

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЕЛЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ И.А. БУНИНА»

CONTINUUM

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА.

ОБРАЗОВАНИЕ

Выпуск №3(7) / Елец, 2017

УЧРЕДИТЕЛЬ И ИЗДАТЕЛЬ:

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
(399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28, 1)

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ:

- Щербатых С.В.** - **главный редактор**, доктор педагогических наук, профессор, проректор по учебной работе Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина (Елец, Россия);
- Подаева Н.Г.** - **заместитель главного редактора**, доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Елецкого государственного университета им. И.А.Бунина (Елец, Россия);
- Асланов Р.М.** - доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий отделом Научно-технической информации института математики и механики Национальной академии наук Азербайджана (Баку, Азербайджан);
- Боровских А.В.** - доктор физико-математических наук, профессор Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия);
- Гроздев С.И.** - доктор по математике, доктор педагогических наук, профессор, проректор по науке и академическому развитию Института математики и информатики Болгарской академии наук, академик IHEAS (София, Болгария);
- Зарубин А.Н.** - доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений Орловского государственного университета им. И.С. Тургенева (Орел, Россия);
- Корниенко В.В.** - доктор физико-математических наук, профессор Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина (Елец, Россия);
- Кузнецова Т.И.** - доктор педагогических наук, профессор Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова (Москва, Россия);
- Сергеева Т.Ф.** - доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой общих математических и естественнонаучных дисциплин Академии социального управления (Москва, Россия);
- Солдатов А.П.** - заслуженный деятель науки РФ, доктор физико-математических наук, профессор Белгородского государственного национального исследовательского университета (Белгород, Россия);
- Солеев А.** - доктор физико-математических наук, профессор Самаркандского государственного университета им. А.Навои (Самарканд, Узбекистан);
- Таров Д.А.** - ответственный секретарь, кандидат педагогических наук, доцент Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина (Елец, Россия);
- Подаев М.В.** - кандидат педагогических наук, доцент Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина (Елец, Россия)

THE FOUNDER AND THE PUBLISHER:

The Federal State Educational Government-Financed Institution of Higher Education
«Bunin Yelets State University» (399770, Lipetsk region, Yelets, st. Kommunarov, 28, 1)

THE EDITORIAL BOARD:

- Shcherbatykh S.V.** **Editor-in-chief**, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Vice Rector for Academic Affairs of Yelets State University. IA Bunin (Yelets, Russia)
- Podaeva N.G.** **Deputy Chief Editor**, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Bunin Yelets State University (Yelets, Russia)
- Aslanov R.M.** Doctor of Pedagogical Sciences, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of Department of Scientific and Technical Information Institute of Mathematics and Mechanics Azerbaijan National Academy of Sciences (Baku, Azerbaijan)
- Borovskikh A.V.** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Moscow State University. MV Lomonosov (Moscow, Russia)
- Gruzdev S.I.** Doctor in Mathematics, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Vice Rector for Research and Academic Development Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences, academician IHEAS (Sofia, Bulgaria)
- Zarubin A.N.** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Honored Scientist of Russia, head of the department of mathematical analysis and differential equations, Oryol State University. IS Turgenev (Oryol, Russia)
- Kornienko V.V.** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Bunin Yelets State University (Yelets, Russia)
- Kuznetcova T.I.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor of the Moscow State University. MV Lomonosov (Moscow, Russia)
- Sergeeva T.F.** Doctor of Pedagogical Sciences, Professor, Head of the Department of general mathematical and natural sciences Social Management Academy (Moscow, Russia)
- Soldatov A.P.** Honored Worker of Science, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of Mathematics, Belgorod State National Research University (Belgorod, Russia)
- Soleev A.** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of Samarkand State University. A.Navoi (Samarkand, Uzbekistan)
- Tarov D.A.** executive secretary, Ph.D., associate professor of Yelets State University. IA Bunin (Yelets, Russia)
- Podaev M.V.** Ph.D., associate professor of Yelets State University. IA Bunin (Yelets, Russia)

ISSN 2500-1957

© Елецкий государственный университет
им. И.А. Бунина, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Солеев А.С., Мухтаров Я., Усмонов У.У. Кузнецова Т.И.	Решение одной гамильтоновой системы методом степенной геометрии.....	6
Бегматов А.Х., Исмоилов А.С. Буриев Т.Э., Мухтаров Я.М.	Конструирование специальных геометрических моделей для расчёта функциональных зависимостей.....	11
	Задача интегральной геометрии для семейства парабол на плоскости.....	19
	Достаточные критерии устойчивости тривиального решения и отсутствия замкнутых интегральных многообразий одной системы трех дифференциальных уравнений.....	23
Хатамов А., Норкулов Э.А.	О точных оценках наилучших приближений функций с производной обобщенной конечной вариации посредством рациональных функций.....	27
Докучаева А.Н., Емельянов В.Ю.	Анализ временных характеристик процедуры динамического построения упрощенной модели при решении задачи сокращения трудоемкости статистического моделирования.....	35
Чернобровкина И.И.	Применение информационных технологий для решения задач кластерного анализа.....	42
Иголина Е.В.	Исследование ts-модели маятниковой системы с помощью численного алгоритма Лоусона.....	47
Абдурашидов А.А.	Применение метода вариационных итераций к приближенному решению интегро-дифференциальных уравнений.....	51
Максимов Д.И.	Введение в разработку php-расширений.....	56
Тарова А.Д.	Варианты построения архитектуры распределенной информационной образовательной системы.....	62

НОВШЕСТВА ФГОС И ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

Поддаева Н.Г.	Социокультурно-ориентированное обучение математике в школе: формирование геометрических понятий.....	67
Дворяткина С.Н., Лопухин А.М.	Практико-ориентированные математические задачи как средство формирования общекультурной и профессиональной компетентности будущих юристов	77
Мардонов Э.М., Останов К., Ачилов У., Эргашев А.	Некоторые особенности использования информационных технологий в процессе обучения математике	85
Малиатаки В.В., Вендина А.А. Кирилина Ю.П.	Особенности реализации проектной деятельности студентов в системе дистанционного обучения MOODLE.....	91
	Использование информационных технологий в исследовательских работах на уроках математики.....	96
Редькина Л.А.	Стимулирование и мотивация учебной деятельности в старших классах на уроках математики.....	103
Сведения об авторах.....		107

CONTENTS

ASPECTS OF APPLIED MATHEMATICS AND INFORMATICS

Soleev A.S., Mukhtarov Y., Usmonov U.U. Kuznetsova T.I.	The solution of hamilton system by power geometry method.....	6
	Construction of special geometric models for the calculation of functional dependencies.....	11
Begmatov A.H., Ismoilov A.S.	The integral problem of geometry for family of parabolas on the plane.....	19
Buriyev T.E., Mukhtarov Ya. M.	Criterion of stability trivial solution and exist closed integrated surfaces in one of system of three ordinary differential equations.	23
Khatamov A., Norkulov E.A.	On the exact estimates of the best approximations of functions with derivative of generalized finite variation by rational ones.....	27
Dokuchaeva A.N., Emelianov V.U.	Timing characteristics analysis of the dynamical simplified-model construction approach for statistical modeling with complexity reduction.....	35
Chernobrovkina I.I.	Application of methods of information technology for solving problems of cluster analysis.....	42
Igonina E.V.	Research TS-model of pendular system by means of the numerical algorithm of Lawson.....	47
Abdurashidov A.A.	Application the variational iteration method for the approximate solution of integro-differential equation.....	51
Maximov D.I.	Introduction to the development of php-extensions.....	56
Tarova A.D.	Variants of building architecture of a distributed information educational system.....	62

INNOVATIONS FEDERAL STANDARDS AND EDUCATIONAL TECHNOLOGIES IN THE TEACHING OF MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE

