геометрические истоки алгебраического символизма и одновременно создаст дополнительную *мотивацию* для его освоения. Геометрические решения алгебраических задач можно оформлять, используя карандаши или фломастеры разных цветов, а также при помощи компьютерной графики, что делает изучение данного раздела еще более привлекательным.

В пользу стратегии, основанной на использовании в преподавании математики наглядно-предметных представлений, можно привести соображения социокультурного характера [Зайцев, 2014]. Во-первых, как показывает история, стадия «предметной» математики, предшествовавшая математике формальной, всегда была более творческой, нежели периоды формализации (в отношении основных разделов школьной математики данный тезис не подлежит сомнению). Творческий характер наглядной математики связан, прежде всего, с предметным типом осуществляемого в ней опосредования. Это обстоятельство может быть использовано в преподавании: поставив учащегося в условия, аналогичные тем, что приводили в свое время к разработке новых математических разделов (разумеется, эти условия должны быть грамотно смоделированы педагогами и методистами), мы тем самым объективно создадим предпосылки, необходимые для развития его собственных творческих способностей. Другим преимуществом «предметной» математики является то, что в ней обычно используется элементарный набор технических средств. Это означает, что при освоении соответствующих разделов пре-

подавателю не придется тратить время и силы на предварительное обучение формальной технике, и он сможет приступить сразу к изложению существа дела. При таком обучении учащегося будет вести за собой не «логика» постоянно усложняющихся формальных правил, а «логика» развития самого предмета. В-третьих, использование «предметных идеализаций» позволит ослабить существующую сегодня жесткую последовательность изучения разделов школьного курса (наличие которой подвергается в настоящее время серьезной критике). Если в рамках формальных идеализаций для освоения последующих разделов требуется твердое владение техникой, осваиваемой на предыдущих этапах (например, владение символической алгеброй необходимо для изучения математического анализа), то в обучении, ориентированном на квазипредметную практику геометрического построения, может быть реализована значительно более свободная последовательность изложения математических разделов. И, наконец, использование «наглядной» математики может быть оправдано тем, что с введением узко-дисциплинарной специализации неизбежно появится категория учащихся, которая не станет изучать математику на профильном уровне, а предпочтет базовый, т.е. минимальный. При обучении на этом уровне можно было бы сделать акцент на приобретении учащимися простейших навыков предметного опосредования. Такой подход будет способствовать развитию творческих способностей и достижению метапредметных результатов и у этой группы школьников.

Список литературы

1. Бычков С.Н., Зайцев Е.А. (2006) Математика в мировой культуре. М.: РГГУ.
2. Бычков С.Н. (2014) Чему и как учить на уроках математики стабильно неуспевающих школьников // Математическое образование сегодня и завтра / Материалы международной конференции (сост. С.Л. Атанасян). М.: МИОО. С.57–60.
3. Бычков С.Н., Зайцев Е.А. (2015) Опосредование как способ формирования математического мышления // Э.В. Ильенков и проблемы образования. Материалы XVII Международной конференции «Ильенковские чтения». М.: СГА. С.269–284.
4. Зайцев Е.А. (2011) Предметные идеализации как основа преподавания математики // Математика в школе. № 9. С. 65–70.
5. Зайцев Е.А. (2014) Как повысить мотивацию школьников при обучении математике: от истории к методике // Математическое образование сегодня и завтра / Материалы международной конференции (сост. С.Л. Атанасян). М.: МИОО. С.91–94.
6. Локхард П. (2014) Плач математика. Ч. 1 // Математика в школе. № 2. С.3–15.

THE FORMATION OF MOTIVATION IN STUDYING MATHEMATICS: THE ROLE OF GEOMETRY (SOCIAL-CULTURAL APPROACH)

S.N. Bytchkov

Dr. Sci. (Phil), associate professor
bytc@mail.ru
Moscow

Moscow Pedagogical State University

E.A. Zaytsev

Cand. Sci. (Phys.–Math.), associate professor
e_zaitsev@mail.ru
Moscow

S.I. Vavilov Institute for the History
of Science and Technology

Abstract. The emphasis in teaching mathematics to master the skills of numerical calculations and algebraic transformations, which dominated the pre-computer era, is gradually losing its significance. According to the current Federal State Standards of Education, today one of the most important goals is the formation of common methods of intellectual activity that are characteristic of mathematics and at the same time constitute the basis of a cognitive culture that is significant for various spheres of human activity. The study of mathematics thus focuses on the achievement of meta-subject results, which are significant outside it. The paper suggests a general approach to the formation of meta-subject results, based on the concept of mediation. In it, the point of view is promoted that geometry is the best among the school disciplines which helps master the art of mediation. For this purpose, two concrete examples from the school program are considered: the area of the triangle and the solution of the quadratic equations. These examples demonstrate the creative nature of the art of diagrammatic mediation, contributing to the achievement, along with meta-subject, also of personal results by the students. On the basis of the ideas of the social-cultural approach, it is proposed to model the learning situations in such a way that the student finds himself in conditions similar to those that historically led to the formation of new sections of mathematics. In the course of such training, the student will not be led by the “logic” of the complicated formal rules, but rather by the “logic of the development of the subject itself.” This approach can be particularly effective at a basic level, at which students study mathematics in the “minimal extent.” Without encumbering them with formalisms, the approach based on the idea of mediation could significantly contribute to the development of the creative abilities of this group of students.

Keywords: study of mathematics, meta-subject results, sociocultural approach, mediation, creative thinking.

References

1. Bytchkov S.N., Zaytsev E.A. (2006) *Matematika v mirovoy kul'ture* [Mathematics in World Culture]. M.: RGGU, 2006.
2. Bytchkov S.N. (2014) *Chemu i kak učit' na urokakh matematiki stabil'no neuspevayushchikh shkol'nikov* [What and how to teach in the lessons of mathematics (the case of stubbornly underachieving students)] // *Matematicheskoe obrazovanie segodnya i zavtra / Materialy mezhdunarodnoy konferentsii* (comp. by S.L. Atanasyan). M.: MIOO, 2014. pp. 57–60.
3. Bytchkov S.N., Zaytsev E.A. (2015) *Oposredovanie kak sposob formirovaniya matematicheskogo myshleniya* [Mediation as a way of formation of mathematical thinking] // *E.V. Il'enkov i problemy obrazovaniya. Materialy XVII Mezhdunarodnoy konferentsii "Il'enkovskie chteniya."* M.: SGA, 2015. pp. 269–284.
4. Lockhart P. (2014) *Plach matematika* [A Mathematician Lament. Part 1] *Matematika v shkole*. № 2. pp. 3–15.
5. Zaytsev E.A. (2011) *Predmetnye idealizatsii kak osnova prepodavaniya matematiki* [Subject-oriented idealizations as the basis for teaching of mathematics] *Matematika v shkole*. № 9. pp. 65–70.
6. Zaytsev E.A. (2014) *Kak povysit' motivatsiyu shkol'nikov pri obuchenii matematike: ot istorii k metodike* [How to increase the motivation of schoolchildren in learning mathematics: from history to method] // *Matematicheskoe obrazovanie segodnya i zavtra / Materialy mezhdunarodnoy konferentsii* (comp. by S.L. Atanasyan). M.: MIOO, 2014. pp. 91–94.

УДК
378.147

ДЕЛОВАЯ ИГРА КАК СРЕДСТВО ПРОЯВЛЕНИЯ СИНЕРГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ-ЮРИСТОВ²

Светлана Николаевна Дворяткина
д.п.н., доцент
sobdvor@yelets.lipetsk.ru
г. Елец

Елецкий государственный
университет им. И.А. Бунина

Татьяна Петровна Будякова
к.псих.н., доцент
budyakovaelez@mail.ru
г. Елец

Елецкий государственный
университет им. И.А. Бунина

Аннотация. В статье выявляется потенциал математического образования в формировании профессиональных компетенций и в личностном интеллектуальном развитии будущего юриста на основе синергетического подхода. По мнению авторов, раскрытие студентам в процессе обучения более широкого спектра возможностей математических наук в решении профессиональных задач с выявлением закономерностей и побочных эффектов самоорганизации представляется весьма актуальной. Важная роль в решении поставленных задач отводится активным методам обучения, которые в последние годы приобретают новый импульс в рамках современной образовательной парадигмы. В основной части работы раскрывается сущность и характеристики профессионального эффекта, представлен инструмент технологизации данного эффекта посредством интеграции активных методов обучения (деловой игры, кейс-метода и дискуссии). Решение актуальной профессиональной проблемы, состоящей в недопущении разработки дакто-дерматоглифической системы в целях определения склонности к убийству и, соответственно, для применения мер раннего превентивного воздействия, а также других правовых проблем средствами математики дает значимый профессиональный синергетический эффект. Предложенный авторами психодидактический инструментальный диагностики профессионального эффекта позволил зафиксировать значимый рост уровня креативности, профессионального мышления, а также профессиональной мотивации у студентов экспериментальной группы. Теоретически обосновано и экспериментально подтверждено, что применение активных методов в обучении математике способствует актуализации и проявлению профессионального эффекта, поскольку математика воспринимается студентами как элемент их профессиональной подготовки, как средство решения профессиональных задач. Полученные результаты открывают возможность для дальнейшего выявления и исследования других синергетических эффектов у будущих юристов с целью дальнейшего повышения уровня профессионализма посредством совершенствования профессиональных компетенций в области юриспруденции с применением математических методов.

Ключевые слова: синергетический подход, обучение математике, активные методы, профессиональный эффект.

² Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №16-18-10304)

1. Введение

Современное высшее образование должно соответствовать технологическому прогрессу, запросам экономики и социальной сферы, обеспечивать его дальнейшее совершенствование. При этом учитывая возрастающую динамичность развития всех сфер социальной жизни, науки и экономики, необходимо дать такое образование, чтобы оно помогало как адаптации выпускника к меняющимся условиям жизни и производства, так и позволяло решать новые, в том числе нестандартные задачи междисциплинарного профиля. Идеология передачи «теоретических знаний и учебных умений» сменяется идеологией формирования профессиональных компетенций будущего специалиста. При этом в перечень современных профессиональных компетенций включаются не только умения решать чисто профессиональные задачи, но и общие требования к личности выпускника: самостоятельность, самоорганизация, инициатива, креативное мышление, готовность к разумному риску.

Представители компетентного подхода [Хуторской (2013); Зимняя (2014)], развивая деятельностную парадигму в образовании [Гальперин (1999); Талызина (2013)], предлагают реформатировать традиционный учебный процесс за счет существенного увеличения доли аудиторного времени на технологии активного обучения. Отсюда главными принципами организации образовательного процесса становятся принцип совместной деятельности, диалогического общения, игрового или имитационного моделирования. Акцент переносится с передачи предметного содержания на индивидуальный опыт воспитанников, на актуализацию их мотивов и потребностей, а также на усиление прикладной профессиональной направленности содержания обучения, на междисциплинарную интеграцию.

На наш взгляд, наиболее эффективной и плодотворной стратегией в реализации компетентного подхода в современном высшем математическом образовании является концепция синергетического подхода. Данный подход ориентирован на познание сложноорганизованных и саморазвивающихся открытых систем [Накен (1996); Малинецкий (2013); Пригожин (2008)], в том числе образовательных систем [Смирнов (2017); Дворяткина (2016); Sekovanov (2016)]. Проблема самоорганизации и саморазвития личности студента в процессе обучения математике диктует необходимость включения в единую целостность мотивационно - ценностных и эмоционально-волевых, исследовательских и метакогнитивных, социальных и личностных стратегий поведения в ходе познавательной деятельности по освоению предметного содержания. Это создает прецедент расширения и углубления опыта личности будущего профессионала на основе наличного его состояния, формирования и развития интеллектуальных операций и способностей с опорой на фундирующие механизмы и наглядное моделирование возможностей проявления и коррекции функциональных, операциональных и инструментальных компетенций в освоении математики [Смирнов (2017)].

В современной психологии отмечается, что синергетический подход в настоящее время является наиболее перспективной концепцией в изучении когнитивных процессов [Kriz J. (2001)]. В юридической литературе признается ценность синергетического подхода для решения профессиональных задач. Ю.В. Голик выделяет следующие признаки синергетического подхода, значимые как для правовых наук, так и педагогики: а) взаимодействие разных наук, подходов, порождающее новое качество; б) взаимодействие порядка и хаоса; в) группировка самых различных по происхождению явлений; г) самоорганизация систем открытого типа с нелинейными обратными связями [Голик (2006)]. Синергетический подход в педагогике обеспечивает становление самоактуализирующейся и саморазвивающейся личности, для которой характерны критическое, не-

зависимое, многовариантное мышление, конструктивистки активная жизненная позиция [Князева (1999), Курдюмов, Сандерс (2011) и др.].

Будучи междисциплинарным подходом, закономерности синергетики дают возможность подойти к разработке и решению проблем обучения студентов комплексно и на основе согласованного действия разных начал: применяя методы и средства как гуманитарных наук, так естественных, в частности математических наук в контексте использования информационных технологий. С помощью математических инструментов можно вскрывать сущность профессиональных проблем не только в естественных, но и в гуманитарных науках, и предложить адекватные математические средства и методы для их решения с проявлением синергетических эффектов личностного и профессионального развития.

Поэтому выявление математического потенциала в формировании профессиональных компетенций юриста и в личностном интеллектуальном развитии будущего специалиста является актуальным в педагогической науке. Традиционно математические методы в юриспруденции ограничиваются сферой математической статистики, отражающей показатели преступности и статистику рассмотрения различных категорий дел в суде [Лунеев (2007)]. Остается мало изученным вопрос использования математических методов в иных сферах юриспруденции, в частности: в расследовании преступлений, криминалистике, в правотворчестве и правоприменении [Лопухин (2016)]. Тем более актуальным является раскрытие студентам в процессе обучения более широкого спектра возможностей математических наук в решении профессиональных задач с выявлением закономерностей и побочных эффектов самоорганизации.

Результатом реализации синергетического подхода является получение *синергетического эффекта*, который выступает как итог действия многочисленных дидактических, интеллектуальных, социальных, экономических и других факторов, задействованных для его получения. В широком смысле синергетический эффект определяют как процесс повышения результативности деятельности за счет интеграции, соединения отдельных элементов в единую систему. В данной работе под синергетическим эффектом будем понимать не только изменение качества дидактической системы, но и траектории личностного развития обучаемого.

В структуре синергетического эффекта ранее нами выделены следующие важные компоненты: профессиональный, интеллектуальный, инновационный, социальный, экономический, духовно-нравственный. Наиболее актуальной и практически значимой проблемой является получение, выявление и оценка профессионального синергетического эффекта.

Под профессиональным синергетическим эффектом в обучении математике будем понимать качественные и количественные изменения в структуре профессиональных компетенций на основе интеграции профессиональных, информационных, математических и гуманитарных знаний и самоорганизации когнитивной деятельности студентов по следующим направлениям:

а) *мотивационно-ценностному*, связанному с самоактуализацией мотивов, целей, потребностей профессиональной деятельности, обретением и поддержкой новых ценностей диалога математической и гуманитарной культур;

б) *когнитивному*, определяемому развитием и саморазвитием профессионального мышления, коррелирующим с развитием креативности студентов и творческой самостоятельностью в ходе поэтапного исследования и решения сложных профессиональных задач математическими методами;

в) *функциональному*, представляющему собой комплекс приобретенных в вузе теоретических математических знаний и практических умений с учетом возможности

наглядного моделирования их глубины, объема и реализации социальных функций специалиста, необходимых для результативной профессиональной деятельности.

Исследователем Е.И. Смирновым [Smirnov (2017)] были выделены *критерии (характеристики) проявления синергетических эффектов*: фокусирование прикладной и нелинейной стороны проблемы как сложного конструкта, представленного в единстве многообразия связей; актуализация междисциплинарных связей как основы для выявления точек бифуркации в разворачивании профессионально-значимых результатов; множественность целеполагания задач и исследовательских действий, непредсказуемость возможных результатов; проявление эмерджентности новых связей и выявление механизмов самоорганизации и логики разворачивания математических конструктов; доступность и воспроизводимость математического материала на основе моделирования, возможности для обучаемого интериоризации полученных знаний в условиях открытости информационно-образовательной среды. Поиск и актуализация форм и методов обучения математике в вузе, ведущих к проявлению синергетических эффектов, является весомой современной задачей повышения качества математического образования особенно для студентов нематематических направлений подготовки.

Важная роль в решении поставленных задач отводится активным методам обучения, которые в последние годы приобретают новый импульс в рамках новой образовательной парадигмы. Наиболее значимые методы активного обучения – деловая игра, дискуссия и кейс-метод, основанные на атрибутах синергии, — открытом обучении, немедленной обратной связи, соединении теории и практики, интеграции различных областей знания (в нашем случае математики и юриспруденции) — обеспечивают значимый рост эффективности деятельности за счет наблюдаемого системного учебного эффекта. Внедрение активных методов в процесс обучения математике студентов-юристов для решения задач развития профессиональных и общих компетенций личности (инициативности, самостоятельности, активности, креативности и др.) не только является принципиально новым направлением педагогической деятельности, но служит механизмом саморазвития личности с эффектом скачкообразного перехода на более высокие уровни.

Поиск нерассмотренных подходов определил *цель нашего исследования* — выявить и оценить выраженность компонентов профессионального синергетического эффекта при введении активных методов (деловой игры в сочетании с кейс-методом и дискуссией) в процесс обучения математике студентов-юристов.

В данной статье под *деловой игрой* будем понимать социально-обучающую модель, которая направлена на достижение цели, имитирует условия, содержание, отношения, динамику и особенности той или иной профессиональной деятельности. Деловая игра позволяет в достаточной мере воспроизводить (моделировать) деятельность специалистов, выявлять проблемы, оценивать каждый вариант, принимать решение и определять механизм его реализации в соответствии с ситуацией, сложившейся на конкретном предприятии, фирме и т. п. Под *кейс-методом* – в нашем исследовании мы понимали анализ в учебном процессе конкретных ситуаций, реально возникших в профессиональной деятельности юриста.

2. Метод

2.1. *Гипотеза исследования.* Мы предположили, что актуализация активных методов в процессе обучения математике будущих юристов способствует проявлению профессионального синергетического эффекта.

2.2. *Участники исследования:* 2 группы студентов по 20 человек в каждой, студенты-юристы в возрасте от 20 до 23 лет.

2.3. Этапы исследования: формирующий и контрольный эксперименты.

При проведении исследования не использовался констатирующий эксперимент. В качестве исходной информации об объекте исследования были взяты данные об успеваемости студентов. В экспериментальной группе успеваемость студентов в среднем была ниже, чем в контрольной.

2.4. Материал и ход исследования.

В формирующем эксперименте студенты в форме деловой игры на занятиях по математике рассматривали реальные ситуации из практики (в частности, реальные научные споры на научных конференциях) и в процессе дискуссии с помощью преподавателя предлагали свое решение, основанное на применении математических средств доказывания.

Приведем конкретные примеры. На практическом занятии по дисциплине «Математика» (модуль «Математическая статистика») моделировалась ситуация научного симпозиума, на котором рассматривались вопросы дерматоглифики (учении о папиллярных узорах на ладони и пальцах). Одна группа студентов представляла сторонников некоторых российских ученых, которые с применением простейших математических методов (подсчет процентов, суммарный счет), а также на основе статистических методов описательной статистики (частотные таблицы, гистограммы, меры центральной тенденции, меры вариативности и др.) доказывают, что существует прямая зависимость между склонностью к употреблению наркотических веществ и некоторыми параметрами пальцевой дерматоглифики. Это дало им основание утверждать, что склонность к употреблению наркотических веществ запрограммирована генетически, и эта закономерность отражается в пальцевых узорах.