Podaeva N.G.	Socioculturally-oriented training mathematics in school: formation of geometric concepts	67
Dvoryatkina S.N., Lopukhin A.M.	Practically-oriented mathematical objectives as a means of forming the cultural and professional competence of future lawyers.....	77
Mardonov E.M., Ostanov K., Achilov U., Ergashev A.	Some peculiarities of using information technologies in the process of teaching mathematics.....	85
Maliataki V.V., Vendina A.A.	Peculiarities of realization of project-based training of students in the distance learning system of moodle.....	91
Kirilina Y.P.	The use of information technology in research work in the lessons of mathematics	96
Redkina L.A.	Stimulation and motivation of academic activities in senior classes at lessons of mathematics.....	103
Information about authors.....		107

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

УДК 517.928 | РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ
МЕТОДОМ СТЕПЕННОЙ ГЕОМЕТРИИ

Солеев Ахмаджон Солеевич
д.ф.-м.н., профессор
asoleev@yandex.ru
г. Самарканд

декан механико-математического
факультета Самаркандского
государственного университета
(Узбекистан)

Мухтаров Яхъё
к.ф.-м.н., доцент
ya-muxtarov@mail.ru
г. Самарканд

доцент кафедры дифференциальных
уравнений механико-математического
факультета Самаркандского
государственного университета

Усмонов Уктам Уткурович
магистрант
usmonovuktam93@gmail.ru
г. Самарканд

магистрант кафедры дифференциальных
уравнений механико-математического
факультета Самаркандского
государственного университета

Аннотация. В общем случае система Фоккера–Планка с заданным гамильтонианом не является интегрируемой. Только в случае, когда $a = 0,5$ и $b = -1$, общий интеграл этой системы получен в работах Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. (1980), а также Yoshida H (1983). В работе А.Д. Брюно и А.С. Солеева (1995), посвященной гамильтоновым системам, указан алгоритм нахождения гамильтоновых укорочений гамильтоновых систем. Известно, что не каждое укорочение гамильтоновых систем является гамильтоновым. Алгоритм, предложенный в работах А.Д. Брюно и А.С. Солеева (1995), позволяет находить степенные приближения, то есть укороченные системы, которые сами являются гамильтоновыми и дают решения заданных систем. Следуя методике работ А.Д. Брюно и А.С. Солеева (1995), при помощи алгоритма вычисления находятся многогранники и нормальные конуса его граней. В работе изучается укорочение Фоккера–Планка с заданным гамильтонианом. Найдено гамильтоново укорочение системы Фоккера–Планка и получено решение данной укороченной системы. В силу того, что укороченная система является асимптотически первым приближением исходной системы, найденное решение является первым приближением к решению системы Фоккера–Планка с заданным гамильтонианом.

Ключевые слова: система Гамильтона, укорочения, степенные приближения, дифференциальные уравнения, асимптотика, многогранник Ньютона, элементы многогранника.

В работе [3] рассматривалась система Фоккера–Планка

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 y_2 + 2a x_2 y_1 + 4a x_1^4 x_2^4 y_1^3 y_2^4, \\ \dot{x}_2 &= x_1 y_1 + 2b x_2 y_2 + 4a x_1^4 x_2^4 y_1^4 y_2^3, \\ \dot{y}_1 &= -x_1 - y_1 y_2 - 4a x_1^3 x_2^4 y_1^4 y_2^4, \\ \dot{y}_2 &= -x_1 - a y_1^2 - b y_2^2 - 4a x_1^4 x_2^3 y_1^4 y_2^4.\end{aligned}\tag{1}$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + x_1 y_1 y_2 + x_2(a y_1^2 + b y_2^2) + \alpha x_1^4 x_2^4 y_1^4 y_2^4. \quad (2)$$

В общем случае эта система с заданным гамильтонианом не является интегрируемой. Только в случае, когда $a = \frac{1}{2}$ и $b = -1$ общий интеграл этой системы получен в работах Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H., а также Yoshida H [6, 7].

В работе А.Д. Брюно и А.С. Солева [5], посвященной гамильтоновым системам, указан алгоритм нахождения гамильтоновых укорочений гамильтоновых систем. Известно, что не каждое укорочение гамильтоновых систем является гамильтоновым. Данный алгоритм использует многогранники Ньютона. Сначала находят носители, строят многогранник, выделяет все элементы и по соответствию к этим элементам находят укорочения.

Функция Гамильтона (2) имеет носитель

$$D_1 = \{R_1 = (2,0,0,0), R_2 = (0,2,0,0), R_3 = (1,0,1,1), \\ R_4 = (0,1,2,0), R_5 = (0,1,0,2), R_6 = (4,4,4,4)\}.$$

Результаты вычисления многогранника Γ_1 [5] по программе из [2] приведены в таблице 1. Таблица 1 состоит из пяти малых (приведены только три) таблиц 1.1 – 1.3.

Таблица 1.1
Polyhedron Dimension: 4
Corresponding matrix

					2	0	1	0	0	4
					0	2	0	1	1	4
					0	0	1	2	0	4
					0	0	1	0	2	4
					V0	V1	V2	V3	V4	V5
1.	-6	-6	7	7	(-)	(-)	(+)	(+)	(+)	(+)
2.	-3	2	1	1	(-)	(+)	(-)	(+)	(+)	(+)
3.	-2	-2	-1	-1	(+)	(+)	(+)	(+)	(+)	(-)
4.	2	2	-4	1	(+)	(+)	(-)	(-)	(+)	(+)
5.	2	2	1	-4	(+)	(+)	(-)	(+)	(-)	(+)
6.	4	-6	-3	7	(+)	(-)	(+)	(-)	(+)	(+)
7.	4	-6	7	-3	(+)	(-)	(+)	(+)	(-)	(+)

Таблица 1.2
Surface Dimension: 3

- 1) {0, 1, 2, 3, 4}
- 2) {0, 1, 3, 5}
- 3) {0, 1, 4, 5}
- 4) {0, 2, 3, 5}
- 5) {0, 2, 4, 5}
- 6) {1, 3, 4, 5}
- 7) {2, 3, 4, 5}

Таблица 1.3
Surface Dimension: 2

- | | | |
|---------------------|----------------------|----------------------|
| 1) {0, 1, 3} / 0, 1 | 6) {0, 2, 5} / 3, 4 | 11) {1, 4, 5} / 2, 5 |
| 2) {0, 1, 4} / 0, 2 | 7) {0, 3, 5} / 1, 3 | 12) {2, 3, 4} / 0, 6 |
| 3) {0, 1, 5} / 1, 2 | 8) {0, 4, 5} / 2, 4 | 13) {2, 3, 5} / 3, 6 |
| 4) {0, 2, 3} / 0, 3 | 9) {1, 3, 4} / 0, 5 | 14) {2, 4, 5} / 4, 6 |
| 5) {0, 2, 4} / 0, 4 | 10) {1, 3, 5} / 1, 5 | 15) {3, 4, 5} / 5, 6 |

Первая из таблиц (таблица 1.1) является таблицей соответствий. Сверху она содержит векторы $R_1, \dots, R_6$ в виде столбцов. Слева в виде строк даны векторы нормалей к гиперграням $V_0, \dots, V_5$.

На пересечении i –той строчки и j –того столбца стоит знак " + ", если точка R_j лежит на гипергранни с нормальным вектором V_i и знак " – " в противном случае.

В таблице 1.2 построчно перечислены все грани размерности 3: слева стоит номер грани, а в скобках указаны номера i точек R_i которые попали на эту грань. В таблице 1.3 построчно перечислены грани размерности 2: номер грани; в скобках – номера i точек R_i , лежащих на этой грани; номера граней размерности 3, в которых содержится эта грань размерности 2.

Система (1) имеет носитель

$$D_2 = \{S_1 = (1,0, -1,0), S_2 = (0,0,0,1), S_3 = (0,1,0, -1), S_4 = (2,0,0, -1), \\ S_5 = (0,2,0, -1), S_6 = (-1,1,1,0), S_7 = (1, -1,1,0)\}.$$

Аналогично таблице 1 получены результаты вычисления многогранника Γ_2 , соответствующего множеству D_2 в пространстве $\mathbb{R}^4$. Из полученного результата видно, что в отличие от многогранника Γ_1 , многогранник Γ_2 , имеет 18 граней размерности 2, 17 граней размерности 1 и восемь вершин.