Другая группа студентов должна была найти математические доказательства того, что их выводы неверны. Например, одним из весомых аргументов может служить то, что для процентных данных нельзя определить уровень статистической значимости – вероятность совершения ошибки, следовательно, проценты, взятые сами по себе, не дают возможности сформулировать достоверные выводы. Студенты также установили, что данными учеными не был проведен сравнительный анализ распределений гребневого счета в контрольной и экспериментальной группах на основе статистических методов. В качестве доказательной базы они применяли уже такие методы как статистическое оценивание и проверка статистических гипотез. Кроме того, проверка их результатов на степень статистической достоверности показала, что результаты исследования обладают достоверностью только при условно принятом уровне значимости в 95%. Если же увеличить требования к статистически значимому уровню достоверности до показателя 99%, то результаты исследования следует признать недостоверными.

Кроме того, были смоделированы ситуации, где оценивались математические средства, применяемые в расследовании серийных убийств, в правовом регулировании игровой деятельности в России и других странах, в совершенствовании правового регулирования бюджета на основе современных технологических достижений (на примере субъекта РФ и Испании) и др.

В контрольном эксперименте для оценки мотивационно-ценностной составляющей профессионального эффекта применялись как косвенные методы диагностики профессиональной мотивации (метод 1), так и валидные методики изучения мотивации профессиональной деятельности (авт. Замфир К., модификация А.А. Реана). В качестве критерия по первому методу был выбран показатель активности посещения учебных занятий по дисциплине «Математика» среди студентов-юристов в контрольной (без включения активных методов обучения) и экспериментальной группах (с внедрением активных методов обучения). В основу диагностики по второй методике (метод 2) по-

ложена концепция о внутренней и внешней мотивации (положительная и отрицательная). Мотивационный комплекс личности представлен соотношением трех данных видов мотивов: чем оптимальнее мотивационный комплекс (преобладании внутренних мотивов над внешними), чем более активность мотивирована самим содержанием деятельности.

С целью диагностики выявленного когнитивного компонента профессионального эффекта применялись материалы из книги К. R. Hobbie «The Little Giant Book of Weird and Wacky Facts», изданной в 1992 году в США. В книге приведены курьезные случаи из реальной судебной практики. Материалы этой книги позволили проверить влияние формирующего эксперимента на развитие креативного мышления, поскольку надо было решать нестандартные задачи, нетипичные для судебной практики. Критерием оценки креативности считалась готовность студентов применять для решения предложенных ситуаций нестандартные подходы и методы, в частности математические. Кроме того при разборе судебных курьезов проверялось сформированность у студентов профессионального мышления. Мышление в общем смысле – это способность решать задачи. Профессиональное мышление – это способность решать профессиональные задачи. Критерием уровня профессионального мышления считалось количество вариантов решений нестандартной профессиональной задачи, предложенных студентами. Мы исходили из того, что уровень профессионализма определяется способностью рассматривать профессиональную задачу с разных ракурсов, находить разные варианты решений и уже из них выбирать наиболее оптимальное.

Пример контрольной задачи: «Дело о пинке воспитателю»: «Капризный ребенок, не желая слушаться воспитательницу, ударил его ногой под коленку. Удар был настолько силен, что воспитательница несколько месяцев не могла выйти на работу, после операции она еще долго ходила с тростью. Воспитательница подала иск в суд на родителей ребенка с требованием существенной имущественной компенсации». Задание: предложить варианты аргументов в суде (на основе действующего российского законодательства) для воспитательницы и родителей ребенка.

Диагностика функционального компонента профессионального эффекта, устанавливающая сформированность знаний, умений и навыков в решении математических задач разного уровня сложности (от базового до практической самореализации) на основе компьютерного моделирования для студентов гуманитарных направлений подготовки подробно изложена в работе [Dvoryatkina (2017)].

3. Результаты и дискуссия

В формирующем эксперименте мы отметили повышение профессиональной мотивации студентов экспериментальной группы на занятиях по дисциплине «Математика». В ходе деловых игр они научились рассматривать математические средства как инструмент повышения своего профессионализма. Студенты-юристы отличаются от студентов других направлений подготовки тем, что изначально с первого курса ориентированы на освоение профессии юриста. Занятия, которые прямо не связаны с их профессией, им не особенно интересны. Добросовестно относятся к таким занятиям в основном отличники. В нашей экспериментальной группе отличников практически не было. Однако экспериментальная методика обучения математике способствовала повышению профессионального интереса, что подтверждают экспериментальная проверка (табл. 1, 2) и статистические выводы.

С целью статистического анализа эмпирических данных по мотивационному критерию (метод 1) в контрольном эксперименте применили χ^2 – критерий Пирсона, кото-

рый позволил оценить достоверность различий между двумя эмпирическими распределениями двух выборок по количеству прогулов в течении всего учебного года (табл. 1).

Таблица 1. Диагностика проявления мотивационного эффектов (метод 1)

	общее количество прогулов по математике (час)									Всего
	сен	окт	нояб	дек	февр	март	апр	май	июнь	
контрольная группа	40	42	38	34	38	36	40	34	16	318
экспериментальная группа	48	48	44	40	32	24	20	14	8	278
Всего	88	90	82	74	70	60	60	48	24	596

Статистическая проверка позволила отклонить нулевую гипотезу, состоящую в том, что различий между распределениями в контрольной и экспериментальной группах по количеству пропусков нет ($\chi^2_{\text{эм.}}=30,83 > \chi^2_{\text{кр.}}(0,05)=2,73$). Вывод: различия по данному показателю (количество прогулов) между контрольной и экспериментальной группами статистически значимы (в течение года количество прогулов в экспериментальной группе значимо уменьшается), следовательно, методика эффективна.

Статистическая проверка эмпирических данных по мотивационному критерию (метод 2), основанная на оценке мотивационного комплекса личности, с применением статистики Стьюдента для малых выборок позволила также установить значимые статистические различия в контрольной и экспериментальной группе (табл.2).

Таблица 1. Диагностика проявления мотивационного эффектов (метод 2)

	среднее		
	ВМ	ВПМ	ВОМ
контрольная группа	1,28	1,74	3,67
экспериментальная группа	3,70	3,67	2,28
t эмпирическое	10,04	8,32	6,69
t критическое (0,05)	2,09	2,09	2,09

Следует отметить значимое снижение показателя внешней отрицательной мотивации (ВОМ), повышение показателей внутренней мотивации (ВМ) и внешней положительной мотивации (ВПМ) в экспериментальной группе после внедрения экспериментальной методики. В контрольной группе значения показателей, входящих в мотивационный комплекс личности, значимо не изменился.

Далее следует отметить, что были выявлены различия также и по когнитивной составляющей профессионального эффекта у студентов экспериментальной и контрольной групп. Студенты контрольной группы при решении нестандартных профессиональных задач в основном пытались применять традиционные методы. Например, они анализировали действующее законодательство и доказывали, что нет правовых средств для решения предложенных задач. Реже они предлагали использовать нормы закона по принципу аналогии.

Студенты экспериментальной группы принципиально иначе относились к поиску решений. Они предлагали несколько решений каждой задачи (среднее число решений составило $\bar{x}=2,95$). Их не смущало отсутствие прямых норм в законе, позволяющих точно квалифицировать деяние в соответствии с правилами закона. Это свидетельствовало о повышении уровня креативности, поскольку креативное мышление – это способность мыслить нестандартно, не ограничиваясь предписанными правилами. При решении части задач студентами экспериментальной группы были применены математические средства. При этом ни один из студентов контрольной группы не использовал математические знания для решения нестандартных профессиональных задач (среднее

число решений составило $\bar{y} = 1,45$). Количество предложенных вариантов решения – это и показатель уровня профессионального мышления. У студентов экспериментальной группы была не просто установка правильно или неправильно решить задачу, а была профессионально значимая установка найти решение, которое бы помогло бы их клиенту. В силу этого они старались предложить несколько вариантов решений задачи, что свидетельствовало о более высоком уровне профессионального мышления, чем у студентов контрольной группы. Статистическая проверка позволила отклонить нулевую гипотезу, состоящую в том, что различий между средними показателями вариантов решений профессиональных задач в контрольной и экспериментальной группах нет ($t_{\text{эмп.}} = 8,10 > t_{\text{кр.}}(0,05) = 2,09$). Следовательно, уровень сформированности профессионального мышления в экспериментальной группе выше, чем в контрольной после внедрения в процесс обучения математики активных методов.

4. Заключение

1. Наша гипотеза подтвердилась. Действительно, обучение математике студентов-юристов с применением активных методов обучения (деловой игры в сочетании с кейс-методом и дискуссией) дает значимый профессиональный синергетический эффект. В экспериментальной группе уровни креативности и профессионального мышления оказались выше, чем в контрольной. При применении активных методов обучения повышается уровень профессиональной мотивации студентов, поскольку математика воспринимается студентами как элемент их профессиональной подготовки, как средство решения профессиональных задач.

2. Вместе с тем, внедрение активных методов в практику обучения вуза имеет ряд недостатков: значительно возрастают временные затраты преподавателя, связанные, например, с подготовкой и разработкой учебных материалов; сложная адаптация математических методов к условиям конкретной предметно-профессиональной сферы, в частности юриспруденции; ограниченные возможности преподавателей-математиков в применении математических методов юриспруденции, связанные со специфичностью объектов исследования; консерватизм преподавательского состава, когда новые подходы к организации активного обучения могут вызвать негативную оценку со стороны коллег. Недооценка перечисленных негативных моментов и возможные риски могут привести к проявлению отрицательного синергетического эффекта.

3. В перспективе возможны следующие направления исследований:

- совершенствование инструментария выявления и оценки профессионального эффекта с учетом других его содержательных характеристик, новых авторских валидных диагностических методик с целью обеспечения требования универсальности;
- исследование дальнейших проявлений синергии в математике на нематематических факультетах на основе актуализации активных форм и методов обучения.

На основании выше изложенного, можно установить, что на современном этапе развития общества и образования активное обучение представляет собой актуальную психолого-педагогическую концепцию организации учебного процесса, которая имеет как положительные, так и отрицательные эффекты. В связи с этим представляемая концепция активного обучения требует дальнейшего своего глубокого теоретического изучения и более детального эмпирического исследования.

Список литературы

1. Аршинов В.И. (1999) Синергетика как феномен постнеклассической науки. М.: ИФ РАН. 203 с.

2. Гальперин П.Я. (1999) Введение в психологию. М.: Книжный дом «Университет». 332 с.
3. Голик Ю.В. (2006) Синергетика и преступность // Российский криминологический взгляд. № 3. С. 73–79.
4. Дворяткина С.Н., Лопухин А.М. (2016) Этапы становлении синергии математического образования в контексте мирового и отечественного опыта // Continuum. Математика. Информатика. Образование. № 2 (2). С. 64-69.
5. Зимняя И.А. (2014) Компетенция и компетентность в образовании // Эйдос. №4. С. 7.
6. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. (2001) Синергетика и прогнозы будущего. М.: Эдиториал УРСС. 288 с.
7. Лунеев В.В. (2007) Юридическая статистика. М.: Юрист. 394 с.
8. Лопухин А.М., Орлов С.Ю. (2016) К вопросу о целесообразности применения математических методов в юридических науках в контексте синергетического подхода // Вопросы Российского и международного права. №9. С. 63-74. Синергетика,
9. Малинецкий Г.Г. (2013) Синергетика, междисциплинарность и постнеклассическая наука XXI века // Препринты ИПМ им. И.В. Келдыша. № 51. С. 1-36.
10. Пригожин И., Николис Г. (2008) Познание сложного. Введение. М.: URSS. 342 с.
11. Смирнов Е.И. (2017) Синергия исследования «проблемной зоны» базового учебного элемента содержания математического образования // Ярославский педагогический вестник. №5. С. 82-90.
12. Талызина Н.Ф. (1998) Педагогическая психология. Учебное пособие. М.: Издательский центр. «Академия». 288 с.
13. Хуторской А.В. (2013) Компетентностный подход в обучении: Научно-методическое пособие. М.: Издательство «Эйдос». 73 с.
14. Dvoryatkina S., Smirnov E., Lopukhin A. (2017) New opportunities of computer assessment of knowledge based on fractal modeling. Proceedings of the 3rd international conference on higher education advances, HEAd'17. Valencia, Universitat Politècnica de València, pp. 854–864.
15. Haken H. (1996) Principles of Brain Functioning. A Synergetic Approach to Brain Activity, Behavior and Cognition. Berlin: Springer.
16. Knyazeva H. (1999) The synergetic principles of nonlinear thinking. The Journal of New Paradigm Research. V. 54.
17. Kriz J. (2001) Self-Organization of Cognitive and Interactional Processes. Published in: Matthies, M., Malchow, H. & Kriz, J (Eds): Integrative Systems Approaches to Natural and Social Dynamics. Heidelberg /New York: Springer, pp. 517-537.
18. Sanders M. (2011) Embracing Critical Thinking as a Model for Professional Development. Inquiry: Critical Thinking Across the Disciplines. Vol. 26, pp. 29-37-108.
19. Sekovanov, V., Ivkov V., Piguzov, A., Fateev, A. (2016) Exegution of Mathematics and Information multistep task "BUILDING A FRACTAL SET WITH L-SYSTEMS AND INFORMATION TECHNOLOGIES" as a means of creativity of students. Selected Papers of the XI International scientific-practical conference «Modern information technologies and IT-education» (SITITO 2016), pp. 204-211.
20. Smirnov E.I. (2017) Synergy of Researching «a Problem Zone» of a Basic Educational Element of Mathematical Education Content. Yaroslavl Pedagogical Bulletin. V. 5, pp. 82-89.

BUSINESS ROLE-PLAYING GAME AS A MEANS OF MANIFESTING SYNERGY IN TEACHING MATHEMATICS TO LAW STUDENTS

S.N. Dvoryatkina

Dr. Sci. (Pedagogy), professor
sobdvor@yelets.lipetsk.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

T.P. Budyakova

Cand. Sci. (Phil.), associate professor
budyakovaelez@mail.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

Abstract. The article makes known the potential of mathematical education in the formation of professional competencies and in the personal intellectual development of a future lawyer on the basis of a synergetic approach. Is, the disclosure in the learning process to the students of a wider range of mathematical skills in solving professional problems with the identification of regularities and side-effects of self-organization seems very up to date. An important role in solving the objectives is given to active methods of teaching, which in recent years have acquired a fresh impetus in the context of the modern educational paradigm. In the main part of the paper, the essence and specification of the professional effect are described. The tool of technological development of the given effect is represented by integration of active methods of training (business game, case-method and discussion). The solution of the actual professional problem, which consists in preventing the development of a fingerprint system in order to determine the propensity to violence and, to apply early preventative measures, as well as other legal problems, with the tools of mathematics, gives a significant professional synergistic effect. The psychodiagnostic toolkit for diagnosing the professional effect proposed by the authors made it possible to record a significant increase in the level of creativity, professional thinking, and professional motivation among the students of the experimental group. It is theoretically grounded and experimentally confirmed that the use of active methods in teaching mathematics contributes to actualization and the manifestation of a professional effect, because mathematics is perceived by students as an element of their professional training, as a means of solving professional problems. The obtained results offer the possibility for further detection and investigation of other synergistic effects of future lawyers with a view to further improving of professionalism through the professional development in the field of jurisprudence using mathematical methods.

Keywords: synergetic approach, teaching mathematics, active methods, professional effect.

References

1. Arshinov V. I. (1999) Sinergetika kak fenomen postneclassicheskoi` nauki [Synergy as a phenomenon of post-non-classic science] M.: IF RAN, 1999. 203 p.
2. Gal`perin P. Ia. (1999) Vvedenie v psihologiiu [Introduction to psychology] M.: Knizhny`i` dom «Universitet», 1999. 332 p.
3. Golik Iu.V. (2006) Sinergetika i prestupnost` [Synergetics and crime] The Russian criminological view. №3, pp. 73-79.

4. Dvoriatkina S.N., Lopuhin A.M. (2016) E`tapy` stanovlenii sinergii matematicheskogo obrazovaniia v kontekste mirovogo i otechestvennogo opy`ta [Stages of formation of the synergy of mathematical education in the context of global and domestic experience] Continuum. Mathematics. Informatics. Education. №2, pp. 64-69.
5. Zimniaia I.A. (2014) Kompetentciia i kompetentnost` v obrazovanii [Competence and competence education] Eidos. №4, pp. 7.
6. Kapitca S.P., Kurdiunov S.P., Malinetskii` G.G. (2001) Sinergetika i prognozy` budushchego [Synergetics and forecasts of the future] M.: Edithorial URSS, 2001. 288 p.
7. Luneev V. V. (2007) Iuridicheskaiia statistika [Legal statistics] M.:Iurist, 2007. 394 p.
8. Lopuhin A.M., Orlov S.Iu. (2016) K voprosu o tcelesoobraznosti primeneniia matematicheskikh metodov v iuridicheskikh naukakh v kontekste sinergeticheskogo podhoda [To the question of whether to apply mathematical methods in human sciences in the legal context of the synergistic approach] Russian and international law issues. №9, pp. 63-74.
9. Malinetskii` G.G. (2013) Sinergetika, mezhdisciplinarnost` i postneklassicheskaiia nauka XXI veka [Synergetics, interdisciplinary and postneklassicheskaiia science of XXI century] Preprints of IPM to them. I. Keldysh. №51, pp. 1-36.
10. Prigozhin I., Nikolis G.(2008) Poznanie slozhnogo. Vvedenie [Knowledge of the complex. Introduction] M.: URSS, 2008. 342 p.
11. Smirnov E.I. (2017) Sinergiia issledovaniia «problemnoi` zony» bazovogo uchebnogo e`lementa sodержanii matematicheskogo obrazovaniia [Synergy study "problem zones" basic training element containing-Research Institute for mathematics education] Yaroslavsky pedagogical bulletin. №5, pp. 82-90.
12. Taly`zina N. F. (1998) Pedagogicheskaiia psihologiiia. Uchebnoe posobie [Pedagogical Psychology. Tutorial] M.: Publishing Center. «Academy», pp. 288.
13. Hutorskoii` A.V. (2013) Kompetentnostny`i` podhod v obuchenii: Nauchno-metodicheskoe posobie [Competence approach in teaching: scientific-methodical allowance] M.: Publishing House «Eidos», 2013. 73 p.
14. Dvoryatkina S., Smirnov E., Lopukhin A. (2017) New opportunities of computer assessment of knowledge based on fractal modeling. Proceedings of the 3rd international conference on higher education advances, HEAd/17. Valensia, Universitat Politecnica de Valencia, pp. 854–864.
15. Haken H. (1996) Principles of Brain Functioning. A Cynergetic Approuch to Brain Activity, Behavior and Cognition. Berlin: Springer.
16. Knyazeva H. The synergetic principles of nonlinear thinking. The Journal of New Paradigm Research. 1999.V. 54.
17. Kriz J. (2001) Self-Organization of Cognitive and Interactional Processes. Published in: Matthies, M., Malchow, H. & Kriz, J (Eds): Integrative Systems Approaches to Natural and Social Dynamics. Heidelberg /New York: Springer, pp. 517-537.
18. Sanders M. (2011) Embracing Critical Thinking as a Model for Professional Development. Inquiry: Critical Thinking Across the Disciplines. Vol. 26, pp. 29-37-108.
19. Sekovanov, V., Ivkov V., Piguzov, A., Fateev, A. (2016) Exegution of Mathematics and Information multistep task "BUILDING A FRACTAL SET WITH L-SYSTEMS AND INFORMATION TECHNOLOGIES" as a means of creativity of students. Selected Papers of the XI International scientific-practical conference «Modern information technologies and IT-education» (SITITO 2016), pp. 204-211.
20. Smirnov E.I. (2017) Synergy of Researching «a Problem Zone» of a Basic Educational Element of Mathematical Education Content. Yaroslavl Pedagogical Bulletin. V. 5, pp. 82-89.

УДК
37.016:51**ПАРАБОЛА КАК СРЕДСТВО ДЕМОНСТРАЦИИ
ЕДИНСТВА ТЕОРИИ И ПРАКТИКИ
(ИЗ ОПЫТА КРУЖКОВОЙ РАБОТЫ)****Никита Александрович Казаков**
студент-бакалавр
alphan95@mail.ru
г. МоскваМосковский государственный
областной университет**Татьяна Ивановна Кузнецова**
д.п.н., профессор
kuzti45@gmail.com
г. МоскваИнститут русского языка и культуры
Московского государственного
университета имени М.В. Ломоносова

Аннотация. В статье раскрываются вопросы организации деятельности обучающихся на основе использования разнообразного материала, касающегося квадратичной функции и её графика. Предложены материалы для работы с обучающимися, находящимися на различных уровнях восприятия и усвоения математического материала: на базовом и профильном уровнях. Задачи статьи демонстрируют межпредметные связи математики с другими науками, ярко выражают возможности практического применения изучаемой тематики. В работу также привнесены аспекты математического моделирования в интерактивной среде GeoGebra (при реализации чертежей олимпиадной задачи) и демонстрации справедливости математических отношений. Организация проектной работы обучающихся на основе материалов статьи реализует возможности их деятельности на творческом уровне.

Ключевые слова: парабола; уравнение; практическая задача; модель; чертёж; проектная деятельность.

Общенаучный подход. Линиями второго порядка называются плоские линии, декартовы прямоугольные координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Парабола является частным случаем линии второго порядка [1].

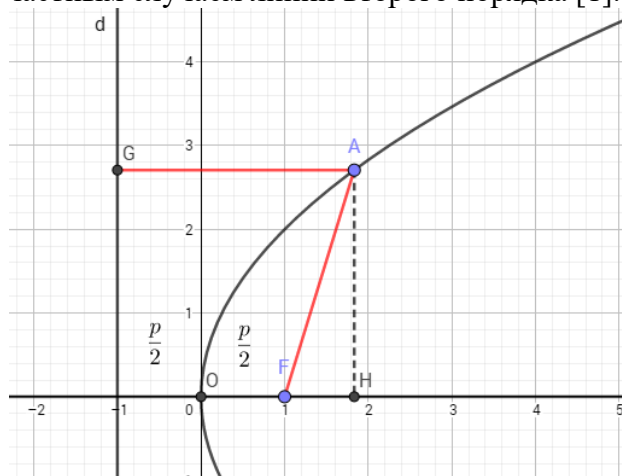


Рис.1. К общему определению параболы

1. Геометрическое определение. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от заданной точки F и заданной прямой d .

Точка $F(\frac{p}{2}; 0)$ называется фокусом параболы, прямая d называется директрисой параболы. Число p есть расстояние от фокуса параболы до её директрисы и называется фокальным параметром параболы.

Уравнение директрисы: $x = -\frac{p}{2}$.

Из геометрического определения параболы можно получить её каноническое уравнение, рассмотрев на рис. 1 прямоугольный $\triangle FHA$. По теореме Пифагора:

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \\ x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 &= x^2 + px + \frac{p^2}{4} \\ y^2 &= 2px \quad (1). \end{aligned}$$

Уравнение (1) — каноническое уравнение параболы.

2. При обучении в средней школе парабола определяется как линия, являющаяся графиком квадратичной функции, задаваемой уравнением:

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ где } a \neq 0. \quad (2)$$

Основное отличие уравнения (1) от уравнения (2) заключается в том, что в первом случае квадратичная зависимость представлена по аргументу y , а во втором – по аргументу x , что, по сути, меняет лишь ориентацию параболы относительно осей координат. При выявлении общего вида графика квадратичной функции школьниками используется метод «сгущения точек», т. е. рассчитывается таблица значений независимой и зависимой переменных, по ней строятся точки, которые затем соединяются плавной линией.

Важнейшим компонентом при обучении математике является мотивировка и актуализация знаний [2]. К сожалению, при формировании у обучающихся основных знаний и способов действий, не всегда эти знания подкреплены яркими примерами и задачами из повседневной жизни, в которых полученные знания имели бы прикладное значение. В связи с этим, по нашему мнению, возникает необходимость в расширении базовых знаний и умений. Первым шагом к достижению поставленной цели является решение следующих задач:

- 1) расширение круга задач, имеющих практическую значимость;
- 2) расширение теоретического блока знаний, решение нестандартных задач;
- 3) демонстрация связи изучаемой темы с повседневной жизнью;
- 4) организация творческой проектной деятельности обучающихся.

Приведём возможные варианты решения сформулированных задач.

3. Прежде всего, необходимо продемонстрировать межпредметные связи [5; 7], рассказав обучающимся, например, о том, что любое равноускоренное движение тела может быть описано квадратичной функцией, зависящей от времени. Целесообразно написать уравнение зависимости координаты от времени: $x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2}$, можно предложить решить задачу из физики на нахождение времени пути при известной проекции скорости, ускорения, начального и конечного положения тела на оси абсцисс. Ценность и необходимость решения таких задач состоит в том, что осуществляется ва-

рыирование несущественными признаками и отход от «шаблонного» восприятия параболы и квадратичной функции.

Далее, можно обратить внимание обучающихся на то, что любое тело, брошенное под углом к горизонту, опишет своим полётом траекторию, которая будет являться параболой. В качестве творческого задания и одновременно для активизации умственной деятельности можно попросить учеников привести как можно больше примеров, в которых объект движется по параболе (снаряд пушки, прыжок дельфина, полёт футбольного мяча). В связи с получением новых знаний расширяется круг задач. Например, можно предложить школьникам следующую задачу.

Задача 1. Из пушки, стоящей на земле, вылетает снаряд. Пусть центр системы координат – пушка. Известно, что в своей верхней точке на высоте 50 ед. снаряд пролетал тело, отдалённое от пушки на 5 единиц. Требуется:

а) ответить на вопрос: какую координату по оси абсцисс будет иметь тело, в который попадёт снаряд (на земле);

б) описать формулой траекторию движения снаряда.

Решение:

а) поскольку пушка помещена в начало координат, то задача сводится к определению абсциссы точки пересечения параболы с положительной полуосью абсцисс. Пусть уравнение $y = ax^2 + bx + c$ описывает траекторию движения снаряда, тогда $c = 0$,

$-\frac{b}{2a} = 5$. Координата падения снаряда будет одним из решений уравнения

$ax^2 + bx + c = 0$, причём, не нулевым, поскольку нулевое решение соответствует выбросу снаряда из пушки. Тогда, $x(ax + b) = 0$, $b = -10a$

Следовательно, $ax - 10a = 0$, $a \neq 0$ значит $x = 10$. Точно такой же ответ можно получить, рассуждая о свойстве параболы. Поскольку ось параболы пройдёт через точку (5; 0), то точка падения будет симметрична началу координат относительно этой точки. Значит, искомая координата $x = 5 + 5 = 10$.

б) Используем вышеизложенные результаты, а также то, что точка с координатами (5; 50) принадлежит искомому графику функции $y = ax^2 + bx + c$. Значит, $50 = 25a + 5b + 0$, $b = -10a$, откуда получаем: $-25a = 50$; следовательно, $a = -2$, $b = 20$. Итак, искомое уравнение траектории полёта снаряда будет иметь вид: $y = -2x^2 + 20x$.

Замечание. Необходимо варьировать условия задачи, привязывая их к жизненным ситуациям. (Например) Кроме того, ту же задачу можно сформулировать иначе:

Задача 1.1. Футболист сборной России даёт пас игрокам, находящимся на разных расстояниях от него. В максимальной точке полёта мяч пролетел над игроком № 1, удалённым на 5 метров от пасующего игрока, на высоте 50 метров. Перелетит ли мяч игрока № 2, находящегося на расстоянии 12 метров от пасующего или не долетит до него? Сколько метров останется добежать игроку № 2 для того, чтобы завладеть мячом? Опишите траекторию полёта мяча.

4. Итак, на этапе изучения школьниками основного теоретического материала следует представить им общенаучный подход к трактовке понятия «парабола», сформулировать геометрическое определение и дать общее каноническое уравнение (1). Для того чтобы обучающиеся глубже ощутили различие и сходство подходов, целесообразно предложить им задание на построение графиков.

Задача 2. Построить в одной системе координат графики следующих уравнений:
 $x^2 = 4y$, $y^2 = -4x$.

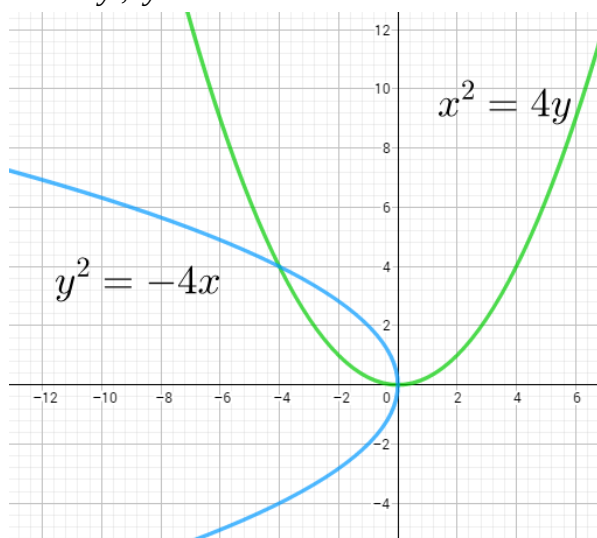


Рис. 2. Взаимное расположение двух парабол

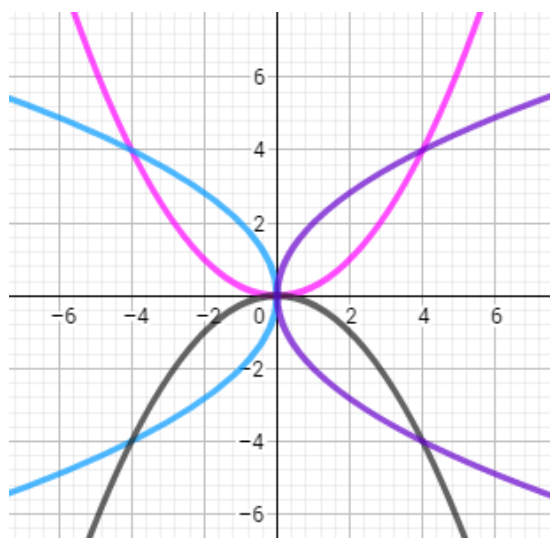


Рис. 3. Симметрия в четырех параболах

На рис. 2 представлены искомые графики, над которыми желательно поработать фронтально, задавая школьникам следующие вопросы:

- что общего и в чём различия данных графиков?
- в скольких точках пересекаются графики?
- каковы координаты точек пересечения графиков?
- какие графики и сколько ещё нужно достроить, чтобы общая картина воспринималась бы симметричной относительно начала координат? (См. рис. 3).

После знакомства обучающихся с каноническим уравнением параболы, можно продемонстрировать им специальный инструмент для построения парабол — параболограф Кавальери и обсудить принцип его работы.

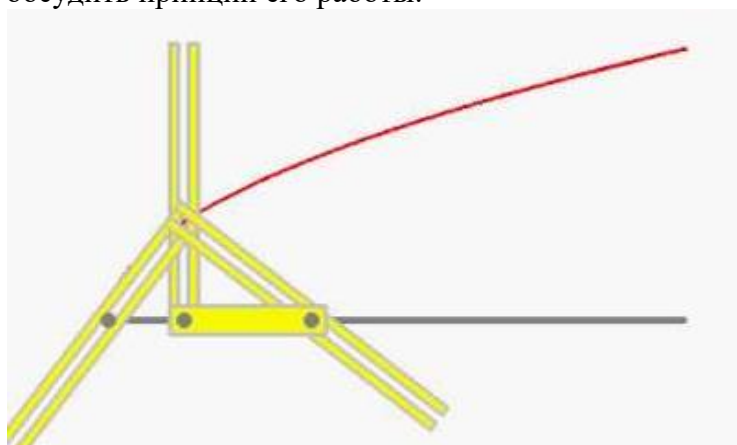


Рис. 4. Модель параболографа

Модель основывается на геометрическом определении параболы. Кроме того, легко установить квадратичную зависимость, рассматривая модель как прямоугольный треугольник, в котором высота, проведённая из вершины прямого угла, есть среднее геометрическое проекций катетов.

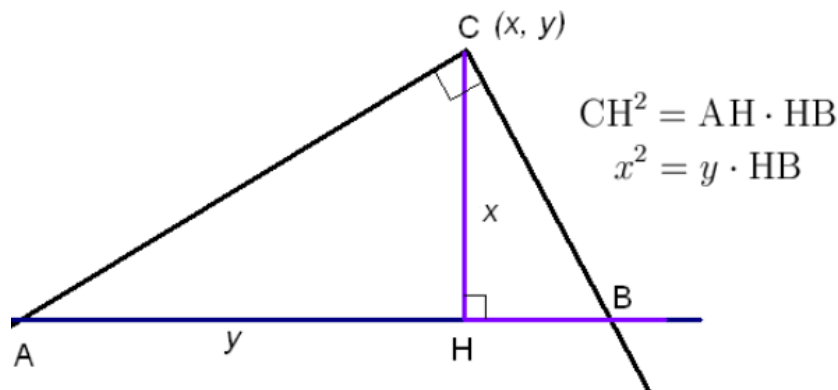


Рис. 5. Геометрическое обоснование параболографа

В качестве нестандартной задачи можно предложить задачу из журнала «Квант».

Задача 3. Сетка линий, изображённая на рисунке, состоит из concentric окружностей с радиусами 1, 2, 3, 4,... и общим центром, а также прямой, горизонтально проходящей через общий центр, и всевозможных касательных к окружностям, параллельных этой прямой. Вся плоскость разбита этими линиями на клетки, которые раскрашены в шахматном порядке. В цепочке точек, показанных на рисунке, каждые две соседние точки являются противоположными вершинами тёмной клетки. Докажите, что все точки такой бесконечной цепочки лежат на одной параболы (поэтому рисунок словно соткан из светлых и тёмных парабол).

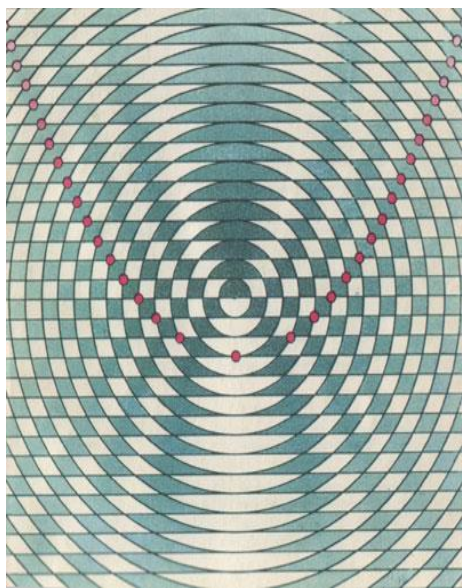


Рис. 6. К условию задачи 3

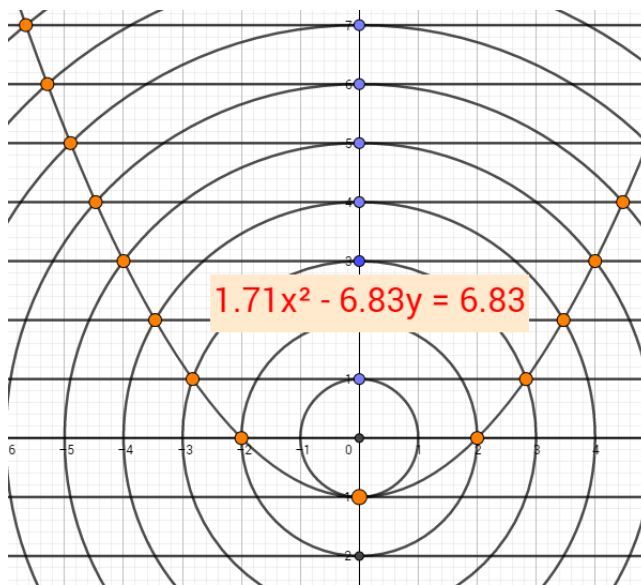


Рис. 7. Опытная проверка результатов построения

Визуализация задачи в интерактивной среде GeoGebra даёт возможность автоматически определить уравнение кривой. На рис. 7 представлен частный случай, из которого видно, что уравнением кривой служит парабола.

Для строгого доказательства необходимо обратиться к геометрическому определению параболы, приведённому нами ранее. Легко убедиться в том, что каждая точка удовлетворяет условиям определения. Это также можно заметить, выбирая любую точку чертежа. Достаточно лишь определить фокус параболы и её директрису. Возмож-

ность автоматизированного вычисления длин отрезков в среде GeoGebra показана на рис. 8.

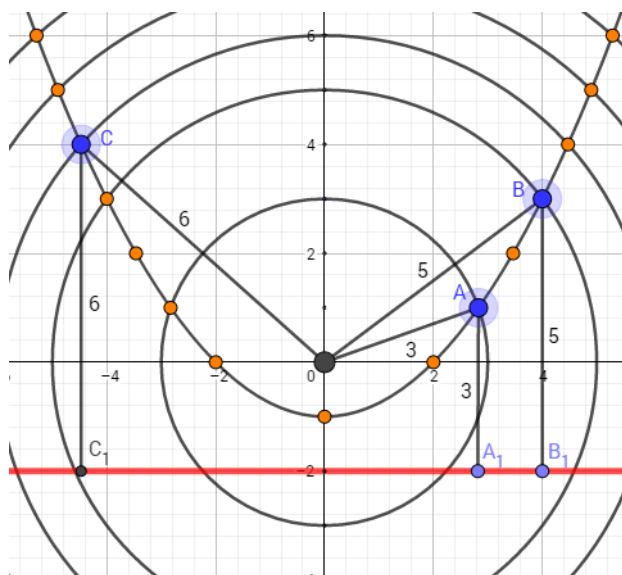


Рис. 8. Геометрическое доказательство задачи.

Из рис. 8 видно выполнение условий для точек A , B и C соответственно:

$$OA = AA_1 = 3$$

$$OB = BB_1 = 5$$

$$OC = CC_1 = 6$$

Необходимо отметить, что численное равенство отрезков видно из построения, например, $CC_1 = 4 + 2 = 6$ и, кроме того, $OC = 6$ как радиус окружности. Не нарушая общности, при условии выбора произвольной точки и произвольной параболы обобщаем вывод на остальные множества точек, получая при этом верное утверждение для остальных парабол.

5. Ярким примером из жизни, служащим демонстрацией практической значимости параболы, является проявление её оптического свойства. Если из фокуса параболы выпустить луч света в сторону отражающей поверхности, то после отражения от параболы он станет параллелен её оси. Если же на поверхность параболы пустить луч, параллельный её оси, то он непременно отразится от поверхности в её фокус. За счёт этих свойств появляется возможность собирать поток лучей и волн в фокусе параболы. Это свойство широко используется не только в оптике, для концентрации энергии в точке, но и в спутниковой связи, в которой используются параболические тарелки. Если параболу «проворачивать» вокруг оси, то получится тело, называемое параболоидом, в каждом центральном сечении которого мы наблюдаем одну и ту же параболу. Спутниковые тарелки имеют форму параболоидов. В фокусе спутниковой тарелки находится приёмник, который получает сигнал от спутника и отправляет его уже по кабелю в необходимое место. Если тарелка не будет строго направлена на спутник, то сбора лучей в фокусе не произойдёт, поскольку именно спутник излучает параллельные потоки. Свойство рассеивания также используется, например, в фарах автомобилей. От одной лампочки, помещённой в фокусе параболического отражателя фары, свет, отражаясь от стенок, выходит параллельными лучами, что и обеспечивает направленность света.