После проекции [5] множество D_1 переходит во множество пространства $\mathbb{R}^3$:

$$D_1' = \{R_1' = (2,0,0), R_2' = (0,2,0), R_3' = (0,1,2), R_4' = (-2,3,2), R_5' = (0,1,2), R_6' = (0,8,8)\}.$$

Аналогично таблице 1 приведены результаты вычислений многогранника Γ_1' по программе из [2], (см. также [1,4]) Многогранник Γ_1' содержит из 5 граней размерности 2, 8 граней размерности 1 и 6 вершин. Из таблицы 1 и таблицы вычислений многогранника Γ_1' следует, что 2 двумерным граням многоугольника Γ_1' соответствуют 3 трехмерные грани многогранника Γ_1 , а 2 другим двумерным граням многогранника соответствует 3 двумерные грани многогранника Γ_1 . Всем одномерным граням многогранника соответствуют одномерные грани многогранника Γ_1 .

При проекции [5] множество D_2 переходит во множество

$$D_2' = \left\{ S_1' = (2, -1, -1), S_2' = (0,0,1), S_3' = (0,1, -1), \right. \\ \left. S_4' = (2,0, -1), S_5' = (0,2, -1), S_6' = (-2,2,1) \right\}.$$

Сопоставляя двумерные грани многогранника Γ_1' с гранями многогранников Γ_1 и Γ_2 и перечислим соответствующие укорочения функции Гамильтона, дающие укороченные системы Гамильтона.

Грани $\Gamma_{1,1}^{(2)}$ (первая строка таблицы 3.2) соответствует грань $\Gamma_{1,1}^{(3)}$ (первая строка таблицы 1.2) и укорочение

$$\hat{h}_1^3 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + x_1 y_1 y_2 + x_2 (a y_1^2 + b y_2^2).$$

Грани $\Gamma_{1,4}^{(2)}$ (четвёртая строка таблицы 3.2) соответствует грань $\Gamma_{1,10}^{(2)}$ (десятая строка таблицы 1.3) и укорочение

$$\hat{h}_{10}^2 = \frac{1}{2} x_2^2 + a x_2 y_1^2 + a x_1^4 x_2^4 y_1^4 y_2^4.$$

Грани $\Gamma_{1,3}^{(2)}$ (третья строка таблицы 3.2) соответствует грань $\Gamma_{1,5}^{(3)}$ (пятая строка таблицы 1.2) и укорочение

$$\hat{h}_5^3 = \frac{1}{2} x_1^2 + x_1 y_1 y_2 + x_2 b y_2^2 + a x_1^4 x_2^4 y_1^4 y_2^4.$$

Грань $\Gamma_{1,2}^{(2)}$ (вторая строка таблицы 3.2) соответствует грань $\Gamma_{1,3}^{(2)}$ (третья строка таблицы 1.3) и укорочение

$$\hat{h}_3^2 = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) + a x_1^4 x_2^4 y_1^4 y_2^4.$$

Грань $\Gamma_{1,5}^{(2)}$ (пятая строка таблицы 3.2) соответствует грань $\Gamma_{1,7}^{(3)}$ (седьмая строка таблицы 1.2) и

$$\hat{h}_7^3 = x_1 y_1 y_2 + x_2 (a y_1^2 + b y_2^2) + a x_1^4 x_2^4 y_1^4 y_2^4.$$

Заметим, что укорочение $\hat{h}_1^{(3)}$ соответствует линейному первому приближению системы, а укорочение $\hat{h}_7^{(3)}$ – это гамильтониан системы Фоккера-Планка. Только эти три из пяти укорочений соответствуют трехмерным граням многогранника Γ_1 , остальные соответствуют его двумерным граням.

Функция Гамильтона (1) есть

$$\hat{h}_1^3 = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + x_1 y_1 y_2 + x_2 (a y_1^2 + b y_2^2) \quad (3)$$

Здесь $D_1 = \{R_i = (P_i, Q_i), i = 1, \dots, 5, R = (P, Q) \mid \sum p_j + \sum q_j \geq 4, p_j, q_j \geq 0\}$, где

$$R_1 = (2, 0, 0, 0), R_2 = (0, 0, 1, 1), R_3 = (0, 3, 0, 0), R_4 = (0, 2, 0, 1), R_5 = (1, 2, 0, 0).$$

После проекции [5] получаем

$$R_1' = (2, 0, 0), R_2' = (-1, 1, 2), R_3' = (0, 3, 0), R_4' = (0, 2, 1), R_5' = (1, 2, 0).$$

Нормальный вектор $(U, v_2) = (-2, -2, -1)$ со всеми отрицательными компонентами. Ему по лемме 4.1 [5] соответствует нормаль $(U, V) = (-2, -2, -1, -1)$. Соответствующая укороченная функция Гамильтона есть

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 y_2 + 2a x_2 y_1, & \dot{y}_1 &= -x_1 - y_1 y_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 y_1 + 2b x_2 y_2, & \dot{y}_2 &= -x_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Является квазиоднородной и имеет решение вида

$$x_1 = \alpha_1 t^{-2}, x_2 = \alpha_2 t^{-2}, y_1 = \beta_1 t^{-1}, y_2 = \beta_2 t^{-1}.$$

Его коэффициенты в силу системы (4) связаны равенствами

$$-2\alpha_1 = \alpha_1 \beta_2 + 2a \alpha_2 \beta_1, \quad -2\alpha_2 = \alpha_1 \beta_1 + 2b \alpha_2 \beta_2, \quad \beta_1 = \alpha_1 + \beta_1 \beta_2, \quad \beta_2 = \alpha_2,$$

т.е.

$$\alpha_1 = (1 - \beta_2)\beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \beta_2^2 + (2a - 3)\beta_2 + 2 = 0, \beta_1 = \frac{2b\beta_2^2 + 2\beta_2}{\beta_2 - 1}.$$

Т.о. система (4) имеет вещественное решение, если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1,5 - \sqrt{2}) \cup [1,5 + \sqrt{2}; +\infty)$ и полученное решение является главным членом разложения в ряд решения системы (1).

Список литературных источников

1. Bruno A. D. (1981) On periodic flybys of the moon. Celestial Mechanics 24, №3 255-268.
2. Солеев А., Арансон А. Вычисление многогранника и нормальных конусов его граней. М.: Ин-т прикл. математики, 1994. 25 с.
3. Roekaerts D., Schwarz F. (1987) Painleve analysis, Yoshida's theorems and direct methods in the search for integrable Hamiltonians. J. Phys. A. Math. Gen., v. 20, p. 127-133.
4. Bruno A. D., Solееv A. (1997) Local analysis of a reversible ODE system and the Newton polyhedron // Nonlinear Anal. V. 30. №8. P. 4833-4838.
5. Солеев А., Брюно А. Д. Многогранник Ньютона и системы Гамильтона // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. №6. 1995. С.84-86.
6. Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. (1980) A connection between nonlinear evolutions and ordinary differential equations of P-type. J. Math. Phys., v. 21, №4.
7. Yoshida H. (1983) Necessary condition for the existence of algebraic first integrals. Celest. Mech., v. 31, №4, p. 363-379. p. 381-399.