6. В качестве творческого задания может быть предложена подготовка учащимися докладов о многообразиях применения параболы в повседневной жизни. Кроме того, после знакомства с каноническим уравнением параболы, а также её оптическим свойством, в качестве задания может быть организация проектной деятельности школьников. Например, проект первый – создание модели параболографа Кавальери, наглядно демонстрирующей построение параболы и её геометрическое определение. Проект второй – построение модели «беспроигрышного бильярда», в котором прицельный шар помещён в фокус, а любой биток, выпущенный параллельно оси параболической формы стенки игровой площадки, при отскоке от стенки в любом случае попадал бы в биток. Этот проект наглядно демонстрирует оптическое свойство параболы в плоскости. Проект третий – моделирование параболической поверхности – линзы, которая, собирая в фокусе пучок света, может поджечь кусок картона, находящийся в фокусе. Последний проект наиболее трудоемок и подходит для юных изобретателей, демонстрирует оптические свойства параболоида. Четвёртый проект – анимационное моделирование параболы по её геометрическому определению в интерактивной геометрической среде GeoGebra [3; 6].

Таким образом, наблюдая широту и красоту рассмотренной тематики, целесообразно привносить представленные элементы в работу с обучающимися, наглядно демонстрируя единство теории и практики [4]. Настоящий материал может служить основой для организации различных форм учебной деятельности (урочной и внеурочной) в условиях кружка, при подготовке к олимпиадам, в проектной работе и т. п.

Список литературы

1. Жаров В.К., Матвеев О.А. (2008) Математика. Лекции по аналитической геометрии на плоскости и в пространстве. Выпуск 1. М.: Янус-К. 112 с.
2. Казаков Н.А., Артамонова Е.И. (2016) Роль мотивации учителя в учебной деятельности / Студенты – будущие педагоги об актуальных проблемах теории и практики образования: Сборник статей. С. 15–17.
3. Казаков Н.А., Кузнецова Т.И. (2018) Из истории терминов «модель» и «моделирование». Часть 3. Чертежи — модели задач / Проблемы учебного процесса в инновационных школах: Сб. науч. тр. / Под ред. О.В. Кузьмина. Иркутск: Изд-во ИГУ. Вып. 21. С. 54–58.
4. Кузнецова Т.И. (2011) Модель выпускника подготовительного факультета в пространстве предвузовского математического образования. 2-е изд. М.: ЛЕНАНД. 480 с. (Серия «Психология, педагогика, технология обучения».)
5. Саранцев Г.И. Методика обучения математике: методология и теория. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.twirpx.com/file/583820/> (дата обращения: 15.04.2017)
6. Страница сети Интернет математического пакета GeoGebra [Электронный ресурс]. URL: <https://www.geogebra.org/> (дата обращения: 16.12.2017)
7. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования / М-во образования и науки РФ. 3-е изд. М.: Просвещение, 2014. 48 с.

PARABOLA AS MEANS OF DEMONSTRATION OF UNITY OF THE THEORY AND PRACTICE (FROM EXPERIENCE OF KRUSHKOVY WORK)

N.A. Kazakov

student

alphan95@mail.ru

Moscow

Moscow State Regional University

T.I. Kuznetsova

Dr. Sci. (Pedagogy), professor

kuzti45@gmail.com

Moscow

The Institute of Russian and Culture
of The Lomonosov Moscow
State University

Abstract. This article reveals the questions of organizing the activity of students on the basis of using a variety of material relating to the quadratic function and its graph. Materials for work with students who are at different levels of perception and assimilation of mathematical material are offered at the basic and profile level. The tasks of the article demonstrate the inter-disciplinary connection of mathematics with other sciences, and also express clearly the possibilities of practical application of the studied subjects. The work also introduces aspects of mathematical modeling in GeoGebra interactive environment when implementing drawings of the Olympiad task and demonstrating the validity of mathematical relations. Possibilities of organizing the project work of students on the basis of the materials of the article realize the organization of activity at the creative level.

Keywords: parabola; equation; practical problem; model; drawing; project activity.

References

1. Zharov V.K., Matveyev O.A. (2008) Matematika. Lektsii po analiticheskoy geo-metrii na plos-kosti i v prostranstve. Vypusk 1. [Lectures on analytical geometry on the plane and in space. Issue 1] M.: Yanus-K. 112 p.
2. Kazakov N.A., Artamonova Ye.I. (2016) Rol' motivatsii uchitelya v uchebnoy deyatel'nosti [The role of teacher motivation in learning activities]. Studenty – budushchiye pedagogi ob aktual'nykh problemakh teorii i praktiki obrazovaniya: Sbornik statey. P. 15–17.
3. Kazakov N.A., Kuznetsova T.I. (2018) Iz istorii terminov «model'» i «modelirovaniye». Chast' 3. Chertezhi - modeli zadach [From the history of terms "model" and "modeling." Part 3. Drawings - task models] Problemy uchebnogo protsessa v innovatsionnykh shkolakh: Sb. nauch. tr. / Pod red. O.V. Kuz'mina. Irkutsk: Izd-vo IGU. Vyp. 21. P. 54–58.
4. Kuznetsova T.I. (2011) Model' vypusknika podgotovitel'nogo fakul'teta v pro-stranstve predvuzovskogo matematicheskogo obrazovaniya. 2-ye izd. [From the history of terms "model" and "modeling." Part 3. Drawings - task models] M.: LENAND, 2011. 480 p. (Seriya «Psikhologiya, pedagogika, tekhnologiya obucheniya».)
5. Sarantsev G.I. (2017) Metodika obucheniya matematike: metodologiya i teoriya. [Elektronnyy resurs] [Methodology for teaching mathematics: methodology and theory]. URL: <http://www.twirpx.com/file/583820/> (data obrashcheniya: 15.04.2017)
6. Stranitsa seti Internet matematicheskogo paketa GeoGebra (2017) [Elektronnyy resurs] [The Internet page of the GeoGebra math package]. URL: <https://www.geogebra.org/> (data obrashcheniya: 16.12.2017)
7. Federal'nyy gosudarstvennyy obrazovatel'nyy standart osnovnogo obshchego obrazovaniya (2014) [Federal state educational standard of basic general education] M-vo obrazovaniya i nauki RF. 3-ye izd. M.: Prosveshcheniye. 48 p.

УДК
378.147.88**ФОРМИРОВАНИЕ ГОТОВНОСТИ БАКАЛАВРОВ –
БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ И
ИНФОРМАТИКИ К ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ
ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В ПРОЦЕССЕ ПРОХОЖДЕНИЯ
СИСТЕМЫ ПРАКТИК****Тарасова Оксана Викторовна**
д.п.н., профессор
tarasova_orel@mail.ru
г. ОрелОрловский государственный
университет имени И.С. Тургенева

Аннотация. В статье изложен опыт организации обучения бакалавров - будущих учителей математики и информатики в Орловском государственном университете имени И.С. Тургенева. Сформулированы принципы построения основной образовательной программы. В статье поднимается вопрос о формировании готовности бакалавров – будущих учителей математики и информатики к профессиональной деятельности в процессе прохождения системы практик: практика по получению первичных профессиональных умений и навыков, в том числе первичных умений и навыков научно-исследовательской деятельности, практика по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности, педагогическая практика, научно-исследовательская работа, преддипломная практика. Изложены цели и задачи практики, их место в основной образовательной программе. Актуальность поднимаемых в статье вопросов определяется важностью реализации Концепции развития математического образования в РФ. В указанной Концепции констатируется факт, что «в Российской Федерации не хватает учителей и преподавателей образовательных организаций высшего образования, которые могут качественно преподавать математику». В связи с этим идет поиск эффективных форм подготовки бакалавров к профессиональной деятельности. Одним из которых, по замыслу автора, является система практик.

Ключевые слова: бакалавр, учитель математики и информатики, практика, профессиональная деятельность.

Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева осуществляет подготовку учителей математики и информатики. Реализация образовательной программы по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование, направленность Математика и Информатика, осуществляется в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования, утвержденного Министерством образования и науки Российской Федерации от 09 февраля 2016 г. №91 [Приказ Минобра, 2016:1].

Цель образовательной программы – подготовка высококвалифицированных и востребованных специалистов в области преподавательской деятельности на основе сочетания передовых инновационных технологий с научно-практической деятельностью; специалиста, владеющего профессиональными компетенциями в области современной педагогики, теории и методики обучения математике и информатике, владеющего теоретическими и практическими знаниями для определения и решения исследовательских задач в области образования.

Программа является одним из первоочередных мероприятий, направленных на реализацию Концепции развития математического образования в РФ. В указанной Концепции констатируется факт, что «в Российской Федерации не хватает учителей и

преподавателей образовательных организаций высшего образования, которые могут качественно преподавать математику, учитывая, развивая и формируя учебные и жизненные интересы различных групп обучающихся» [Концепция, 2014: 11]. Разработанная основная образовательная программа подготовки бакалавра ориентирована на решение поставленной государством проблемы подготовки педагогических кадров.

Принципы построения программы:

- 1) усиление роли проектно-исследовательской деятельности при сохранении ведущей роли фундаментального образования;
- 2) возможность использования модульной технологии;
- 3) усиление роли практики в познании;
- 4) развитие электронного обучения;
- 5) развитие сетевых форм сотрудничества;
- 6) высокие требования к материально-техническому (в том числе – лабораторному) обеспечению.

Содержание образовательной программы предусматривает формирование готовности бакалавра к профессиональной деятельности, к исследованию проблем математического образования, моделированию и прогнозированию образовательных процессов. Реализация поставленной цели, достижение соответствующего уровня компетенций, сформулированных в ФГОС ВО, осуществляется благодаря системе дисциплин, подлежащих изучению и практик. В образовательную программу входят: практика по получению первичных профессиональных умений и навыков, в том числе первичных умений и навыков научно-исследовательской деятельности, практика по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности, педагогическая практика, научно-исследовательская практика и преддипломная практика.

Каждый из видов практики является связующим звеном между теоретической подготовкой студентов и их самостоятельной работой в образовательных учреждениях.

Первый вид практики, к которой приступают студенты, является практика по получению первичных профессиональных умений и навыков, в том числе первичных умений и навыков научно-исследовательской деятельности. Прохождение практики запланировано в 4, 5 семестрах. Целями этой практики является раскрытие положений общей методики обучения математики и информатики на конкретных примерах; знакомство с работой учителя математики, учителя информатики и классного руководителя; обучение студентов организации воспитательной работы с учащимися.

Задачами практики являются: ознакомление студентов с системой и реальными условиями работы учителя математики и учителя информатики в современных образовательных учреждениях, передовым педагогическим опытом; формирование умений выполнять протокол урока и внеклассного мероприятия; формирование умений проводить анализ структурных компонентов урока и внеклассного мероприятия, форм и методов работы с учащимися; формирование умений планировать, готовить и проводить различные внеклассные мероприятия по общему плану учителя; формирование умений организовывать общение и устанавливать контакт с детьми на занятиях и индивидуально; формирование умений анализировать собственную педагогическую деятельность; содействие накоплению студентами опыта педагогической деятельности, развитию творческого подхода к выбору средств и методов обучения и воспитания учащихся; выработка у студентов творческого, исследовательского подхода к педагогической деятельности, приобретение ими навыков анализа результатов своего труда, формирование потребности в самообразовании. В период первой практики студент под руководством учителей и методистов знакомится с особенностями учебно-воспитательной системы различных типов учебных заведений.

В период практики студент должен проявить себя как начинающий специалист, обладающий глубокими научными знаниями по предмету, высокими моральными качествами, общественной активностью, глубоким интересом к работе, к педагогической профессии. Он должен быть примером организованности, дисциплинированности и трудолюбия. В процессе работы с учащимися студент стремится показать свою профессиональную компетентность, активно участвовать в жизни коллектива общеобразовательного учреждения. В конце третьего года обучения запланирована практика по получению профессиональных умений и опыта профессиональной деятельности. Цель практики состоит в актуализации, углублении и закреплении теоретической подготовки обучающихся, приобретении ими умений организовывать жизнедеятельность коллектива детей и отдельного ребенка в летний оздоровительный период, а также развитие профессионального мировоззрения и личностно- профессиональных качеств, необходимых педагогу для реализации профессиональной деятельности; освоение теоретических основ организации воспитательного процесса во временном детском коллективе в условиях детского оздоровительного лагеря всех типов; изучение принципов соединения теории и методики воспитания с опытом организации процесса оздоровительно- досуговой деятельности детей в условиях детского оздоровительного лагеря.

Следующий вид практики, обязательный для прохождения в 8,9 семестрах, педагогическая практика. Этот вид практики является основополагающим звеном в подготовке методически грамотного учителя. Она способствует обогащению и закреплению полученных в вузе знаний по педагогике, психологии, частным методикам, общественным и специальным наукам, позволяет будущим учителям познакомиться с особенностями преподавания предмета в конкретном классе (школе), с используемыми учебными и методическими пособиями, программным обеспечением, компьютерным классом. Целями практики являются приобретение и осознание будущим педагогом опыта педагогической деятельности в ходе выполнения основных функций учителя математики и учителя информатики общеобразовательных учебных заведений, становление профессиональной направленности их личности.

Практика строится по принципу постоянно возрастающей самостоятельности студентов в подготовке и проведении уроков и внеурочных мероприятий.

Готовясь к практике, студенты должны: ознакомиться с рабочими программами по предмету; изучить фактический материал школьных учебников для соответствующих классов; ознакомиться с новинками методической литературы, наглядными пособиями, программными средствами.

В ОГУ имени И.С. Тургенева бакалавр по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование готовится к следующим видам профессиональной деятельности: педагогическая; проектная, научно-исследовательская. В связи с этим неотъемлемой частью подготовки бакалавра – будущего учителя математики и информатики является организация научно-исследовательской работы. Бакалавр в области научно-исследовательской деятельности решает следующие профессиональные задачи: постановка и решение исследовательских задач в области науки и образования; использование в профессиональной деятельности методов научного исследования.

Научно-исследовательская работа студентов, обучающихся по данному направлению подготовки, включает в себя самостоятельную исследовательскую работу, направленную на формирование их готовности применению научных знаний в научно-исследовательской деятельности. Она может представлять собой как общую программу для всех обучающихся, осваивающих основную образовательную программу, так и индивидуальную программу, направленную на выполнение конкретного задания (конкретных заданий) отдельным студентом. Научно-исследовательская работа в семестре

выполняется студентом под руководством научного руководителя. Направление научно-исследовательской работы студента определяется в соответствии с темой выпускной квалификационной работы, особенностями его научно-исследовательской деятельности. Основной целью научно-исследовательской работы студента является формирование компетенции, обеспечивающей его способность к организации и проведению научно-исследовательской работы индивидуально и в коллективе, а также формирование умений и навыков практического применения полученных в период обучения теоретических знаний.

В период выполнения НИР решаются следующие задачи:

- формирование научно-исследовательского, инновационного мышления студентов;
- формирование умений применения традиционных и современных технологий сбора информации, теоретического анализа и систематизации, обработки и интерпретации полученных экспериментальных и эмпирических данных, владение современной методологией и методами психолого-педагогических исследований;
- совершенствование способности к самообучению, саморазвитию и профессиональному самосовершенствованию;
- развитие самостоятельности в изучении научных проблем, целеполагании, решении задач, возникающих в ходе научно-исследовательской деятельности;
- формирование умений оформления результатов научно-исследовательской работы (отчет по НИР, тезисы доклада, научная статья, курсовая работа, выпускная квалификационная работа, презентационные материалы к докладу и др.);
- развитие умений обоснованно отбирать методы научных исследований, исходя из цели и задач собственной научно-исследовательской работы в рамках выполнения выпускной квалификационной работы и/или задач практики «НИР»;
- совершенствование умений публичного представления результатов научно-исследовательской работы (выступление с докладами на студенческих конференциях по результатам проведенных исследований, ответы на вопросы, участие в дискуссиях и пр.).

НИР предполагает исследовательскую работу, направленную на развитие у бакалавров способности к самостоятельным теоретическим и практическим суждениям и выводам, умений объективной оценки научной информации, свободы научного поиска и стремления к применению научных знаний в образовательной деятельности.

Указанный вид работы предполагает как общую программу для всех бакалавров, обучающихся по конкретной образовательной программе, так и индивидуальную программу, направленную на выполнение конкретного задания. НИР проводится непрерывно путем выделения в календарном учебном графике непрерывного периода учебного времени для проведения всех видов практик, предусмотренных образовательной программой высшего образования.

Во время проведения НИР, руководители проводят со студентами беседы по следующей тематике: порядок подготовки, планирования и проведения экспериментальных исследований; методы планирования эксперимента; критерии выбора рационального метода проведения эксперимента; методы обработки экспериментальных данных; основы компьютерной обработки данных.

Преддипломная практика – этап учебного процесса, целью которого является применение студентом полученных в ВУЗе знаний, наработка опыта в условиях реальной образовательной организации. Преддипломная практика является последним этапом в системе практик. Целью преддипломной практики является проведение самостоятельной научно-исследовательской работы по выбранной теме выпускной квалификационной работы. Задачами преддипломной практики являются: систематизация и

углубление теоретических и практических знаний по профилю подготовки, их применение при решении конкретных педагогических или методических задач в соответствии с темой выпускной квалификационной работы; углубление и закрепление знаний, полученных в период обучения и предшествующих практик, необходимых для написания выпускной квалификационной работы; овладение методологией и умениями научно-исследовательской деятельности по проблеме выпускной квалификационной работы; анализ состояния педагогической теории и практики по исследуемой проблеме, оценка ее решения в современных условиях.

Преддипломная практика завершает теоретическую часть обучения. Местом ее прохождения является выпускающая кафедра, при этом предусмотрено обязательное посещение образовательной организации соответствующей специализации студента, с целью систематизации материала для его будущей выпускной квалификационной работы. Преддипломная практика является одним из наиболее сложных и многоаспектных видов учебной работы студентов. Преддипломная практика осуществляется в форме выполнения студентом реального исследовательского проекта в рамках утвержденной темы научного исследования и темы выпускной квалификационной работы с учетом научных интересов и возможностей образовательной организации.

Содержание преддипломной практики носит бинарный характер. Это значит, что практика включает бакалавров в те виды деятельности, в процессе которых у них формируются различные стороны научно-педагогических умений: находить наиболее рациональные конструктивные, технологические, организационные и педагогические решения, хорошо ориентироваться в отборе научной информации, ставить и решать принципиально новые вопросы.

В период практики студент выполняет следующие задания: посещает установочной конференции; знакомится с Положением о написании выпускной квалификационной работы бакалавра, требованиями к написанию ВКР; выполняет работу с каталогами и литературой в библиотеке университета и методическом кабинете кафедры; проводит подготовку списка литературы по теме выпускной квалификационной работы, оформление списка специальной литературы согласно требованиям ГОСТ; завершает эмпирическое исследование в рамках ВКР, осуществляет обработку и интерпретации полученных результатов; выполняет оформление методологии работы, формулировку теоретических выводов, теоретической и практической значимости работы; реализует основы организации педагогического эксперимента, используют электронные таблицы для анализа педагогических измерений в среде MS Office Excel, выполняют обработку результатов педагогических исследований статистическими методами в среде Microsoft Excel; учится использовать программу MyTestX в организации педагогического эксперимента; осуществляет формирование текста работы и его оформление в соответствии с требованиями.