THE SOLUTION OF HAMILTON SYSTEM BY POWER GEOMETRY METHOD

Soleev Axmadjon Soleevich

Dr. Sci. (Phys.–Math.), professor
asoleev@yandex.ru
Samarkand

Mukhtarov Yakhyo

Cand. Sci. (Phys.–Math.), associate professor
ya-muxtarov@mail.ru
Samarkand

Usmonov Uktam Utkurovich

master
usmonovuktam93@gmail.ru
Samarkand

Samarkand State University, The faculty of
Mechanics and Mathematics

Samarkand State University, The faculty of
Mechanics and Mathematics

Samarkand State University, The department
of Masters, undergraduate

Annotation. In general, the Fokker-Plank system with given Hamiltonian is non-integrable. Just in case of values $a = \frac{1}{2}$ and $b = -1$, and results on general integral of this system are obtained in Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. (1980), and Yoshida H. (1983). The algorithm of computation of Hamilton shortening of Hamilton systems can be found in Bruno A.D., Soleev A.S. (1995), that is devoted to Hamilton systems. It is also known, that we can see non every shortening of Hamilton systems be Hamiltonian. We use the algorithm, proposed in Bruno A.D., Soleev A.S. (1995), to find degree approximation, that is precisely shortening systems, that are Hamiltonian and allow to obtain the solutions of the given systems. It can be found, that polyhedrons and normal cone of sides are computed by using the algorithm and the given methods by Bruno A.D., Soleev A.S. (1995). In this paper, we study the shortening of Fokker-Plank with the given Hamiltonians. Hamilton shortening of Hamilton systems are defined and according to that we also have the solution of the given shortened system. Taking into account that the shortening system represents the first asymptotic approximation of initial system, the computed solution is considered to be the first approximation to the solution of Fokker-Plank systems with the given Hamiltonian.

Key words: Hamilton system, shortenings, degree approximation, differential equations, asymptotic behavior, Newton polyhedron, polyhedron elements.

References

1. Bruno A. D. (1981) On periodic flybys of the moon. *Celestial Mechanics* 24, №3 255-268.
2. Soleev A., Aranson A. (1994) Vy`chislenie mnogogrannika i normal`ny`kh konusov ego gra-nei` [Calculation of the polyhedron and normal cones it faces] M.: In-t pricl. matematiki, 1994. 25 p.
3. Roekaerts D., Schwarz F. (1987) Painleve analysis, Yoshida's theorems and direct methods in the search for integrable Hamiltonians. *J. Phys. A. Math. Gen.*, v. 20, p. 127-133.
4. Bruno A. D., Soleev A. (1997) Local analysis of a reversible ODE system and the Newton polyhedron // *Nonlinear Anal.* V. 30. №8. P. 4833-4838.
5. Soleev A., Briuno A. D. (1995) Mnogogrannik N`iutona i sistemy` Gamil`tona [Polyhedron Newton and Hamilton systems] *Vestneyk MGU.Ser.1. Matematika, mehanika.* №6, pp. 84-86.
6. Ablowitz M. J., Ramani A., Segur H. (1980) A connection between nonlinear evolutions and ordinary differential equations of P-type. *J. Math. Phys.*, v. 21, №4.
7. Yoshida H. (1983) Necessary condition for the existence of algebraic first integrals. *Celest. Mech.*, v. 31, №4, p. 363-379. p. 381-399.

УДК
519.6**КОНСТРУИРОВАНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РАСЧЁТА
ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ****Кузнецова Татьяна Ивановна**
д.п.н., профессор
kuzti45@gmail.com
г. Москвапрофессор института русского языка и
культуры Московского государственного
университета имени М.В. Ломоносова

Аннотация. Статья посвящена специальным геометрическим моделям функциональных зависимостей — номограммам, их конструированию и обоснованию. Даются краткие сведения о развитии номографии — раздела вычислительной математики, занимающегося теорией и практикой построения и применения номограмм в различных областях человеческой деятельности. Определяется роль номограмм в укреплении внутрипредметных связей, а также в расширении межпредметных связей математики с различными разделами физики. Приводятся примеры номограмм, доступных учащимся средней школы, не только с точки зрения применения, но и с точки зрения обоснования и конструирования.

Ключевые слова: номография; номограмма; геометрия; геометрическая модель; вычисление с помощью номограмм.

И вот существует метод, который позволяет для каждой формулы изготовить свой особый инструмент, совершенно освобождающий нас от всех вычислений по данной формуле и прямо дающий нужный результат.

А.А. Глаголев.

В диссертации [6] на фоне детального исследования всех предметных курсов средней школы на предмет присутствия в них геометрических моделей функциональных зависимостей, нами были предложены номограммы – специальные представители этого класса геометрических моделей. Построенная на листе бумаги для определенной функциональной зависимости номограмма очень просто используется для получения ответа: достаточно, например, приложить линейку или сделать засечку циркулем.

1. Построением таких моделей-чертежей занимается номография – наука о методах графического изображения функциональных зависимостей, которая является составной частью вычислительной математики. Номография как наука оформилась задолго до появления электронно-вычислительных машин. Первые попытки графического решения аналитических задач в форме, близкой к современным номографическим построениям, относятся к концу XVIII в. — в 1795 г. была опубликована «Линейная арифметика» французского математика Пуше, в которой давались графические приёмы выполнения арифметических действий. Пуше построил первую номограмму — модель умножения в форме семейства равносторонних гипербол, имеющих общие асимптоты.

Из Франции номография распространилась и в другие страны. В России начало развития номографии положила работа Н.М. Герсевича «Основы номографии» (1906 г.). Дальнейшее развитие номографии в нашей стране связано также с именами П.В. Мелентьева, И.Н. Денисюка, Н.А. Глаголева, А.А. Глаголева, М.В. Пентковского, Б.А. Невского, И.А. Вильнера, Г.С. Хованского, С.Н. Борисова и других ученых (см. библиографию в [6], а также [7, с. 239–244]).

Явное народнохозяйственное значение номографии и доступность номограмм приводят к возможности ознакомления с номографией в процессе обучения математике в средней школе. В нашей стране специально для школьников выдающимися номографами А.А. Гла-

голевым и М.В. Пентковским были разработаны и изданы учебные пособия [3; 8]. Создавались и факультативные курсы (П.А. Компанийц [5], С.П. Пулькин [9], П.В. Стратилатов [10] и др.). Вопросам номографии были посвящены лекции, прочитанные А.Н. Колмогоровым в Летней школе на Рубском озере, организованной для школьников, закончивших восемь классов [4]. Введение отдельных элементов номографии в среднее образование предлагалось в диссертационных исследованиях.

2. Обратим внимание на то, что в «Четырёхзначных математических таблицах» В.М. Брадиса, регулярно переиздающихся с 1921 г., в явном виде помещены две номограммы из выравненных точек, по которым ответ находится одним приложением линейки [2, с. 82–84]. Приведём здесь одну из этих номограмм (см. рис. 1), построенную для решения уравнения

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}. \quad (1)$$

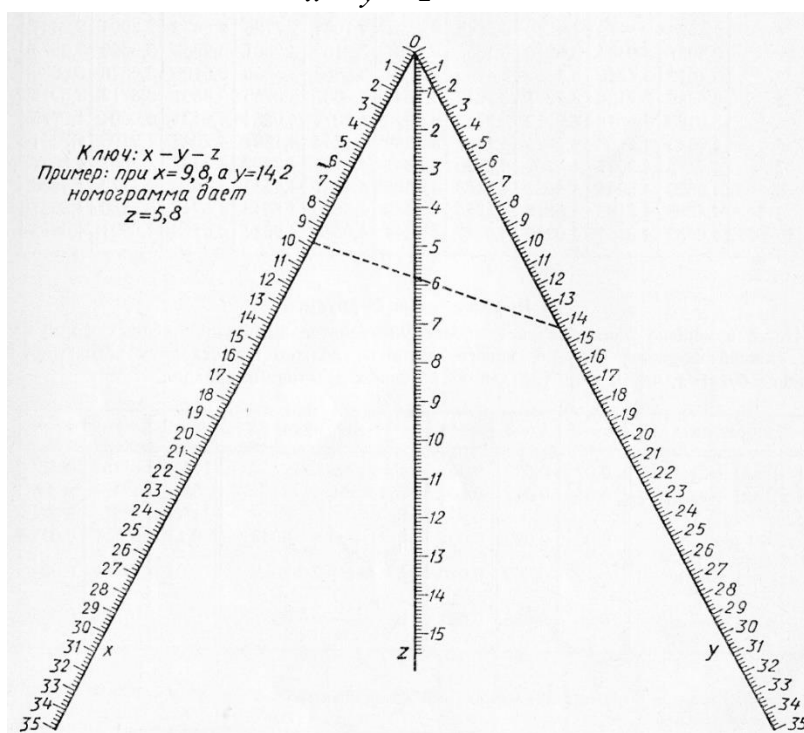


Рис. 1. Номограмма для решения уравнения $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$.

Эта номограмма состоит из трёх шкал (переменных x , y , z), выходящих из одной точки. Рядом с номограммой пишется ключ (обычно это неотъемлемая часть номограммы, поскольку только зная ключ, можно ею воспользоваться). Обоснование номограммы можно прочитать на с. 84 [2]. В настоящей заметке мы даём своё обоснование (см. п. 3).

Номограмма позволяет находить значение одной из переменных x , y , z , связанных данным уравнением, если известны значения двух других. На номограмме рис.1 решается

Задача 1. Решить уравнение (1) при $x = 9,8$; $y = 14,2$.

Решение. Ясно, что надо найти значение переменной z . Приложив край линейки к точке шкалы x с пометкой 9,8 и к точке шкалы y с пометкой 14,2, на шкале z читаем искомое значение 5,8.

3. Обоснование номограммы рис. 1. Пусть два угла, расположенные между шкалами, равны между собой и равны α . Пусть фактические длины отрезков, отсечённых на шкалах x , y , z разрешающей прямой, равны соответственно X мм, Y мм и Z мм. Рассмотрим два треугольника, образованных таким образом на рис. 1. Назовём их «левый» и «правый». Вос-

пользовавшись известной из тригонометрии формулой для вычисления площади треугольника, получаем, что площадь левого треугольника равна $S_1 = 0,5 \cdot XZ \cdot \sin \alpha$ (мм²), а площадь правого треугольника равна $S_2 = 0,5 \cdot ZY \cdot \sin \alpha$ (мм²). В то же время площадь треугольника, являющегося суммой левого и правого треугольников, равна $S = 0,5 \cdot XY \cdot \sin 2\alpha$ (мм²). Так как $S = S_1 + S_2$, то получаем зависимость

$$0,5 \cdot XY \cdot \sin 2\alpha = 0,5 \cdot XZ \cdot \sin \alpha + 0,5 \cdot ZY \cdot \sin \alpha,$$

которая после упрощения принимает вид

$$XY \cdot 2\cos \alpha = XZ + ZY.$$

Разделим обе части этой зависимости на XYZ :

$$\frac{2\cos \alpha}{Z} = \frac{1}{X} + \frac{1}{Y}.$$

Теперь обсудим цену делений шкал x, y, z . Пусть цена делений шкал x и y одна и та же и равна m мм. Тогда левая вершина левого треугольника на шкале x должна показать число $x = \frac{X}{m}$, а правая вершина правого треугольника на шкале y должна показать число $y = \frac{Y}{m}$.

Умножим обе части выведенной зависимости на m :

$$\frac{m \cdot 2\cos \alpha}{Z} = \frac{m}{X} + \frac{m}{Y}. \quad (2)$$

Возьмём цену деления шкалы z равной $m \cdot 2\cos \alpha$ (мм). Тогда на шкале z разрешающая прямая покажет число $z = \frac{Z}{2m\cos \alpha}$. Очевидно, что тогда числа x, y, z будут связаны между собой уравнением (1), что и требовалось доказать. Заметим, что, так как в номограмме рис. 1 угол α равен 27° , то цена деления шкалы z отличается от m (мм), цены деления шкал x и y , и равна $m \cdot 2\cos 27^\circ \approx m \cdot 2 \cdot 0,8910 = 1,7820 m \approx 1,8 m$ (мм), что легко проверить на рисунке.

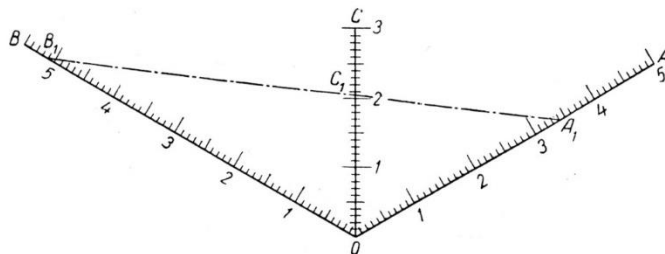


Рис. 2. Номограмма для решения уравнения $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x}$.

Из обоснования ясно, что углы между шкалами x, z и y, z могут быть произвольными острыми углами. Главное — они должны быть равны между собой. Это значит, что мы можем построить аналогичную номограмму с углом α , равным не 27° , как на рис. 1, а, например, 60° (см. рис. 2). Тогда цена делений на всех шкалах будет одинаковой, так как при $\alpha = 60^\circ$ косинус равен $0,5$ и числитель левой части только что полученной зависимости (2) равен $m \cdot 2\cos 60^\circ = m \cdot 2 \cdot 0,5 = m$ (мм). В этом можно убедиться, заглянув в [3, с. 19].

4. Номограммы способствуют сближению различных разделов школьного курса математики (геометрии, теории функций, методов вычислений), формированию и закреплению узловых математических понятий (функции, множества, системы координат, абсолютной и относительной погрешностей и т. д.).

5. Использование номограмм в смежных школьных дисциплинах осуществляет межпредметные связи. В этом плане можно отметить то, что номограмма рис. 1 (или рис. 2) мо-

жет использоваться не только в математике, т. е. не только для решения «чисто» математического уравнения (1), но и в физике – в двух её разделах:

«Оптика» — для вычислений по формуле тонкой линзы: $\frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}$, где F — фокусное расстояние, d — расстояние от предмета до линзы, f — расстояние от изображения до линзы;

«Электричество» — 1) для вычислений по формуле общего сопротивления при параллельном соединении проводников: $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$, где R — общее сопротивление, R_1 и R_2 — сопротивления участков; 2) для вычисления по формуле общей индуктивности цепи, состоящей из двух катушек при параллельном их соединении: $\frac{1}{L_{\text{общ.}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$, где $L_{\text{общ.}}$ — общая индуктивность цепи, L_1, L_2 — индуктивности отдельных катушек; 3) для вычисления общей электрической ёмкости цепи, состоящей из двух последовательно соединённых конденсаторов: $\frac{1}{C_{\text{общ.}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$, где $C_{\text{общ.}}$ — общая ёмкость цепи, C_1, C_2 — ёмкости отдельных конденсаторов.

6. Обобщим уравнение (1), решаемое в [2] с помощью номограммы рис. 1, а в [3] — с помощью номограммы рис. 2, до четырёх переменных [3, с. 19]:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{x}. \quad (3)$$

Номограмма для решения уравнения (3) изображена на рис. 3.

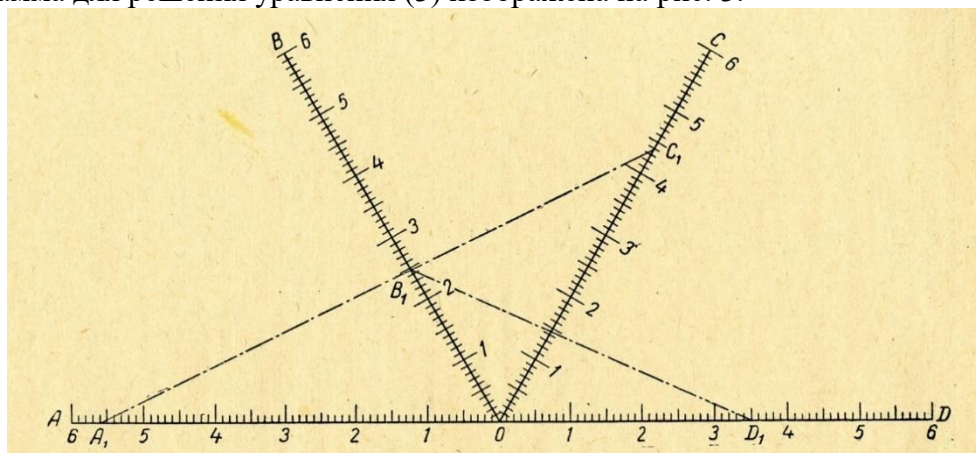


Рис. 3. Номограмма для решения уравнения $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{x}$

Ясно, что эта номограмма является соединением-наложением двух номограмм типа рис. 2 и состоит из четырёх шкал: OA , OB , OC и OD с общим началом, изображающим число 0. Её можно получить из номограммы рис. 2, если в последней сделать определённые дополнительные построения: продолжить одну из крайних шкал за её начало — например, шкалу OA , и нанести на это продолжение такую же шкалу (OD) (рис. 3).