Система практик играет важную роль в профессиональном становлении будущих педагогов, является эффективной формой профессиональной подготовки бакалавров – будущих учителей к профессиональной деятельности, в процессе которой осуществляется реализация полученных теоретических знаний и методической подготовки. В процессе прохождения практики формируются ключевые профессиональные качества педагога. Значение практики в подготовке бакалавра высоко, при этом важно соблюдать гармоничное сочетание теоретической и практической подготовки учителя. В заключение приведем слова выдающего ученого Д.И. Менделеева «Теория, не проверяемая опытом, при всей красоте концепции теряет вес, не признается; практика, не опирающаяся на взвешенную теорию, оказывается в проигрыше и убытке».

Список литературы

1. Концепция развития математического образования в Российской Федерации. // Вестник образования России. № 3. 2014. С.9-17.
2. Приказ Минобрнауки России от 9 февраля 2016 г. № 91 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки) (уровень бакалавриата)» // <https://минобрнауки.рф/документы/8073>

FORMATION OF READINESS OF BACHELORS-FUTURE TEACHERS OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE FOR PROFESSIONAL ACTIVITY DURING THE PASSAGE OF THE SYSTEM OF PRACTICES

O.V. Tarasova

Dr. Sci. (Pedagogy), professor
tarasova_orel@mail.ru

Orel

Orel State University named
after I. S. Turgenev

Abstract. The article presents the experience of the organization of training of bachelors - future teachers of mathematics and computer science at the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «Orel State University named after I. S. Turgenev». The principles of the basic educational program are formulated. The article raises the question of the formation of readiness of bachelors – future teachers of mathematics and computer science for professional activity in the process of passing a system of practices: practice to obtain primary professional skills, including primary skills and research activities, practice to obtain professional skills and professional experience, teaching practice, research work, pre-diploma practice. The goals and objectives of the practice, their place in the basic educational program. The relevance of the issues raised in the article is determined by the importance of the Concept of development of mathematical education in Russia. In the specified Concept the fact that "in the Russian Federation there are not enough teachers and teachers of the educational organizations of the higher education who can qualitatively teach mathematics is stated. In this regard, there is a search for ways to form the readiness of bachelors for professional activities. One of which, according to the author, is the process of passing the system of practices.

Keywords: bachelor, teacher of mathematics and computer science, practice, professional activity.

References

1. The concept of development of mathematical education in the Russian Federation (2014) [The Concept of the Development of Mathematical Education in the Russian Federation]. Journal of education of Russia. No. 3. Pp. 9-17.
2. Prikaz Minobrnauki Rossii ot 9 fevralia 2016 g. № 91 «Ob utverzhdenii federal'nogo gosudarstvennogo obrazovatel'nogo standarta vy'sshego obrazovaniia po napravleniiu podgotovki 44.03.05 Pedagogicheskoe obrazovanie (s dvumia profilami podgotovki) (uroven' bakalavriata)» [Electronic resource] [Order of the Ministry of education and science of Russia from February 9, 2016 No. 91 "on approval of the federally-th State educational standard of higher education strand NIJ 44.03.05 teacher training (with two profiles prepared Ki) (level undergraduate)»]. URL: 1.<http://nauka-pedagogika.com/viewer/142823/a?#?page=1> (Accessed: 12.12.2017)

УДК
378**К ВОПРОСУ ОБ ИНФОРМАТИЗАЦИИ УЧЕБНОГО
ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ
“ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ”****Дмитрий Анатольевич Власов**
к.п.н., доцент
dav495@gmail.com
г. МоскваРоссийский экономический университет
им. Г.В.Плеханова

Аннотация. В рамках данной статьи будет представлен анализ дидактических и исследовательских особенностей программного обеспечения Precision Tree, позволяющего по-новому проводить информатизацию учебного процесса по дисциплине «Теория принятия решений». Программное обеспечение специально создано для анализа задач принятия решений. Его использование в учебном процессе обеспечивает поддержку количественного анализа различных социально-экономических ситуаций. Это программное обеспечение является новой надстройкой в Microsoft Excel, что делает его доступным инструментом анализа задач принятия решений. Раскрыто содержание прикладной математической подготовки будущего бакалавра экономики в экономическом университете, позволяющая применять современные информационные технологии. Отмечается, что системообразующим компонентом содержания прикладной математической подготовки являются экономико-математические модели, в том числе модели принятия решений. Особое внимание уделено формированию модельных представлений студентов бакалавриата о различных социально-экономических проблемах и ситуациях, связанных с обоснованием и принятием оптимальных решений. В практическом контексте интерес представляет выделенная автором последовательность этапов информатизации учебного процесса по дисциплине «Теория принятия решений»: «Введение», «Интерфейс Precision Tree», «Моделирование с Precision Tree», «Анализ решений: структура и содержание», «Моделирование решения», «Примеры социально-экономических ситуаций, требующих принятия оптимального решений», «Рекомендации по разработке системы критериев принятия решений», «Рекомендации по созданию деревьев решений», «Сравнение методов анализа деревьев решений», «Проведение анализа решений», «Построение профилей рисков», «Предложения по выбору оптимального решения», «Анализ чувствительности», «Односторонний анализ чувствительности», «Двусторонний анализ чувствительности». Внедрение представленных подходов к информатизации учебного процесса в практику преподавания дисциплины «Теория принятия решений» и других прикладных математических дисциплин способствует повышению мотивации и качества обучения.

Ключевые слова: информатизация, учебный процесс, моделирование, математическая подготовка, Precision Tree, информационные технологии, принятие решений, экономическая ситуация.

Ранее в работах автора [4, 7] рассмотрены различные аспекты построения и развития **системы прикладной математической подготовки** и методические **особенности информатизации** [3, 6] прикладной математической подготовки бакалавра. Её компонентом являются задачи принятия оптимальных решений. Исследуя новые информационные технологии в качестве специального дидактического инструмента, от-

метим публикации [2, 5], в рамках которых уделяется существенное внимание геометрическим интерпретациям и исследовательскому потенциалу новых информационных технологий в прикладной математической подготовке экономиста в экономическом университете.

Информатизация учебного процесса в рамках дисциплины «Теория принятия решений» связана с целенаправленным формированием навыков студентов бакалавриата по выполнению заданий теории принятия решений, большинство из которых носит **интегративный характер**. Мы придерживаемся точки зрения о необходимости использования достижений контекстного подхода в обучении математическим дисциплинам [8], при этом необходимо уточнение возможностей педагогического проектирования и моделирования в контексте управления инновационными процессами в образовании [10], к которым относится информатизация.

Содержание прикладной математической подготовки бакалавра экономики связано с **количественным исследованием различных социально-экономических ситуаций**, например [12, 13]. Следует отметить работы [11, 14], открывающие новые направления в совершенствовании экономической и математической подготовки бакалавра. В контексте принятия решений интерес вызывают **методы вычислительной математики** [9]. Их использование позволяет анализировать модели принятия решений, не имеющие аналитического решения. После описания проблемного поля перейдем к рассмотрению особенностей использования *Precision Tree* в учебном процессе.

Использование программного обеспечения *Precision Tree* позволило в процессе преподавания учебной дисциплины «Теория принятия решений» сделать то, что не удалось сделать прежде – осуществить **построение дерева решений и диаграмм влияния непосредственно в электронных таблицах**, содержащих количественные характеристики задач принятия решений. Интересно, что используемые нами новые версии *Precision Tree* позволяют выполнять полный анализ социально-экономических ситуаций, требующих принятия оптимального решения без выхода из электронных таблиц. В контексте развития информатизации прикладной математической подготовки будущего бакалавра экономики интерес представляют исследования [1, 15], содержащие подходы, позволяющие повысить эффективность использования информационных технологий в анализе рискованных ситуаций.

Внедрение нового программного обеспечения *Precision Tree* на факультет дистанционного обучения Российского экономического университета им. Г.В. Плеханова позволило формировать у студента бакалавриата более четкие **представления о механизмах и особенностях количественного анализа** множеств возможных альтернатив и обоснованного выбора одной или нескольких оптимальных альтернатив. Естественно, что в процессе принятия решения при разборе прикладных задач социально-экономического содержания у студентов бакалавриата возникают вопросы:

- «Является ли выбранное решение оптимальным?»;
- «Подходят ли решения, которые мы выбрали, для практической реализации?».

Большинство задач анализа социально-экономических ситуаций, составляющих содержание прикладной математической подготовки будущего бакалавра экономики, требуют определения **способ структурирования альтернатив** (допустимых решений). Мы столкнулись с необходимостью сделать этот процесс более организованным, более простым и наглядным в объяснении студентам бакалавриата, в большинстве случаев испытывающих затруднения в условиях интегративного применения знаний из нескольких образовательных областей, таких как «Микроэкономика», «Методы моделирования и прогнозирования экономики», «Макроэкономика», «Теория игр», «Вычислительная математика», «Информационные технологии».

Новое программное обеспечение *Precision Tree* позволяет не только существенно расширить количество решаемых задач, но и повысить качество их решения, благодаря методически целесообразному использованию формального анализа решений. При необходимости анализа сложной социально-экономической ситуации, требующей непростых решений от лица, принимающего решения (ЛПР) первостепенной компетенцией ЛПР становится способность эффективного описания проблемной ситуации принятия решения.

В заключение статьи представим последовательность этапов для работы с *PrecisionTree*, обеспечивающую последовательное знакомство студентов бакалавриата с новым программным продуктом.

Этап 1. «Введение».

Этап 2. «Интерфейс *Precision Tree*».

Этап 3. «Моделирование с *Precision Tree*».

Этап 4. «Анализ решений: структура и содержание».

Этап 5. «Моделирование решения».

Этап 6. «Примеры социально-экономических ситуаций, требующих принятия оптимального решений».

Этап 7. «Рекомендации по разработке системы критериев принятия решений».

Этап 8. «Рекомендации по созданию деревьев решений».

Этап 9. «Сравнение методов анализа деревьев решений».

Этап 10. «Проведение анализа решений».

Этап 11. «Построение профилей рисков».

Этап 12. «Предложения по выбору оптимального решения».

Этап 13. «Анализ чувствительности».

Этап 14. «Односторонний анализ чувствительности».

Этап 15. «Двусторонний анализ чувствительности».

Список литературы

1. Вахрушева А., Горемыкина Г., Щукина Н. (2017) Методология оценки воздействия макросреды на функционирование вуза в условиях неопределенности // РИСК: Ресурсы, информация, снабжение, конкуренция. № 1. С. 140-145.
2. Власов Д. А. (2009) Возможности профессиональных математических пакетов в системе прикладной математической подготовки будущих специалистов // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования. № 4. С. 52-59.
3. Власов Д. А. (2009) Компетентностный подход к информатизации прикладной математической подготовки будущего учителя информатики // Информатика и образование. № 1. С. 120-122.
4. Власов Д. А. (2009) Проблемы проектирования содержания прикладной математической подготовки будущего специалиста // Сибирский педагогический журнал. № 8. С. 33-42.
5. Власов Д. А., Синчуков А. В. (2016) Равновесие Нэша в биматричных играх: технология моделирования и визуализации Wolfram Demonstration Project // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2016. Т. 12. № 4. С. 209-216.
6. Власов Д. А., Синчуков А. В. (2012) Стратегия информатизации методической системы математической подготовки бакалавров в России // Информатизация образования. Т. 2012. С. 68.

7. Власов Д. А. (2009) Методы обучения как компонент методической системы прикладной математической подготовки // Ярославский педагогический вестник. № 4. С. 125-129.
8. Калинина Е. С. (2017) О контекстном подходе в обучении математическим дисциплинам в вузах МЧС России // Современное образование: содержание, технологии, качество. № 1-9. С. 59.
9. Калинина Е. С. (2017) Роль педагогического проектирования и моделирования в управлении инновационными процессами в образовании / В сборнике: Современные проблемы науки, технологий, инновационной деятельности. Сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции. В 4-х частях. Под общей редакцией Е. П. Ткачевой. С. 97-100.
10. Пантина И. В., Синчуков А. В. (2012) Вычислительная математика – Московский финансово-промышленный университет «Синергия». 176 с.
11. Тихомиров Н. П. (2016) Идентификация и управление режимом воспроизводства населения // Социологические исследования. № 6 (386). С. 41-48.
12. Тихомиров Н. П., Тихомирова Т. М., Хамитов Э. М. (2016) Имитационные методы оценки эффективности участия во взаимном страховании // Экономика природопользования. № 6. С. 4-17.
13. Тихомиров Н. П., Тихомирова Т. М., Хамитов Э. М. (2017) Методы оценки эффективности государственного обеспечения устойчивости обществ взаимного страхования / В сборнике: Научный бюллетень Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова Москва. С. 177-181.
14. Тихомирова Т. М., Сукиасян А. Г. (2015) Сопоставительные оценки человеческого потенциала с учетом рисков социального неблагополучия // Экономика природопользования. № 1. С. 4-41.
15. Щукина Н. А., Горемыкина Г. И., Тарасова И. А. (2016) Дискретно-событийное моделирование деятельности отделения банка в среде Simevents системы Matlab+Simulink // Фундаментальные исследования. 2016. № 10-2. С. 452-456.

REVISITING MONITORING AND EVALUATION OF EDUCATIONAL OUTCOMES FROM THE PERSPECTIVE OF FSES

D.A. Vlasov Cand. Sci. (Pedagogy), associate professor dav495@gmail.com Moscow	Plekhanov Russian University of Economics
--	--

Abstract. Within this article the analysis of didactic and research features of the software of Precision Tree allowing to carry out in a new way informatization of educational process on discipline "The theory of decision-making" will be submitted. The software is specially created for the analysis of problems of decision-making. Its use in educational process provides support of the quantitative analysis of various social and economic situations. This software is a new superstructure in Microsoft Excel that makes it available the tool of the analysis of problems of decision-making. Content of applied mathematical training of future bachelor of economy at the economic university, allowing to apply modern

information technologies is disclosed. It is noted that a backbone component of content of applied mathematical preparation are economic-mathematical models, including decision-making models. Special attention is paid to formation of model ideas of students of a bachelor degree of various social and economic problems and situations connected with justification and acceptance of optimal solutions. In a practical context the sequence of stages of informatization of educational process which is marked out with the author on discipline "The theory of decision-making" is of interest: "Introduction", "Precision Tree Interface", "Modeling with Precision Tree", "Analysis of decisions: structure and contents", "Modeling of the decision", "Examples of the social and economic situations requiring acceptance optimum solutions", "Recommendations about development of the system of criteria of decision-making", "Recommendations about creation of trees of decisions", "Comparison of methods of the analysis of trees of decisions", "Carrying out the analysis of decisions", "Creation of profiles of risks", "Offers on the choice of an optimal solution", "The analysis of sensitivity", "The unilateral analysis of sensitivity", "The bilateral analysis of sensitivity". Introduction of the presented approaches to informatization of educational process in practice of teaching discipline "The theory of decision-making" and other applied mathematical disciplines promotes increase in motivation and quality of training.

Keywords: informatization, educational process, modeling, mathematical preparation, Precision Tree, information technologies, decision-making, economic situation.

References

1. Vakhrusheva A., Goremykina G., Schukin N. (2017) Metodologiya ocenki vozdeystviia makrosredy na funktsionirovanie vuza v usloviakh neopredelennosti [Metodologiya of assessment of impact of a makrosreda on functioning of higher education institution in the conditions of uncertainty] RISK: Resources, information, supply, competition. No. 1. P. 140-145.
2. Vlasov D.A. (2009) Vozmozhnosti professional'nykh matematicheskikh paketov v sisteme prikladnoi matematicheskoi podgotovki budushchikh spetsialistov [Possibilities of professional mathematical packages in the system of applied mathematical training of future experts] The Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia. Series: Education informatization. No. 4. P. 52-59.
3. Vlasov D.A. (2009) Kompetentnostny'i podhod k informatizatsii prikladnoi matematicheskoi podgotovki budushchego uchitelia informatiki [Competence-based approach to informatization of applied mathematical training of future teacher of informatics] Informatics and education. No. 1. P. 120-122.
4. Vlasov D.A. (2009) Problemy proektirovaniia soderzhaniia prikladnoi matematicheskoi podgotovki budushchego spetsialista [Problems of design of content of applied mathematical training of future expert] Siberian pedagogical magazine. No. 8. P. 33-42.
5. Vlasov D.A., Sinchukov A.V. (2016) Ravnovesie Ne'sha v bimatrichnykh igrakh: tekhnologiya modelirovaniia i vizualizatsii Wolfram Demonstration Project [Ravnovesiye Nesha in bimatrix games: technology of modeling and visualization of Wolfram Demonstration Project] Modern information technologies and IT education. T. 12. No. 4. P. 209-216.
6. Vlasov D.A., Sinchukov A.V. (2012) Strategiya informatizatsii metodicheskoi sistemy matematicheskoi podgotovki bakalavrov v Rossii [The strategy of informatization of methodical system of preparation of bachelors in Russia] Informatics and education. No. 1. P. 120-122.

- tion of methodical system of mathematical training of bachelors in Russia] Education Informatization. T. 2012. Page 68.
7. Vlasov D.A. (2009) Metody` obuchenii kak komponent metodicheskoi` sistemy` prikladnoi` matematicheskoi` podgotovki [Training methods as component of methodical system of applied mathematical preparation] Yaroslavl pedagogical bulletin. No. 4. P. 125-129.
8. Kalinin E.S. (2017) O kontekstnom podhode v obuchenii matematicheskimi distsiplinami v vuzakh MChS Rossii [O contextual approach in training in mathematical disciplines in higher education institutions of Emercom of Russia] Modern education: contents, technologies, quality. No. 1-9. P. 59.
9. Kalinin E.S. (2017) Rol` pedagogicheskogo proektirovaniia i modelirovaniia v upravlenii innovatsionny`mi protsessami v obrazovanii [Rol of pedagogical design and modeling in management of innovative processes in education] In the collection: Modern problems of science, technologies, innovative activity. The collection of scientific works on materials of the International scientific and practical conference. In 4 parts. Under the general of E.P. Tkachyova's editions. P. 97-100.
10. Pantina I.V., Sinchukov A.V. (2012) Vy`chislitel`naia matematika – Moskovskii` finansovo-promyshlennyi` universitet «Sinergiya» [Calculus mathematics – the Moscow financial industrial university "Sinergiya"]. 176th p.
11. Tikhomirov N.P. (2016) Identifikatsiia i upravlenie rezhimom proizvodstva naseleniia [Identification and management of the mode of reproduction of the population] Social researches. No. 6 (386). P. 41-48.
12. Tikhomirov N.P., Tikhomirova T.M., Hamitov E.M. (2016) Imitatsionny`e metody` ocheni e`ffektivnosti uchastii vo vzaimnom strahovanii [Imitating methods of assessment of efficiency of participation in mutual insurance] Environmental management Economy. No. 6. P. 4-17.
13. Tikhomirov N.P., Tikhomirova T.M., Hamitov E.M. (2017) Metody` ocheni e`ffektivnosti gosudarstvennogo obespecheniia ustoi`chivosti obshchestv vzaimnogo strahovaniia [Methods of assessment of efficiency of the state ensuring stability of societies of mutual insurance] In the collection: Scientific bulletin of Plekhanov Russian University of Economics Moscow. P. 177-181.
14. Tikhomirova T.M., Sukiasyan A.G. (2015) Sopostavitel`ny`e ocheni chelovecheskogo potentcala s uchetom riskov sotsial`nogo neblagopoluchiia [Comparative estimates of human potential taking into account risks of social trouble] Environmental management Economy. No. 1. P. 4-41.
15. Shchukina N.A., Goremykina G.I., Tarasova I.A. (2016) Diskretnosoby`tii`noe modelirovanie deiatel`nosti otdeleniia banka v srede Simevents sistemy` Matlab+Simulink [Diskretno-sobytiynoe modelirovanie deyatelnosti otdeleniya banka v srede Simevents sistemy Matlab+Simulink] Fundamental'nye issledovaniya. № 10-2. P. 452-456.