Покажем, как пользоваться номограммой рис. 3 для решения уравнения (3), когда требуется по трём заданным значениям переменных a , b и c найти значение четвёртой переменной x .

Задача 2. Решить уравнение (3) при $a = 5,6$; $b = 4,4$; $c = 3,5$.

Решение. На шкале OA находим точку A_1 с пометкой 5,6, на шкале OC — точку C_1 с пометкой 4,4. Соединяем точки A_1 и C_1 . Отрезок A_1C_1 пересекает шкалу OB в точке B_1 , пометка которой d_1 удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{d_1},$$

или, при заданных значениях a и b , уравнению

$$\frac{1}{5,6} + \frac{1}{4,4} = \frac{1}{d_1}.$$

Сделав соответствующую замену в уравнении (3), получаем уравнение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{c} = \frac{1}{x}. \quad (4)$$

Далее на шкале OD находим точку D_1 с пометкой 3,5, равной значению c . Соединяем точки B_1 и D_1 . Отрезок B_1D_1 пересекает шкалу OC в точке, пометка которой 1,45 является значением x , удовлетворяющим уравнению (4). Очевидно, что оно удовлетворяет и уравнению (3) при заданных значениях a , b и c .

7. Возвращаясь к п. 5, отметим, что все приведённые там уравнения из раздела физики «Электричество» расширяются до большего количества переменных. Например, при определении сопротивления в электрической цепи при параллельном соединении трёх проводников используется следующая формула:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3},$$

для которой номограмма рис. 3 является рабочей, т. е., задав значения сопротивлений R_1 , R_2 , R_3 , по ней можно легко найти общее сопротивление R .

Задача 3. Три параллельно соединённых проводника имеют сопротивления $R_1 = 4$ Ом, $R_2 = 4$ Ом, $R_3 = 3$ Ом. Найти общее сопротивление данной цепи.

По номограмме получаем $R = 1,2$ Ом. Вручную получается то же самое значение.

Замечательно то, что по этой же номограмме рис. 3 тем же самым способом можно решать и более сложные уравнения вида

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{x}. \quad (5)$$

Попробуйте вычислить значение x при следующих значениях a , b , c , d :

$$a = 5,4; b = 4,3; c = 6,0; d = 3,7 \quad (6)$$

сначала вручную, а затем — воспользовавшись номограммой рис. 3. Сравните время, затраченное на первый способ вычисления, с временем, затраченным на второй способ. Очевидно, что в выигрыше окажется второй способ: по номограмме ответ вычисляется гораздо быстрее — всего тремя приложениями края линейки к точкам шкал с соответствующими пометками (6), вручную же надо вычислить числовое выражение

$$\frac{1}{\frac{1}{5,4} + \frac{1}{4,3} + \frac{1}{6,0} + \frac{1}{3,7}}!$$

Во сколько раз дольше!?! Между прочим, по номограмме получаем почти 1,2, а вручную — приблизительно: $1,18 \approx 1,2$!

8. С помощью номограммы рис. 3 можно решать уравнения вида (5) с большим количеством слагаемых в левой части, например, для вычисления сопротивления электрической це-

пи в случае параллельного соединения любого числа проводников с использованием формулы

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$

9. Замечания. 1. В случаях, когда значения данных переменных или значение искомой переменной выходят за пределы шкал, надо все числа — значения переменных, умножить или разделить на одно и то же надлежаще выбранное число. Например, если в случае трёх переменных даны значения $x = 75$, $y = 48$, то после деления на 10 имеем: $x = 7,5$, $y = 4,8$ и по номограмме рис. 1 находим $z = 2,9$, а после умножения на 10 получаем искомое значение $z = 29$.

2. Разработчики номограмм рекомендуют в качестве рабочих использовать номограммы больших размеров, так как по ним можно получить более точный результат, чем по номограммам, расположенным на страницах пособия. Примером может служить книга «Номография для школьника» А.А. Глаголева, к которой прилагаются вклады с несколькими, наиболее часто используемыми, рабочими номограммами увеличенных размеров [3].

10. Появление компьютеров значительно облегчило проведение численных расчётов при решении различных задач. Однако практика показывает, что номограммы обладают целым рядом преимуществ перед ними. Простота пользования номограммами, малая вероятность ошибки, их доступность, дешевизна и быстрота получения по ним ответа позволяют утверждать, что номографическое решение задачи, если точность номограмм достаточна, экономически выгоднее компьютерного. Естественны случаи синтеза номографических и компьютерных методов решения задач. Целесообразным является использование методов приближенного номографирования таблиц с несколькими входами, полученных на компьютере.

Для получения номограмм можно применять компьютер и после этого рассматривать номограммы как одну из удобных форм компьютерного решения задач. Существуют работы по автоматизированию не только построения номограмм, но и по их конструированию [1]. Это означает, что создаются такие программы, которые дают возможность после ввода в компьютер формулы, пределов изменения переменных и размеров чертежа сразу получить готовую рабочую номограмму.

11. Номограммы способствуют специфическому целенаправленному использованию методов прикладной математики. С.И. Шварцбург выделил три этапа приложения математики к решению практических задач: формализация — переход от реальной ситуации, которую следует разрешить, к адекватной математической модели; 2) решение задачи внутри построенной математической модели; 3) интерпретация [13, с. 18–19]. Как отмечает В.В. Фирсов, явное вовлечение в процесс обучения математике этапов формализации задачи и интерпретации полученного в результате её решения результата создаёт единственно возможные предпосылки для обучения применению математики к реальным проблемам [12, с. 17]. Номографическое решение практических задач отвечает этому требованию.

Заключение. Приведённые в настоящей работе примеры иллюстрируют методику преподавания основ номографии в средней школе, показывают возможность демонстрации эффективности номографических методов не только в математике, но и в других школьных дисциплинах, а также то, что использование и построение номограмм повышает математическую культуру учащихся, под которой понимается «...определенный запас знаний, навыков и умений учащихся, в том числе и умение применять накопленные знания и навыки в трудовой и учебной деятельности» [13, с. 20], что, говоря современным языком ФГОС ООО, отражает «формирование умений формализации и структурирования информации, умения выби-

рать способ представления данных в соответствии с поставленной задачей — таблицы, схемы, графики, диаграммы, ...» [11, с. 15].

Многие номограммы (например, приведённые здесь) могут быть построены учащимися средней школы — как обычными способами, так и с помощью интерактивных геометрических систем: пакета «Живая геометрия», входящего в состав образовательного комплекса «1С:Математика, 5–11 классы. Практикум», разработанного в рамках проекта «Информатизация системы образования», или программы «1С:Математический конструктор».