УДК
378**РОЛЬ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
В СОВЕРШЕНСТВОВАНИИ ПОДГОТОВКИ
БАКАЛАВРА МЕНЕДЖМЕНТА****Александр Валерьевич Синчуков**

к.п.н., доцент

avsinchukov@gmail.com

г. Москва

Российский экономический университет

им. Г.В. Плеханова

Аннотация. В центре внимания статьи некоторые методические особенности информатизации математической подготовки бакалавра менеджмента в экономическом университете, связанные с формированием и развитием инновационных компонентов профессиональной компетентности бакалавра менеджмента и повышением их конкурентоспособности на рынке труда. Представлен методический анализ образовательных областей «Высшая математика» и «Прикладная математика» в контексте возможностей ее информатизации средствами PrecisionTree и WolframAlpha. Работа с банком типовых задач математических дисциплин свидетельствуют о необходимости поиска новых методик обучения математическому и имитационному моделированию, новых информационных технологий, позволяющий студенту учиться структурировать свои решения, делать их более организованными и обоснованными. Речь идет о важной профессиональной компетентности будущего бакалавра менеджмента, связанного с пониманием управленческой деятельности и процедур принятия оптимальных управленческих решений в условиях информатизации и меняющихся социально-экономических условиях. В статье отмечается, что с использованием нового средства PrecisionTree преподавателю легче объяснять студентам процесс выбора и обоснования оптимального управленческого решения, выполнять качественный и количественный анализ имеющихся альтернатив. Отметим, что PrecisionTree позволяет моделировать процесс принятия решений. Под моделированием принято понимать любой вид деятельности, посредством которой исследователь пытается сформировать представления о реальной жизненной ситуации. Модельное представление реальной жизненной ситуации по-новому позволяет проанализировать её. Модельное представление или модель можно использовать для изучения социально-экономической ситуации, требующей принятия оптимального управленческого решения, для оценки перспектив развития исследуемой ситуации в случае выбора той или иной альтернативы из множества возможных альтернатив.

Ключевые слова: информатизация, математическая подготовка, прикладная математика, дерево решений, бакалавр менеджмента, моделирование, PrecisionTree, WolframAlpha.

Множество математических методов, входящие в группу методов исследования операций, исторически разрабатывались специально для **поддержки принятия оптимальных решений** в различных областях хозяйственной деятельности. Другими словами, они являются специальным инструментом для менеджера. Например, для исследования программы производства был создан специальный раздел линейного программирования, в рамках которого стало возможно оптимальное планирование и анализ реализуемой производственной программы. Впоследствии, частные задачи линейного программирования были обобщены на **теорию оптимального распределения ресурсов организации**, непосредственно связанную с профессиональной деятельностью менеджера.

Особое место в задачах исследования операций занимают задачи на графах, в частности, деревья решений. Их использование позволяет **анализировать ситуацию неопределенности и риска** [2, 7]. Особую роль в информатизации математической подготовки будущего бакалавра менеджмента играет новая база знаний и набор вычислительных алгоритмов WolframAlpha, рекомендации по использованию которой представлены в работах [5, 6]. Интересно, что теорию графов стало возможным использовать при рассмотрении различных социально-экономических ситуаций, имеющих общие управленческие черты, но различные по своему экономическому содержанию, например, [1, 12]. При реализации методической системы прикладной математической подготовки будущего бакалавра менеджмента мы учитываем, что студенту достаточно трудно **сопоставлять конкретную задачу управления**, получаемую в учебном процессе или в ходе производственной практики, с определенной экономико-математической моделью.

Большинство студентов испытывают трудности восприятия формальной постановки задач принятия оптимальных управленческих решений. Иногда возникает некоторое неприятие количественного инструмента принятия решений и недоверие к получаемым количественным результатам. Количественные методы принятия решений для массового распространения и эффективного практического применения требуют реализации в более удобном виде – в виде инструментальных средств – **специального программного обеспечения** [9,10]. В данной статье мы рассмотрим возможности программного обеспечения *PrecisionTree*, работа в котором позволяет учитывать содержательно-методические особенности современной теории принятия решений.

Внедрение *PrecisionTree* приносит передовые информационные технологии моделирования и анализа решений в методическую систему прикладной математической подготовки будущего бакалавра экономики и менеджмента, обеспечивает **поддержку проектного подхода** при обучении математике в вузе с использованием сервисов компьютерной математики, особенности которого представлены в исследовании [11]. Для построения модели принятия решений *PrecisionTree* необходимо использование электронной таблицы *MS Excel*. Естественно, что студенты бакалавриата, обучающиеся по направлению подготовки «Менеджмент», не являются экспертами в статистике или методах оптимальных решений по причине сокращения аудиторной нагрузки и в большинстве случаев недостаточного уровня прикладной математической подготовки, недостаточной мотивации к использованию методов моделирования и прогнозирования экономики в будущей профессиональной деятельности, связанной с принятием оптимальных управленческих решений.

Программный продукт *PrecisionTree* позволяет создавать и исследовать модели принятия решений и в случае недостаточной математической подготовки. При этом дидактический акцент смещается в направлении анализа и интерпретации полученного результата, оценки его практической значимости в контексте анализа конкретной социально-экономической ситуации, что позволяет по-новому реализовать идеи компетентно-контекстного обучения при организации лабораторного практикума по математическим дисциплинам [8]. Ряд технических вопросов в практике подготовки будущих бакалавров менеджмента остается не раскрытым, однако практические навыки использования *PrecisionTree* позволяют формировать уникальный опыт количественного анализа и математического моделирования. В связи с описанными выше обстоятельствами, студент не в полной мере понимает, как работает *PrecisionTree* с *Microsoft Excel* для выполнения анализа решений. Пользователь *PrecisionTree* не обязательно должен в полной мере знать, как *PrecisionTree* работает, чтобы эффективно использовать этот программный продукт, но в ряде случаев его использование стимулирует дальнейшие исследования,

дальнейший поиск интересных и полезных объяснений работы этого современного инструментального средства принятия решений.

Рассмотрим далее процесс анализа решения в контексте прикладной математической подготовки будущего бакалавра менеджмента. Анализ решений обеспечивает условия для реализации системного описания исследуемой социально-экономической проблемы. Процесс анализа решения в подготовке будущего бакалавра менеджмента является процессом моделирования проблемной ситуации. При этом студент учится принимать во внимание предпочтений и убеждений лиц, принимающих решения, особенности информационной среды, например, неопределенности, с целью выбора решения, которому следует придерживаться.

Анализ решения *PrecisionTree* предоставляет студенту отчет, состоящий из предпочтительных путей решения и анализ риска отклонения от всех возможных результатов. Отметим, что при использовании **потенциала имитационного моделирования** в учебном процессе [13] следует делать акцент, что выполненный анализ решений может дать более качественные результаты, помогая понять компромиссы, конфликты интересов и осознать иерархию целей (критериев). В процессе использования *PrecisionTree* в учебном процессе нами реализуется специальная *схема обучения моделированию процесса принятия решений*, идеи которой представлены в работах [3, 4]. Отметим, что первым шагом в анализе ситуации принятия решений становится определение проблемы, которую студент должен решать при выполнении прикладной содержательной задачи. Например, речь идет о максимизации прибыли или минимизации влияния производства на окружающую среду.

Ряд учебных задач характеризуются сочетанием двух и более целей принятия решения. После уточнения целей и одобрения целей преподавателем студенты переходят к построению математической модели принятия решения. *PrecisionTree* мы используем как инструмент построения деревьев решений, являющихся традиционным инструментом, используемым в анализе решений.

Список литературы

1. Акутина А., Горемыкина Г., Мастяева И. (2015) Формирование стратегии поведения вуза на рынке образовательных услуг // РИСК: Ресурсы, информация, снабжение, конкуренция. № 1. С. 233-239.
2. Власов Д.А., Синчуков А.В. (2015) Дидактические особенности применения пакета имитационного моделирования ITHINK в системе подготовки бакалавров экономики / В сборнике: Современные информационные технологии и ИТ-образование. Сборник научных трудов. Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики; Под редакцией В.А. Сухомлина. С. 295-299.
3. Власов Д.А., Синчуков А.В. (2016) Интеграция информационных и педагогических технологий в системе математической подготовки бакалавра экономики // Современная математика и концепции инновационного математического образования. Т. 3. № 1. С. 208-212.
4. Власов Д.А. (2012) Информационные технологии в системе математической подготовки бакалавров: опыт МГГУ им. М. А. Шолохова // Информатика и образование. № 3. С. 93-94.

5. Власов Д.А., Синчуков А.В. (2013) Новые технологии Wolframalpha при изучении количественных методов студентами бакалавриата // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования. № 4. С. 43-53.
6. Власов Д.А., Синчуков А.В. (2016) Технологии Wolframalpha в преподавании учебной дисциплины «Эконометрика: базовый уровень» для студентов экономического бакалавриата // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Информатизация образования. № 4. С. 37-47.
7. Калинина Е.С. (2017) Применение математических методов в задачах проектирования сложных технических систем / В сборнике: Фундаментальные и прикладные исследования: гипотезы, проблемы, результаты сборник материалов I Международной научно-практической конференции. С. 64-69.
8. Калинина Е.С. (2017) Реализация компетентно-контекстного обучения при организации лабораторного практикума по математическим дисциплинам / В сборнике: Приоритетные научные направления: от теории к практике сборник материалов XXXV Международной научно-практической конференции. С. 23-28.
9. Муханов С.А. (2006) Применение информационных технологий при преподавании математики студентам гуманитарных специальностей // Педагогическая информатика. №1. С. 60-62.
10. Муханов С.А., Муханова А.А. (2015) Проектирование образовательного процесса по математике в контексте всемирной инициативы CDIO // Профессиональное образование в России и за рубежом. № 1 (17). С. 52-57.
11. Муханова А.А., Муханов С.А. (2013) Проектный подход при обучении математике в вузе с использованием сервисов компьютерной математики / В сборнике: Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона Периодический межвузовский сборник научно-методических работ. Киров. С. 151-155.
12. Татарников О.В., Голодов С.В. (2014) Статистическое моделирование инновационных процессов // Экономика и управление: проблемы, решения. № 3 (27). С. 163-167.
13. Щукина Н.А. (2017) Имитационная модель как элемент управления и оценки эффективности работы отделения банка // Иннов: электронный научный журнал. № 1 (30). С. 9.

ROLE OF INFORMATION TECHNOLOGIES IN IMPROVEMENT OF TRAINING OF THE BACHELOR OF MANAGEMENT

A.V. Sinchukov
Cand. Sci. (Pedagogy), associate professor
avsinchukov@gmail.com
Moscow

Plekhanov Russian
University of Economics

Abstract. In the center of attention of article some methodical features of informatization of mathematical training of the bachelor of management at the economic university connected with formation and development of innovative components of professional competence of the bachelor of management and increase in their competitiveness in labor market. The methodical analysis of the educational areas "Higher Mathematics" and "Applied Mathematics" in the context of opportunities of its informatization is submitted by means of PrecisionTree and WolframAlpha. Work with bank of standard problems of mathematical disciplines confirm need of search of new techniques of training in mathematical and imitating modeling, new information technologies, allowing the student to learn to structure the decisions, to do them more organized and reasonable. It is about important professional competence of future bachelor of the management connected with understanding of administrative activity and procedures of adoption of optimal administrative solutions in the conditions of informatization and the changing social and economic conditions. In article it is noted that with use of new means of PrecisionTree it is easier for teacher to explain to students process of the choice and justification of the optimal administrative solution, to make the qualitative and quantitative analysis of the available alternatives. Let's note that PrecisionTree allows to model decision-making process. It is accepted to understand any kind of activity by means of which the researcher tries to create ideas of a real life situation as modeling. Model representation of a real life situation in a new way allows to analyse it. Model representation or model can be used for studying of the social and economic situation requiring acceptance the optimal administrative solution, for assessment of prospects of development of the studied situation in case of the choice of this or that alternative from a set of possible alternatives.

Keywords: informatization, mathematical preparation, applied mathematics, tree of decisions, bachelor of management, modeling, PrecisionTree, WolframAlpha.

References

1. Akutina A., Goremykina G., Mastyaeva I. (2015) Formirovanie strategii povedeniia vuza na ry`nke obrazovatel`ny`kh uslug [Formation of the strategy of the university's behavior in the market of educational services] RISK: Resursy, informatsiya, snabzhenie, konkurentsia. № 1. P. 233-239.
2. Vlasov D. A., Sinchukov A. V. (2015) Didakticheskie osobennosti primeneniia paketa imitacionnogo modelirovaniia ITHINK v sisteme podgotovki bakalavrov e`konomiki [Didactic features of application of the ITHINK simulation package in the system of bachelor's degree in economics] / V sbornike: Sovremennye informatsionnye tekhnologii i IT-obrazovanie. Sbornik nauchnykh trudov. Moskovskiy gosudarstvennyy universitet imeni M.V. Lomonosova, fakul'tet vychislitel'noy matematiki i kibernetiki; Pod redaktsiey V.A. Sukhomlina. 2015. P. 295-299.
3. Vlasov D. A., Sinchukov A. V. Integratsiia informatcionny`kh i pedagogicheskikh tekhnologii` v sisteme matematicheskoi` podgotovki bakalavra e`konomiki [Integration of information and pedagogical technologies in the system of mathematical training of the bachelor of economics] // Sovremennaya matematika i kontseptsii innovatsionnogo matematicheskogo obrazovaniya. – 2016. T. 3. № 1. P. 208-212.
4. Vlasov D. A. (2012) Informatcionny`e tekhnologii v sisteme matematicheskoi` podgotovki bakalavrov: opy`t MGGU im. M. A. Sholohova [Information technologies in the

- system of mathematical training of bachelors: experience MGU after them. M. A. Sholokhov]: opyt MGGU im. M. A. Sholokhova // Informatika i obrazovanie. № 3. P. 93-94.
5. Vlasov D. A., Sinchukov A. V. (2013) Novye tekhnologii Wolframalpha pri izuchenii kolichestvennykh metodov studentami bakalavriata [New technologies Wolframalpha in the study of quantitative methods by undergraduate students] Vestnik Rossiyskogo universiteta družby narodov. Seriya: Informatizatsiya obrazovaniya. № 4. P. 43-53.
6. Vlasov D.A., Sinchukov A.V. (2016) Tekhnologii Wolframalpha v prepodavanii uchebnoy distsipliny «Ekonometrika: bazovyy uroven'» dlya studentov ekonomicheskogo bakalavriata [Wolframalpha technologies in the teaching of the discipline "Econometrics: a basic level" for students of the economic baccalaureate] Vestnik Rossiyskogo universiteta družby narodov. Seriya: Informatizatsiya obrazovaniya. № 4. P. 37-47.
7. Kalinina E.S. (2017) Primenenie matematicheskikh metodov v zadachakh proektirovaniya slozhnykh tekhnicheskikh sistem [Application of mathematical methods in the design of complex technical systems] V sbornike: Fundamental'nye i prikladnye issledovaniya: gipotezy, problemy, rezul'taty sbornik materialov I Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. P. 64-69.
8. Kalinina E.S. (2017) Realizatsiya kompetentno-kontekstnogo obucheniya pri organizatsii laboratornogo praktikuma po matematicheskim distsiplinam [Implementation of competent-contextual training in the organization of a laboratory workshop on mathematical disciplines] / V sbornike: Prioritetnye nauchnye napravleniya: ot teorii k praktike sbornik materialov XXXV Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. P. 23-28.
9. Mukhanov S.A. (2006) Primenenie informatsionnykh tekhnologiy pri prepodavanii matematiki studentam gumanitarnykh spetsial'nostey [Application of information technologies in the teaching of mathematics to students of humanitarian specialties] Pedagogicheskaya informatika. № 1. P. 60-62.
10. Mukhanov S.A., Mukhanova A.A. (2015) Proektirovanie obrazovatel'nogo protsessa po matematike v kontekste vseмирnoy initsiativy CDIO [Designing the educational process in mathematics in the context of the worldwide initiative of CDIO] Professional'noe obrazovanie v Rossii i za rubezhom. № 1 (17). P. 52-57.
11. Mukhanova A.A., Mukhanov S.A. (2013) Proektnyy podkhod pri obuchenii matematike v vuze s ispol'zovaniem servisov komp'yuternoy matematiki [Project approach for teaching mathematics in a university using computer mathematics services] V sbornike: Matematicheskyy vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona Periodicheskyy mezhvuzovskiy sbornik nauchno-metodicheskikh rabot. Kirov. P. 151-155.
12. Tatarnikov O.V., Golodov S.V. (2014) Statisticheskoe modelirovanie innovatsionnykh protsessov [Statistical modeling of innovation processes] Ekonomika i upravlenie: problemy, resheniya. № 3 (27). P. 163-167.
13. Shchukina N.A. (2017) Imitatsionnaya model' kak element upravleniya i otsenki effektivnosti raboty otdeleniya banka [Simulation model as an element of management and performance evaluation of the bank branch] Innov: elektronnyy nauchnyy zhurnal. 2017. № 1 (30). P. 9.

УДК
004.896**НЕЙРОСЕТЕВЫЕ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ
ОБУЧАЮЩИЕ СИСТЕМЫ В ПРОЦЕССЕ ОСВОЕНИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ****Анастасия Викторовна Герасимчук**
студент
ana-ger@mail.ru
г. ЕлецЕлецкий государственный
университет им. И.А. Бунина

Аннотация. В статье предлагается решение проблемы структурирования и представления содержания, методологии и дидактики преподавания математических дисциплин в контексте интеллектуальной обучающей системы, основанной на нейросетевых технологиях и обеспечивающей рациональную организацию процесса индивидуального обучения с максимальной адаптацией к уровню подготовки и способностям обучаемого. В статье рассмотрены особенности реализации и применения подобной системы с учетом существующего конструкторского опыта, методико-педагогических наработок, исторических особенностей развития нейросетевых технологий. Описаны и обоснованы основные этапы проектирования интеллектуальной компьютерной обучающей системы, дана краткая характеристика каждого из этих этапов. В целях соблюдения требований политики безопасности компьютерного прикладного программного обеспечения, введена классификация пользователей на группы с указанием их права и основных функций. Подробно рассмотрена модульная структура построения интеллектуальной компьютерной обучающей системы. Описаны основные содержательные и функциональные характеристики каждого из предложенных модулей. Предложены решения по классификации обучаемых по статическим и динамическим психолого-педагогическим признакам. Рассмотрен один из способов классификации учебного материала, структурированный в рамках индивидуализированного математического компьютерного обучения, с последующим его формирование в вектор текущих потребностей обучаемого, служащий основой формирования персонализированных стратегий обучения в рамках заданного обучающего курса. Изложены особенности и преимущества проведения адаптивного тестирования математических знаний обучаемых. Введены понятия «сложности» и «трудности» тестовых заданий, рассмотрены способы определения их исходных значений, а также методы проверки степени их соответствия друг другу с целью объективизации и повышения уровня достоверности компьютерного тестирования. Обоснованы и описаны механизмы динамической корректировки персональной стратегии обучения. Приведены преимущества внедрения и эксплуатации интеллектуальной компьютерной обучающей системы в процессы высшего математического образования.

Ключевые слова: компьютерное обучение математике, интеллектуальные системы, искусственные нейронные сети.