Список литературных источников

1. Борисов С.Н. Алгоритмы конструирования номограмм. М.: ВЦ РАН, 1999. 164 с.
2. Брадис В.М. Четырёхзначные математические таблицы. М.: Дрофа, 2017. 96 с.
3. Глаголев А.А. Номография для школьника. М.: Учпедгиз, 1959. 120 с.
4. Колмогоров А.Н. Летняя школа на Рубском озере. М.: Просвещение, 1971.
5. Компанийц П.А. Простейшие графические расчеты в школьном курсе математики. Л.: Учпедгиз, 1957. 80 с.
6. Кузнецова Т.И. Геометрические модели функциональных зависимостей: Дисс. ... кандидата педагогических наук. М., 1976. 185 с.
7. Кузнецова Т.И. Модель выпускника подготовительного факультета в пространстве предвузовского математического образования: Научное издание. М.: КомКнига, 2005. 480 с.
8. Пентковский М.В. Считающие чертежи (номограммы). М.: Физматгиз, 1959. 151 с.
9. Пулькин С.П. Вычислительная математика: Пособие для учащихся 9 – 10 кл. по факультативному курсу. М.: Просвещение, 1974. 239 с.
10. Стратилатов П.В. Повышение вычислительной культуры учащихся средней школы. М.: Просвещение, 1965.
11. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования. М.: Минобрнауки РФ, 2010. 50 с.
12. Фирсов В.В. Некоторые проблемы обучения теории вероятностей как прикладной дисциплине: Автореферат дисс. ... канд. пед. наук. М., 1974. 27 с.
13. Шварцбурд С.И. Проблемы повышенной математической подготовки учащихся: Авторский доклад об опубликованных работах, представленных на соискание ученой степени доктора педагогических наук. М., 1972. 105 с.

CONSTRUCTION OF SPECIAL GEOMETRIC MODELS FOR THE CALCULATION OF FUNCTIONAL DEPENDENCIES

T.I. Kuznetsova
Dr. Sci. (Pedagogy), professor
kuzti45@gmail.com
г. Москва

Lomonosov Moscow State University,
Institute of Russian Language and Culture

Summary. The article is devoted to special geometrical models of functional dependences — to nomograms, their designing and justification. The short information on development of a nomography — the section of calculus mathematics which is engaged in the theory and practice of construction and application of nomograms in various areas of human activity is supplied. The role of nomograms in strengthening of intra subject communications, and also in expansion of intersubject communications of mathematics with various sections of physics is defined. Exam-

ples of the nomograms available to the pupil of high school not only from the point of view of application, but also from the point of view of justification and designing are given.

Keywords: nomography, nomogram, geometry, geometrical model, calculation by means of nomograms.

References

1. Borisov S.N. (1999) Algoritmy` konstruirovaniia nomogramm [Algorithms for nomogram design] M.: VTC RAN, 1999. 164 p.
2. Bradis V.M. (2017) Chety`rekhznachny`e matematicheskie tablitsy` [Four-digit math tables] M.: Drofa, 2017. 96 p.
3. Glagolev A.A. (1959) Nomografiia dlia shkol`nika [Monograph for the schoolboy] M.: Uchpedgiz, 1959. 120 p.
4. Kolmogorov A.N. (1971) Letniaia shkola na Rubskom ozere [Summer school on Rubskom Lake] M.: Prosveshchenie, 1971.
5. Kompanii`tc P.A. (1957) Prostei`shie graficheskie raschety` v shkol`nom kurse matematiki [The simplest graphic calculations in school mathematics course] L.: Uchpedgiz, 1957. 80 p.
6. Kuznetcova T.I. (1976) Geometricheskie modeli funktsional`ny`kh zavisimostei`: Diss. ... kandidata pedagogicheskikh nauk [The simplest graphic calculations in school mathematics course] M., 1976. 185 p.
7. Kuznetcova T.I. (2005) Model` vy`pusknika podgotovitel`nogo fakul`teta v prostranstve predvuzovskogo matematicheskogo obrazovaniia: Nauchnoe izdanie [Graduate faculty model in space predvuzovskogo mathematical education: scientific publication] M.: KomKniga, 2005. 480 p.
8. Pentkovskii` M.V. (1959) Schitaiushchie chertezhi (nomogrammy`) [Consider blueprints (monograms)] M.: Физматгиз, 1959. 151 p.
9. Pul`kin S.P. (1974) Vy`chislitel`naia matematika: Posobie dlia uchashchikhsia 9 – 10 cl. po fakul`tativnomu kursu [Computational mathematics: a manual for students of 9-10 cl. on the optional course] M.: Prosveshchenie, 1974. 239 p.
10. Stratilatov P.V.(1965) Povy`shenie vy`chislitel`noi` kul`tury` uchashchikhsia srednei` shkoly` [Improvement of computer culture of middle school students] M.: Prosveshchenie, 1965.
11. Federal`ny`i` gosudarstvenny`i` obrazovatel`ny`i` standart osnovnogo obshchego obrazovaniia [the Federal State educational standard of basic general education] M.: Minobrnauki RF, 2010. 50 p.
12. Firsov V.V. (1974) Nekotory`e problemy` obucheniia teorii veroiatnostei` kak prikladnoi` distcipline: Avtoreferat diss. ... kand. ped. nauk [Some problems of learning probability theory as applied discipline: Abstract Diss. ... Cand. ped. Sciences] M., 1974. 27 p.
13. Shvartcburd S.I. (1972) Problemy` povы`shennoi` matematicheskoi` podgotovki uchashchikhsia: Avtorskii` doclad ob opublikovanny`kh rabotakh, predstavlenny`kh na soiskanie uchenoi` stepeni doktora pedagogicheskikh nauk [Some problems of learning probability theory as applied discipline: Abstract Diss. ... Cand. ped. Sciences] M., 1972. 105 p.

УДК 517.946 | **ЗАДАЧА ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ
ДЛЯ СЕМЕЙСТВА ПАРАБОЛ НА ПЛОСКОСТИ**

Бегматов Акрам Хасанович

д.ф.-м.н., профессор
akrambegmatov@mail.ru
г. Самарканд

заведующий кафедрой дифференциальных уравнений Самаркандского государственного университета (Узбекистан)

Исмоилов Алишер Сидикович

ассистент
alisher_5869@rambler.ru
г. Самарканд

ассистент кафедры дифференциальных уравнений Самаркандского государственного университета (Узбекистан)

Аннотация. Интегральная геометрия представляет собой один из важнейших разделов теории некорректных задач математической физики и анализа. Актуальность задач интегральной геометрии обусловлена развитием топографических методов, представляющих повышенные требования к глубине применяемых результатов, тем обстоятельством, что к решению задач интегральной геометрии сводится ряд многомерных обратных задач для дифференциальных задач с частными производными, а также внутренними потребностями развития теории некорректных задач математической физики и анализа. В настоящей работе рассмотрена задача восстановления функции по семейству парабол в верхней полуплоскости с весовой функцией, имеющей особенность. Доказана теорема единственности решения уравнения и выведена формула обращения. Показано, что решение поставленной задачи слабо некорректно, то есть получены оценки устойчивости в пространствах конечной гладкости.

Ключевые слова. Слабо некорректные задачи, преобразование Фурье, теоремы единственности, весовая функция.

Задачи интегральной геометрии – интенсивно развивающееся направление современной математики, которое является одним из крупнейших направлений в теории некорректных задач математической физики и анализа. Ее задачи тесно связаны с многочисленными приложениями – задачами интерпретации данных геофизических исследований, электро-разведки, акустики и компьютерной томографии.

Одной из центральных проблем интегральной геометрии является восстановление функции, если известны ее интегралы по заданным многообразиям.

Приведем определение задачи интегральной геометрии [1]. Пусть $u(x)$ – достаточно гладкая функция, определенная в n – мерном пространстве $x = (x_1, \dots, x_n)$, и $\{M(\lambda)\}$ – семейство гладких многообразий в этом пространстве, зависящих от параметра $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Пусть, далее, от функции $u(x)$ известны интегралы

$$\int_{M(\lambda)} u(x) d\sigma = v(\lambda), \quad (1)$$

где $d\sigma$ определяет элемент меры по $M(\lambda)$. Требуется по функции $v(\lambda)$ найти функцию $u(x)$.

Единственность широкого класса задач интегральной геометрии в полосе была установлена В.Г. Романовым [2]. Задачи не вольтерровского типа изучались в работах М.М.Лаврентьева и А.Л. Бухгейма [3,4], Р.Г. Мухометова [5].

Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтерровского типа с весовыми функциями, имеющими особенность исследовались в работах [6,7].

Теоремы единственности, оценки устойчивости и формулы обращения слабо некорректных задач интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями вершинах получены в [8-10].

Задачи интегральной геометрии на параболоидах с возмущением в трехмерном слое рассмотрены в работе [11].