Введение. На современном этапе развития общества проблема эффективного информационного обеспечения процессов управления и принятия решений в различных сферах человеческой деятельности становится особенно актуальной и перспективной. Достижения технических и математических наук позволяют применять ЭВТ как мощнейшую высокоскоростную систему обработки данных, способную оказывать всестороннюю поддержку пользователя в решении поставленных задач, в том числе в качестве системы автоматизированной поддержки принятия решений. Особую роль информационные технологии играют в сфере образования, так как алгоритм обучения – про-

цесс принятия решений, сценарий развития которого достаточно сложно прогнозируем. Следует заметить, что традиционные системы обучения, базирующиеся на современных информационных технологиях, остаются тем не менее недостаточно интеллектуальными. Обучение по жестким сценариям, самонавигация обучаемого по гипертекстовым электронным курсам не дают необходимого знаниевого и познавательного эффекта, которого следовало бы ожидать от подлинного индивидуального подхода к обучению. Решение данной проблемы возможно в разработке новой концепции интеллектуальной обучающей системы, основанной на моделях и методах искусственного интеллекта (искусственные нейронные сети, далее – ИНС), которая обеспечивает рациональную организацию процесса индивидуального обучения с максимальной адаптацией к уровню подготовки и способностям обучаемого.

Особенности интеллектуальной компьютерной обучающей системы. Подобная система обучения, основанная на нейросетевом прогнозировании (планировании) сценария обучения позволит упростить работу педагогу в условиях увеличения числа обучаемых в единицу учебного времени, количества документально-методической работы, степени вовлеченности общества в образовательную деятельность высших школ.

ИНС – это не «чёрный ящик», а громадный распределенный параллельный процессор, состоящий из элементарных единиц обработки информации, накапливающих экспериментальные знания и представляющих их для последующей обработки. [Хайкин, 2006: 32] История развития ИНС, как инструмента математического знания, неоднозначна, имеет периоды резкого возрастания и угасания интереса со стороны мирового научного сообщества. Говоря о сегодняшнем дне, можно отметить возвращение интереса к аппарату ИНС, количественному и качественному увеличению практики его применения, в том числе и в сфере образования. Так, например, изучением возможностей различного применения ИНС в образовании занимаются: С.П. Грушевский (математический анализ) [2001], Н.Ю. Добровольская (программирование) [2009], Е.И. Горюшкин (адаптивное тестирование по информатике) [2009] и другие исследователи.

Весьма перспективным применение ИНС может оказаться и в области обучения математике в высшей школе. Применение системы адаптивного тестирования, классификации и определения вектора дальнейшего обучения приведет к возрастанию степени индивидуализации процесса обучения, что повысит качество образования в соответствии со Стратегией развития образования в Российской Федерации [2017].

Этапы разработки интеллектуальной компьютерной обучающей системы. Внедрение ИНС в учебную деятельность высшей школы возможно посредством разработки интеллектуальной компьютерной обучающей системы, выполненной в виде специального программного обеспечения. При проектировании любой электронной обучающей системы, согласно исследованиям Г.В. Можасовой и И.В. Тубановой [2002], выполняются следующие пять этапов:

1) Определение круга пользователей и их функций.

Основными лицами, участвующими в процессе обучения являются обучающийся и обучаемый. Учитывая специфику и сложность эксплуатации и обслуживания различных средств ЭВТ, разумно включить в список лиц, участвующих в эксплуатации специального программного комплекса Администратора, ответственного за работоспособность, актуальность и доступность специального программного обеспечения.

В таблице 1 перечислены возможные группы пользователей интеллектуальной компьютерной обучающей системы и приведены соответствующие функции.

2) Постановка целей и задач курса.

При постановке целей и задач интерактивного обучающего курса необходимо руководствоваться требованиями ФГОС, рабочих программ и другой нормативно-методической документации.

Таблица 1.

Пользователь	Функции
Обучаемый	1. Изучение информации теоретической и практической направленности; 2. Прохождение тестовых заданий;
Обучающий	1. Просмотр и редактирование информации различной направленности; 2. Контроль прохождения и редактирование тестовых заданий; 3. Формирование отчетов по работе специального программного обеспечения; 4. Обобщение и анализ сведений по вопросам преподавания курса;
Администратор	1. Корректировка работы логических блоков специального программного обеспечения; 2. Всесторонняя поддержка работы пользователей; 3. Ведение политики учетных записей пользователей, локальной политики безопасности.

3) Отбор и структурирование материала с учетом целевых показателей.

Отбор и структурирование производится на основании Тематического плана, разрабатываемого для каждого учебного курса отдельно с незначительными вариациями для определенного учебного заведения высшего образования. Именно на этом этапе происходит определение общего количества тем, подлежащих изучению в процессе освоения конкретной дисциплины.

4) Определения последовательности изучения учебного материала.

При определении последовательности изучения учебного материала, необходимо учитывать различные уровни начальной подготовки обучаемых в высшей школе. В то же время, для решения вопроса о повышении качества усвоения заданного материала, необходимо формировать персональный индивидуальный вектор обучения, что является достаточно трудозатратным для педагогического работника, лишенного каких-либо технических средств поддержки. Однако, при вовлечении в процесс современных достижений компьютерной техники, процесс может быть в большей степени упрощен и даже полностью автоматизирован. Для решения задач прогнозирования и автоматизации принятия решений, удобно применять кибернетические технологии интеллектуального анализа данных, основанные на теории нечетких алгоритмов, наиболее известным приложением которых являются ИНС.

5) Определение общей структуры электронного курса.

Структура интеллектуальной компьютерной обучающей система. При построении компьютерного обучающего курса, по аналогии с любым другим человеко-ориентированным программным обеспечением, необходимо выделить основной (функциональный) модуль и вспомогательные модули, которые обеспечат комфортную и привычную работу пользователей со специальным программным комплексом. Поэтому, для интерактивного обучающего программного обеспечения возможно применение следующей модели построения (рисунок 1):

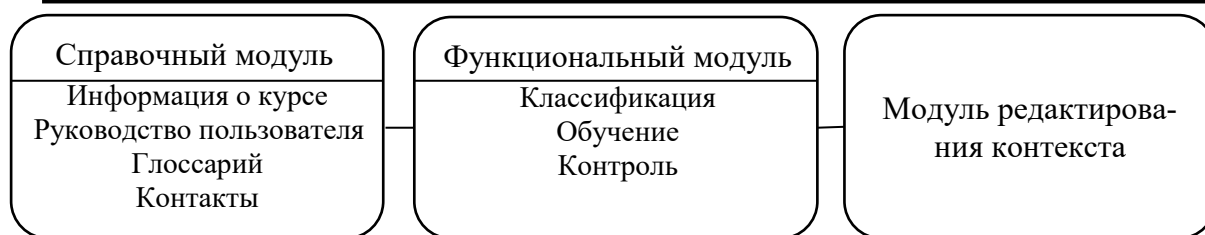


Рисунок 1. Структура обучающего программного продукта

«Справочный модуль» содержит в себе:

- краткую информацию о курсах обучения (при формировании нескольких курсов по одной или нескольким дисциплинам в рамках одного специального обучающего программного комплекса сведения предоставляются по каждому из них);
- руководство пользователя для обучаемого и обучающего, доступ к которым определяется в зависимости от заданных прав пользователей;
- глоссарий, представляющий собой перечень основных определений и терминов, используемых в предлагаемых курсах обучения;
- контакты и справочные сведения о разработчиках и администраторах специального обучающего программного комплекса.

В рамках «Функционального модуля» реализованы основные процедуры и функции, составляющие практико-педагогическую основу специального программного обеспечения. Кроме того, именно «Функциональный модуль» составляет интеллектуальную основу интерактивного обучающего средства, благодаря включению в него аппарата ИНС. Более детально структура указанного модуля представлена на рисунке 2.



Рис. 2. Структура "Функционального модуля" обучающего программного продукта

Рассмотрим далее логические элементы «Функционального модуля».

1. Классификация. Алгоритмы классификации студентов могут быть различны по исполнению и по логике протекающих в них процессов. Всё чаще в последнее время встречаются классификаторы, основанные на различных ИНС, например, многослойный персептрон, сеть Хэмминга, когнитрон или неоккогнитрон. Такие интеллектуальные обработчики находят применение в процессах распознавания графических образов, распределения ресурсов в управлении или в банковской сфере. Кроме того, динамичность и гибкость инструмента ИНС позволяет использовать их в любой сфере науки и

творчества, в том числе и в образовании. Так, целесообразно использовать алгоритмы нечеткой логики для классификации обучаемых высших школ при выборе вектора обучения, подходящего персонально каждому из них. Такой отбор является многопараметровым и сложноформализуемым для человека, однако машинное восприятие позволяет преодолеть эти ограничения и провести разбиение множества обучаемых на заданное количество подгрупп, сформированных по признаку схожести восприятия и скорости усвоения информации.

В процессе классификации обучаемых можно выделить три стадии:

1. Сбор статической и первичной динамической информации об обучаемом (тестирование, анкетирование, опрос, собеседование);
2. Анализ и обработка полученных данных;
3. Определение подгруппой принадлежности объекта обучения:
 - 3.1. Формирование вектора профиля обучаемого;
 - 3.2. Обработка полученного вектора нейросетевым классификатором и принятие решения о подгрупповой принадлежности;
 - 3.3. Вывод рекомендованной для обучаемого подгруппы.

II. Обучение. В процессе изучения тем выбранного курса, обучаемому предлагается учебный материал, представленный в виде учебной и практических частей. Контекстное содержание учебного материала различно и представлено данными, разбитыми на группы в зависимости от уровня сложности и способа представления.

Классификация информации, подлежащей изучению, по различным признакам представлена в таблице 2.

Таблица 2.

Способу приложения	Учебная	Минимальная
		Расширенная
Уровень сложности	Практическая	
	Начальный	
	Базовый	
	Продвинутый	
Способы отображения	Текстовый	
	Визуальная	Графическое изображение
		Анимированное изображение
		Видеоряд
	Акустический	

В процессе прохождения курса, формируется вектор текущих потребностей обучаемого (рис. 3), основные значения элементов которого представляют собой числовые выражения в пределах допустимых значений.

Возможные значения переменных указанного вектора представлены в таблице 3. При более подробном рассмотрении, можно заключить, что структура вектора текущих потребностей обучаемых состоит из:

- номера изучаемой темы курса (где Т – общее количество тем);
- обязательно предлагаемой к изучению минимальной учебной части, состоящей из определений, теорем, лемм и доказательств по необходимости;
- вариативной расширенной учебной части, которая может содержать примеры и задачи различного контекстного содержания (текстовые, графические (изображения, анимация, видео) или акустические примеры) различной сложности (от 1 до 3);

– практической части, обусловленной номером подгруппы обучаемого, определяющим набор заданий для самостоятельного изучения и решения (где N – общее количество сформированных подгрупп).

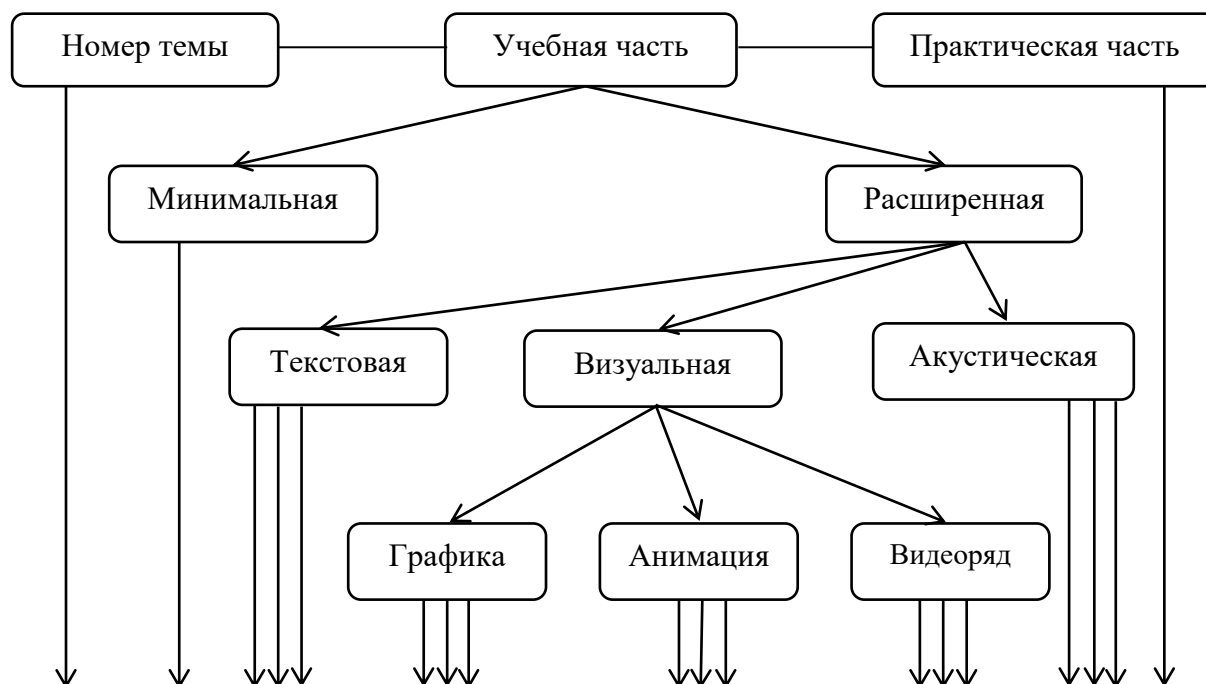


Рис. 1. Формирование вектора текущих потребностей обучаемого

Общее возможное количество примеров (Р) может быть скорректировано администратором учебного курса по запросу обучающего в зависимости от потребностей обучающихся.

Таблица 3.

Значения	Вектор текущих потребностей обучаемого																	Практическая часть						
	Учебная часть																							
	Расширенная																							
	Текстовая			Визуальная									Акустическая											
				Графика			Анимация			Видеоряд														
№	1	2	3	4	5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17						
Тип, уровень информации	Номер темы			Минимальная			начальный			базовый			продвинутый			начальный			базовый			продвинутый		
1, ..., Т	1			1, ..., Р			1, ..., Р			1, ..., Р			1, ..., Р			1, ..., Р			1, ..., Р			1, ..., N		

Значения вектора текущих потребностей обучаемого, полученные в ходе изучения темы курса выбранной дисциплины, сохраняются с целью дальнейшей их передачи на шаг корректировки (для подтверждения правильности классификации обучаемого, либо переопределения подходящей ему подгруппы).

III. Тестирование. В целях повышения качества проводимого тестирования, рекомендуется применять компьютерное адаптивное тестирование, основанное на кибернетических методах интеллектуального анализа данных, в частности, на применении технологии ИНС. При внедрении адаптивного тестирования, составляется перечень контрольно-измерительных материалов учитывающий, в том числе, сложность задания. При этом целесообразно разделить такие понятия как сложность и трудность. Сложность, в нашем случае, будет отражать реальную наполненность тестового задания, определяемую первоначально методом педагогической экспертизы, предложенным В.С. Черепановым [2006]. Трудность же предполагает реальную способность студентов к решению задания, зависящую как от способностей конкретной группы, так и от методики построения курса [Бужинская, 2017].

По завершении изучения темы, раздела или курса обучаемому предлагается пройти текущий, рубежный или итоговый контроль соответственно. В качестве наиболее объективной, быстрой в обработке и простой в исполнении формы контроля целесообразно использовать компьютерное тестирование, в том числе с возможностью выбора ответа. При прохождении тестирования, обучаемый лишается возможности использования учебной части осваиваемого курса, за исключением справочных материалов, отдельно предоставляемых в данном тестировании.

В итоге, на основании общего количества предложенных к решению задач и количества верно решенных из них, вычисляется процент усвоения знаний изучаемой темы, раздела или курса. На основании вычисленного процента происходит дальнейшее перемещение обучаемого по темам изучаемого курса по простой схеме движения, представленной в таблице 4.

Таблица 4.

Набранный процент	Направление движение
80-100	Переход к следующей теме курса
50-80	Переход к следующей теме курса, с предоставлением опорных знаний по пройденной теме
0-50	Повтор текущей темы курса

Принудительное возвращение к материалам предыдущих тем считается нецелесообразным, так как обучаемый лишен возможности перехода к новой теме при недостаточном уровне усвоения пройденного ранее материала. В тоже время, система не должна исключать возможности такого перехода, при возникновении подобного добровольного желания у обучаемого. Внедрение личностно ориентированных систем тестирования позволяет провести реальную оценку трудности заданий, их соответствия заявленному уровню сложности, что приведет к сокращению времени тестирования, повышению уровня объективности оцениваемых результатов, поддержанию заинтересованности студентов в освоении дисциплины, построению более эффективных групповых и индивидуальных стратегий обучения.

IV. Корректировка. В процессе освоения дисциплины, не исключено перемещение обучаемого из одной подгруппы психолого-педагогического восприятия в другую. С целью осуществления функции обратной связи и динамизации процесса формирования траектории обучения, проводится постоянная сверка и по необходимости переклассификация обучаемых по обновленным динамическим признакам. В случае, если потребности обучаемого в объеме или способе представления учебного материала изменятся, он автоматически переместится в более подходящую для него группу. Как и в случае первичной классификации обучаемого по совокупности статических и динамических признаков.

ческих признаков, повторная перкласификация проводится механизмом ИНС в автоматическом режиме и не требует вмешательства педагогического работника.

Помимо корректировки обучаемого по подгрупповой принадлежности, происходит корректировка соответствия степеней сложности и трудности тестовых заданий по результатам анализа деятельности всей учебной группы, по результатам которой вычисляется реальная «стоимость» каждого тестового задания. Проведение поправок подобного рода позволяет поддерживать систему тестирования в актуальном, адекватном возможностям обучаемых состоянии, что позволяет более точно оценивать уровень усвоения изучаемого материала для дальнейшего формирования вектора обучения.

«Модуль редактирования контекста» доступен только для пользователей Обучающий и Администратор, и позволяет редактировать тематическое наполнение курса, не меняя логики его построения. Основная задача данного модуля мгновенное устранение неточностей текстового и графического изложения, опечаток и т.д. на местном уровне.

Заключение. Таким образом, разработанная под индивидуальные нужды образовательной организации высшего образования и внедренная интеллектуальная компьютерная обучающая система, выполненная в виде специального программного обеспечения на основе ИНС, позволяет:

- снизить общий уровень нагрузки педагогического работника;
- провести психолого-педагогическую экспертизу обучающихся высших учебных заведений;
- рационализировать использование учебного времени в группах с высокой наполняемостью и численностью студентов;
- увеличить уровень познавательной и творческой активности обучаемых за счет индивидуализации обучения и повышения уровня их самоорганизации;
- проводить автоматизированный анализ различных педагогических данных как по группе обучающихся, так и по каждому из них персонально;
- проводить текущий, рубежный и итоговый контроль;
- применить передовые технологии отображения и вывода визуальной и акустической информации;
- повысить эффективность применяемых в настоящее время методов дистанционного обучения.

Перечисленные выше преимущества внедрения интеллектуальной компьютерной обучающей системы, адаптированные для математических дисциплин, позволяют говорить о вышеуказанной системе как о эффективном инструменте решения педагогических задач, возникающих в высшей школе.

Список литературы:

1. "Об утверждении государственной программы Российской Федерации "Развитие образования"// Постановление Правительства Российской Федерации от 26 декабря 2017 года № 1642 [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://government.ru/docs/30832> (дата обращения: 20.03.2018);
2. Анисова Т.Л. (2018) Принципы методики обучения математике, направленной на повышение математической компетентности бакалавров // Современные проблемы науки и образования. № 1; [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://science-education.ru/ru/article/view?id=27326> (дата обращения: 20.03.2018);
3. Бужинская Н.В., Гребнева Д.М., Макаров И.Б. (2017) Проектирование электронного учебного курса по робототехнике для студентов специальности 09.02.05 «прикладная информатика (в экономике)» // Современные проблемы науки и образова-

- ния. №2.; [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://science-education.ru/ru/article/view?id=26204> (дата обращения: 20.03.2018);
4. Горюшкин Е.И. (2009) Использование нейросетевых технологий в адаптивном тестировании по информатике в вузе: дисс. к.п.н. Курск. 174 с.;
 5. Грушевский С.П. (2001) Проектирование учебно-информационных комплексов по математике: дисс. д.п.н. Краснодар. 385 с.;
 6. Добровольская Н. Ю. (2009) Компьютерные нейросетевые технологии как средство индивидуализированного обучения студентов физико-математических специальностей: Дис. к. п. н. Краснодар. 260 с.;
 7. Закалин И.Ю. (2018) Методы поддержки принятия решений на основе информационных технологий // Вестник магистратуры. № 1-1. С. 23-26.;
 8. Захаров А.И., Матюшкин А.М. (1970) Проблемы адаптивных систем обучения // Кибернетика и проблемы обучения. М.: Прогресс. 389с.;
 9. Можая Г.В., Тубанова И.В. (2002) Как подготовить мультимедийный курс: Методическое пособие для преподавателей. Томск. [Электронный ресурс] Режим доступа: <http://window.edu.ru/resource/899/23899/files/index.html> (дата обращения: 20.03.2018);
 10. Хайкин С. (2006) Нейронные сети: полный курс, 2-е издание.: Пер. с. англ. М.: Издательский дом «Вильямс». 1104 с.: ил. парал. тит. англ.;
 11. Черепанов В.С. (2006) Основы педагогической экспертизы. Ижевск: Изд-во ИжГТУ. 124 с.

NEURAL NETWORK INTELLIGENT TUTORING SYSTEM IN THE DEVELOPMENT OF THE MATHEMATICAL DISCIPLINES OF THE HIGHER SCHOOL

A.V. Gerasimchuk
student
ana-ger@mail.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

Abstract. The article proposes a way of structuring and presenting the content, methodology and didactics of teaching mathematical disciplines. This method is implemented using an intelligent learning system. This system is based on neural network technologies and ensures the rational organization of the individual learning process. It adapts to the level of training and abilities of the trainee. This article describes the specifics of the implementation and application of the system, taking into account today's design experience, methodological and pedagogical developments, historical features of the development of neural network technologies. Described and justified the main stages of the design of intelligent computer-aided training system, given a brief description of each of these stages. The classification of users into groups with their rights and basic functions was introduced. Considered in detail the modular structure of the intelligent computer learning systems. The main content and functional characteristics of each of the proposed modules are described. The proposed decision on the classification of trainees according to the static and dynamic psychological and pedagogical characteristics. One of the ways of classification of educational material, structured in the framework of individualized mathematical computer training, followed by its formation in the vector of the current needs of the student, serving as the basis for the formation of personalized learning strategies within a given training course. Features and advantages of carrying out adaptive testing of mathematical knowledge of the trained are stated. The concepts of "complexity" and "difficulty" of test tasks are intro-

duced, the methods of determining their initial values, as well as the methods of checking the degree of their compliance with each other in order to objectively and improve the reliability of computer testing are considered. The mechanisms of dynamic correction of personal learning strategy are substantiated and described. Given the advantages of implementation and operation of intelligent computer learning systems in the higher processes of mathematics education.

Keywords: computer training in mathematics, intelligent systems, artificial neural networks.

References.

1. Decree of the Government of the Russian Federation of December 26, 2017 no 1642 «About approval of the state program of the Russian Federation "Development of Education» Available at: <http://government.ru/docs/30832/> (accessed 20 March 2018).
2. Anisova T.L. (2018) Printsipy metodiki obucheniya matematike, napravlennoy na povyshenie matematicheskoy kompetentnosti bakalavrov [Principles of the methodology of teaching mathematics aimed at increasing the mathematical competence of bachelors] *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*, N1. Available at: <http://science-education.ru/ru/article/view?id=27326> (accessed 20 March 2018) (in Russian).
3. Buzhinskaya N.V., Grebneva D.M., Makarov I.B. (2017) Proektirovanie elektronnoy uchebnogo kursa po robototekhnike dlya studentov spetsial'nosti 09.02.05 «prikladnaya informatika (v ekonomike)» [Designing an electronic training course on robotics for students of specialty 09.02.05 "Applied Informatics (in Economics)"] *Sovremennye problemy nauki i obrazovaniya*, N 2. Available at: <http://science-education.ru/ru/article/view?id=26204> (accessed 20 March 2018) (in Russian).
4. Goryushkin E.I. (2009) Ispol'zovanie neyrosetevykh tekhnologiy v adaptivnom testirovanii po informatike v vuze: diss. k.p.n. [Use of neural network technologies in adaptive testing in computer science at the university. Ph.D. Thesis] Kursk. 174 p. (In Russia).
5. Grushevskiy S.P. (2001) Proektirovanie uchebno-informatsionnykh kompleksov po matematike: diss. d.p.n. [Designing of educational and information complexes in mathematics. D.Sc. Thesis] Krasnodar. 385 p. (In Russia).
6. Dobrovol'skaya N.Yu. (2009) Komp'yuternye neyrosetevye tekhnologii kak sredstvo individualizirovannogo obucheniya studentov fiziko-matematicheskikh spetsial'nostey: Dis. k. p. n. [Computer neural network technologies as a means of individualized training of students of physical and mathematical specialties. Ph.D. Thesis] Krasnodar. 260 p.
7. Zakalin I.Yu. (2018) Metody podderzhki prinyatiya resheniy na osnove informatsionnykh tekhnologiy [Methods of decision support based on information technology] *Vestnik magistratury*, N 1-1, pp. 23-26. (in Russian).
8. Zakharov A.I., Matyushkin A.M. (1970) Problemy adaptivnykh sistem obucheniya [Problems of adaptive learning systems] Moscow, Progress Publ. 389 p..
9. Mozhaeva G.V., Tubanova I.V. (2002) Kak podgotovit' mul'timediynyy kurs: Metodicheskoe posobie dlya prepodavateley. Tomsk. 2002 [How to prepare a multimedia course] Available at: <http://window.edu.ru/resource/899/23899/files/index.html> (accessed 20 March 2018) (in Russian).
10. Haykin S. (1999) Neural Networks: A Comprehensive Foundation. 2nd ed., Prentice-Hall Publ. (Russ. ed.: Moscow, Vilyams Publ., 2006, 1104 p.).
11. Cherepanov V.S. (2006) Osnovy pedagogicheskoy ekspertizy [The basics of pedagogical expertise]. Izhevsk, Kalashnikov ISTU. 124 p.

УДК
378

**К ВОПРОСУ О ЛИЧНОСТНОМ ПОДХОДЕ
В ПРАКТИКЕ УНИВЕРСИТЕТСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ
(СОЦИОЛОГИЧЕСКИЙ АСПЕКТ)**

Владимир Александрович Сапрыкин

к.п.н., доцент
titus-m@mail.ru

г. Елец

Людмила Геннадьевна Гайтерова

titus-m@mail.ru

г. Елец

Елецкий государственный
Университет им. И.А. Бунина

Елецкий государственный
Университет им. И.А. Бунина

Аннотация. В статье с точки зрения социологии рассмотрена практика российского университетского образования. Актуализирована необходимость внедрения технологий личностного подхода в практику вузовской деятельности для организации механизма развития инновационного процесса. Описан специальный механизм развития инновационного процесса в университете. Продемонстрирован обобщённый опыт одного из ведущих университетов РФ – МГУ им. М.В. Ломоносова – в сфере обеспечения эффективного вхождения преподавательского коллектива вуза в сферу личностной парадигмы. Показана связь образовательных технологий в рамках личностного подхода и административной управленческой деятельности, адекватной личностной модели образовательной системы. Дан пример модели управления в МГУ им. М.В. Ломоносова. Показана значимость личностного опыта, который входит в структуру содержания образования в форме интерактивного диалога. В рамках умозаключения обозначено, что образовательная структура, реализующая личностный подход, соответствует природе университетского образования. Установлено, что в рамках личностного подхода университет воспринимается как саморазвивающийся организм, в котором ориентация руководства на компетентность, личные достижения, творчество и ответственность вытесняет традиционные модели управления, основанные на власти, нормативных документах, статусе и контроле. Отмечено, что данная образовательная структура способствует формированию важного регулятора управления, каковым являются представления педагогов и научных работников о качествах выпускника университета. Рассмотрены компетенции, наличие которых обеспечивает подготовленность специалистов в различных видах профессиональной деятельности. Выделено, что компетенции должны развиваться у студентов как в учебном процессе, так и в образовательной среде университета. Отмечена востребованность в современной России в активных, самостоятельных людях, что определяет приоритет личностно-ориентированного образования среди различных образовательных концепций.

Ключевые слова: личностный подход, университет, инновационный процесс, образование, управление.

В настоящее время всё больше и больше требуется внедрение концептуальных идей и технологий личностного подхода в практику университетской деятельности, чтобы создавать специальный механизм развития инновационного процесса в университете. Этот механизм может включать (как отмечают А.А. Воронин, В.М. Зув, В.М. Кларин) [1]:

1. Информационный компонент, предполагающий информирование о результатах исследований, связанных с разработкой концепции развития университета в об-

разовательной среде, о практическом опыте, об удачных и неудачных экспериментах.

2. Научно-исследовательский компонент, связанный с организацией целевых (опережающих, пилотных и др.) экспериментов, с созданием экспериментальных площадок, лабораторий, обеспечивающих методическую базу инновационного процесса.
3. Мотивационно-стимулирующий компонент, включающий психологическую поддержку иницирующих кафедр, ученых-новаторов, утверждение их индивидуальности, авторских прав, пропаганду их деятельности в высших учебных заведениях, в средствах массовой информации, через систему профессиональных конкурсов, в учебных видеофильмах, в интернете и т.п.
4. Квалификационно-образовательный компонент, направленный на обучение инновационному стилю мышления, технологиям личностно-ориентированного обучения; на разработку программ, критериев и методов профессионального саморазвития.
5. Экономический компонент, означающий эффективное использование внебюджетных поступлений, создание фондов, спонсорских объединений, сферы платных образовательных услуг, учебных предприятий, развитие системы дифференциальной оплаты труда.
6. Управленческий компонент, включающий прогнозирование развития университетского комплекса на основе запросов населения региона; создание перспективных целевых программ; стратегические и оперативные решения; отбор, формирование и стимулирование кадров; обработку и адресное распределение педагогической информации (в перспективе это должно осуществляться с использованием компьютерных сетей, технологий дистанционного образования).

Как показывает опыт ведущих университетов, например, МГУ им. М.В. Ломоносова и СПбГУ, для обеспечения эффективного вхождения коллектива в сферу личностной парадигмы, связанных с ней ценностей и технологий необходимо, чтобы администрация также овладела управленческой деятельностью, адекватной личностной модели образовательной системы. Если обобщить опыт того же МГУ, можно отметить следующие черты данной модели управления:

- 1) освоение руководителями критериев жизнедеятельности состава и организации в целом с позиций личностной парадигмы;
- 2) овладение приёмами наблюдения и оценки личностно-ориентированной ситуации на занятиях, мероприятиях, в системе педагогического общения;
- 3) диагностику индивидуальных возможностей педагогов в плане выработки авторской методики и стиля личностно-ориентированной педагогической деятельности;
- 4) выработку способов создания инфракультурной и психологической среды вуза, включающей общение, стиль, ожидания, мотивацию, самопрезентацию, событийность субъектов образовательного процесса;
- 5) создание системы методического обеспечения, включаясь в которую педагог осваивает операции проектирования и целеполагания, реконструкции предметного материала с целью введения его в «личностный контекст» обучаемых, освоение природы и технологий создания личностно-ориентированных ситуаций и прочее;
- 6) принятие и усвоение руководителем инновационной системы профессионального мышления, то есть переход от традиционного планирования, ориентированного на «улучшение ситуации», к построению планов, не исключающих не-

стабильность и даже социально-экономический регресс; от ориентации на материальную и информационную помощь извне – к ориентации на собственные ресурсы (человеческий, организационный, исследовательский потенциал университета и региона); от ожиданий непрямого роста работоспособности педагогического коллектива – к учёту возможностей регресса и неуверенности людей, на неоднородность, стратифицированность, конкуренцию вместо привычного представления о стабильности контингента обучаемых. Университет воспринимается таким руководителем как саморазвивающийся организм, в котором ориентация руководства на компетентность, личные достижения, творчество и ответственность вытесняет традиционные модели управления, основанные на власти, нормативных документах, статусе и контроле.

Содержание образования в широком смысле слова – это различные виды опыта, которые человеку надлежит освоить: знаниевый, операциональный, творческий, социальный опыт и др. Опыт действовать, проявлять себя как личность, обозначенный как личностный опыт, входит в структуру содержания образования в форме интерактивного диалога. Конечно, этот вид опыта, связанный с интимной, ценностно-смысловой сферой личности, существенно отличен от вышеназванных. Его нельзя задать в предметной, логической или вербальной форме. Он существует как переживание, которое надо рефлексировать, осмыслить, сделать из него вывод. Говорить об этом опыте как о содержании образования можно лишь с известной долей условности. Это «содержание» не может возникнуть вне самой личности обучающегося и быть заданным для всех студентов одинаковым образом, то есть не может обрести для всех одинаковый смысл. С нашей точки зрения, такая многосмысловая образовательная структура вполне соответствует природе университетского образования.

Кроме того, данная образовательная структура способствует формированию такого важного регулятора управления, как представления педагогов и научных работников о качествах выпускника университета. Так подготовленность специалистов (как отмечают Л.Н. Каган, Ю.А., Лобанов, И.А. Майбуров, Н.Ф. Привалова) [2] можно оценивалась по наличию у них следующих компетенций:

- Социальная инициатива. Динамизм и творчество, самостоятельность мышления и действия при решении социально значимых задач.
- Сотрудничество. Конструктивное и целенаправленное взаимодействие с другими. Готовность к консультированию, поддержке, диалогическому способу решения проблем.
- Проектирование и оценка качества решения проблем.
- Коммуникация. Коммуникативный опыт, умение добывать и перерабатывать информацию, понимать и правильно интерпретировать смысл полученной информации.
- Всестороннее использование аппарата различных моделей логик в исследовательской деятельности, а не простое запоминания и механическое заучивание.
- Оригинальное решение проблем. Идентификация проблем, поиск возможных решений и анализ их последствий, выбор и осуществление альтернативы.
- Стратегическое планирование. Постановка целей, составление графика и определение приоритетов для выполнения работы.
- Умение ориентироваться в информационном поле. Когнитивные и аффективные навыки, способствующие приобретению новых знаний. Применение на их основе эффективных методов обучения.

Эти компетенции должны развиваться у студентов в учебном процессе и в образовательной среде университета (например, во время проведения учебных практик).

Обобщая вышесказанное, следует отметить, что личностный подход в практике университетского образования базируется на понимании личности как субъекта преобразования мира на основе его всестороннего познания, чувственного переживания и рационального отношения к нему. В связи с этим важны направленность, отношения, моральные качества личности, формируемой университетом.

Список литературы

1. Воронин А.А., Зуев В.М. (2002) Основы прогнозной оценки потребности региона в специалистах по инновационным направлениям. М.
2. Кларин В.М. (1994) Инновационные модели обучения в зарубежных педагогических поисках. М.
3. Каган Л.Н. (1980) Социальная среда и воспитание // В кн.: Учебно-воспитательный коллектив и его среда. Свердловск.
4. Лобанов Ю.И. (1995) Универсалии образования // Современная гимназия и универсальное образование. М.
5. Майбуров И.А. (2002) Мировые тенденции развития высшей школы. Екатеринбург.
6. Привалова Н.Ф. (1997) Диагностика качества преподавания (Общетеоретические аспекты): Дисс...канд. филос. наук. М.

TO THE QUESTION OF PERSONAL APPROACH IN PRACTICE OF UNIVERSITY EDUCATION (SOCIOLOGICAL ASPECT)

V.A. Saprykin
Cand. Sci. (Pedagogy), associate professor
titus-m@mail.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

L.G. Gayterova
titus-m@mail.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

Abstract. In article from the point of view of sociology practice of the Russian university education is considered. Need of introduction of technologies of personal approach in practice of high school activity for the organization of the development mechanism of innovative process is staticized. The special development mechanism of innovative process at the university is described. The generalized experiment of one of leading universities of the Russian Federation – Lomonosov Moscow State University – in the sphere of ensuring effective occurrence of teaching staff of higher education institution to the sphere of a personal paradigm is shown. Communication of educational technologies within personal approach and administrative administrative activity, adequate personal model of educational system is shown. The example of model of management in Lomonosov Moscow State University is given. The importance of personal experience which enters structure of maintenance of education in the form of interactive dialogue is shown. Within conclusion it is designated that the educational structure realizing personal approach corresponds to the nature of university education. It is established that a framework of personal approach the university is perceived as a spontaneous organism in which orientation of the management to competence, personal achievements, creativity and responsibility forces out the

traditional models of management based on the power, normative documents, the status and control. It is noted that this educational structure promotes formation of the important regulator of management which ideas of teachers and scientists of qualities of the graduate of the university are. Competences which existence provides readiness of experts in different types of professional activity are considered. It is allocated that competences have to develop at students both in educational process, and in the educational environment of the university. The demand in modern Russia in active, independent people is noted that defines a priority of the personal focused education among various educational concepts.

Keywords: personal approach, university, innovative process, education, management

References

1. Voronin A.A., Zuev V.M. (2002) Osnovy` prognoznoi` ocenki potrebnosti regiona v spetsialistakh po innovatsionny`m napravleniiam [Framework of prognostic evaluation of the needs of the region in the areas of innovation specialists] M., 2002.
2. Clarin V.M. (1994) Innovatsionny`e modeli obucheniia v zarubezhny`kh pedagogicheskikh poiskakh [Innovative learning models in foreign teaching search] M. , 1994.
3. Kagan L.N. (1980) Sotsial`naia sreda i vospitanie [Social and education Wednesday] V kn.: Uchebno-vospitatel`ny`i` kollektiv i ego sreda. Sverdlovsk.
4. Lobanov Iu.I. (1995) Universalii obrazovaniia [Universal education] Sovremennaiia gimnaziia i universal`noe obrazovanie.
5. Mai`burov I.A. (2002) Mirovy`e tendentsii razvitiia vy`sshei` shkoly` [World trends in development of higher school] Ekaterinburg, 2002.
6. Privalova N.F. (1997) Diagnostika kachestva prepodavaniia: (Obshcheteoreticheskie aspekty`): Diss...kand. filos. nauk [Diagnosis of the quality of teaching: (Theoretical aspects): Diss ... Cand. philos. Sciences] M., 1997.

Научный журнал
CONTINUUM
МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА.
ОБРАЗОВАНИЕ

Выпуск № 2(10) / 2018

Редактор – Н.П. Безногих
Компьютерная верстка и дизайн обложки – М.В. Подаев
Техническое исполнение – В.М. Гришин

Формат А-4 (142 п.л).

Гарнитура Times. Печать трафаретная

Печ.л. 8,9. Уч.-изд.л. 8,3

Тираж 1000 экз. Заказ № 52

Подписано в печать 21.06.2018

Дата выхода в свет 22.06.2018

Свободная цена

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору
в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации средства массовой информации
ПИ № ФС77-69418 от 14 апреля 2017 г.

Адрес редакции и издателя:

399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1

E-mail: pmi.elsu@gmail.com

Сайт редколлегии: <http://pmi.elsu.ru>

Подписной индекс журнала **№64987** в каталоге периодических изданий
органов научно-технической информации агентства «Роспечать»

Отпечатано с готового оригинал-макета
на участке оперативной полиграфии

Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина
399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1

ФГБОУ ВО «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, Липецкая область, г. Елец, Коммунаров, 28,1