В настоящей работе рассмотрена задача восстановления функции по семейству парабол в верхней полуплоскости с весовой функцией, имеющей особенность.

Введем обозначения, которые будем использовать в этом пункте:

$$(x, y) \in R^2, \quad (\xi, \eta) \in R^2, \quad \lambda \in R^1, \quad \mu \in R^1$$

$$\Omega = \{(x, y), x \in R^1, y \in (0, l), l < \infty\}$$

$$\bar{\Omega} = \{(x, y), x \in R^1, y \in [0, l]\}$$

Постановка задачи.

В полосе $\bar{\Omega}$ рассмотрим семейство кривых, которое однозначно параметризуются с помощью координат своих вершин (x, y) , произвольная кривая семейства $P(x, y)$ определяется соотношениями

$$P(x, y) = \{(\xi, \eta) : (y - \eta) = (x - \xi)^2, 0 \leq \eta \leq y, y \leq l, l < \infty\}.$$

Задача 1. Определить функцию двух переменных $u(x, y)$, если для всех (x, y) из полосы $\bar{\Omega}$ известны интегралы от функции $u(\bullet)$ по кривым $P(x, y)$:

$$\int_{x-\sqrt{y}}^{x+\sqrt{y}} g(x, \xi) U(\xi, \psi(x, y, \xi)) d\xi = f(x, y) \quad (1)$$

где

$$g(x, \xi) = 2|x - \xi| = 2(x - \xi) \operatorname{sgn}(x - \xi) \quad (2)$$

Функция $u(x, y)$ – функция из класса U , которые имеют все непрерывные частные производные до второго порядка включительно и финитны с носителем в R_+^2 :

$$\operatorname{supp} u \subset D = \{(x, y) : -a < x < a, 0 < a < \infty, 0 < y < l, l < \infty\}$$

Доопределим правую часть уравнения (1) при $y < 0$.

Введем функцию

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{при } y \geq 0, \\ 0, & \text{при } y < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Как следует из постановки задачи 1 и условий, наложенных на функцию $u(\bullet)$, к функции $f^*(x, y)$ можно применить преобразование Фурье по y . Рассмотрим преобразование Фурье по переменной y функции $f^*(\lambda, y)$. Учитывая, что

$$f^*(x, y) \equiv 0, \text{ при } y < 0,$$

имеем

$$\varphi(\lambda, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} \widehat{f^*}(\lambda, y) dy,$$

а интеграл в правой части последнего соотношения равен

$$\int_0^{\infty} e^{i\mu y} \widehat{f}(\lambda, y) dy.$$

Таким образом, доопределив $f(x, y)$ в нижней полуплоскости нулём, к обеим частям уравнения (1) можно применять преобразование Фурье по y и интеграл Фурье будет иметь вид :

$$\int_0^{\infty} e^{i\mu y} (\cdot) dy.$$

Введем следующие функции

$$I(\lambda, \mu) = 2 \int_0^{\infty} e^{i\mu t^2} t \cos \lambda t dt, \quad (4)$$

$$I_1(\lambda, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\mu} \frac{\lambda d\mu}{I(\lambda, \mu)(1 + \mu^4)}, \quad (5)$$

$$I_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\lambda} \frac{I_1(\lambda, y)}{1 + \lambda^4} d\lambda. \quad (6)$$

Справедлива следующая теорема:

Теорема. Пусть функция $f(x, y)$ известна для всех (x, y) из полосы $\bar{\Omega}$. Тогда решение задачи 1 в классе U единственно, имеет место представление

$$U(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_2(x - \xi, y - \eta) \left(E + \frac{\partial^4}{\partial \xi^4}\right) \left(E + \frac{\partial^4}{\partial \eta^4}\right) f(\xi, \eta) d\eta d\xi dx \quad (7)$$

и выполняется неравенство

$$\|u\|_{L_2} \leq C \|f\|_{W_2^{0,1}(R_+^2)},$$

где C – некоторая постоянная.

Список литературных источников

1. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. Новосибирск: Наука, 1972.
2. Лаврентьев М.М. Интегральная геометрия и обратные задачи // Некорректные задачи математической физики и анализа. Новосибирск: Наука. 1984. С.81-86.
3. Лаврентьев М.М., Бухгейм А.Л. Об одном классе задач интегральной геометрии // Доклады АН СССР. №1. Т. 311. 1973. С.38-39.
4. Лаврентьев М.М., Бухгейм А.Л. Об одном классе операторных уравнений первого рода // Функциональный анализ и его приложения. №4. Т. 7. 1973. С.44-53.
5. Мухометов Р.Г. О задаче интегральной геометрии // Математические проблемы геофизики. №6. Т. 2. 1975. С.212-242.
6. Бегматов Акр.Х. Два класса слабо некорректных задач интегральной геометрии на плоскости // Сибирский математический журнал. №2. Т. 36. 1995. С.243-247.
7. Begmatov Akram H. (1995) On a class of weakly ill-posed Volterra-type of integral geometry in the three-dimensional space // J. Inverse and Ill-Posed Problems. Vol. 3 . №3. P. 231-235.
8. Бегматов Акр.Х. Вольтеровские задачи интегральной геометрии на плоскости для кривых с особенностями // Сибирский математический журнал. №4. Т. 38. 1997. С.723-737.

9. Бегматов Акбар Х. Задачи интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями в вершинах // Доклады РАН. №2. Т. 358. 1998. С.151-153.
10. Begmatov Akbar H. and Begmatov Akram H. (2003) Problems of integral geometry on curves and surfaces in Euclidean space // Ill-Posed and Non-Classical Problems of Mathematical Physics and Analysis, M.M. Lavrent'ev et al., Eds., Proceedings of International Conference, VSP, Utrecht-Boston, 1-18.
11. Бегматов Акбар Х. Задачи интегральной геометрии с возмущением в трехмерном пространстве // Сибирский математический журнал. №1. Т. 41. 2000. С.3-14.

THE INTEGRAL PROBLEM OF GEOMETRY FOR FAMILY OF PARABOLAS ON THE PLANE

A.H. Begmatov

Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor
akrambegmatov@mail.ru

г. Самарканд

Samarkand State University (Uzbekistan)

A.S. Ismoilov

assistant
alisher_5869@rambler.ru

г. Самарканд

Samarkand State University (Uzbekistan)

Annotation. Integral geometry is one of the most important sections of the theory of ill-posed problems of mathematical physics and analysis. The urgency of the problems of integral geometry is due to the development of tomographic methods, which raise the requirements for the depth of the applied results, the fact that the solution of problems of integral geometry reduces a number of multidimensional inverse problems for partial differential problems, as well as the internal development needs of the theory of ill-posed problems of mathematical physics and analysis. In this work we consider the problem of reconstructing a function from a family of parabolas in the upper half-plane with a weight function having a singularity. The uniqueness of theorem for the solution of equation is proved and the inversion formula is derived. It is shown that the solution of the problem posed is weakly ill-posed, that is, stability estimates are obtained in spaces of finite smoothness.

Key words: ill-posed problems, integral geometry problems, integral transforms, inversion formula, existence theorem

References

1. Romanov V.G. (1972) Nekotory'e obratny'e zadachi dlia uravnenii` giperbolicheskogo tipa [Some inverse problem for equations of hyperbolic type] Novosibirsk: Nauka, 1972.
2. Lavrent'ev M.M. (1984) Integral`naia geometriia i obratny'e zadachi [Integral geometry and inverse problems] Nekorrektny'e zadachi matematicheskoi` fiziki i analiza. Novosibirsk: Nauka, pp. 81-86.
3. Lavrent'ev M.M., Bukhgei`m A.L. (1973) Ob odnom klasse zadach integral`noi` geometrii [One class of tasks of integral geometry] Doclady` AN SSSR. №1. Т. 311, pp. 38-39.
4. Lavrent'ev M.M., Bukhgei`m A.L. (1973) Ob odnom klasse operatorny`kh uravnenii` pervogo roda [One class of operator equations of the first kind] Funktsional`ny`i` analiz i ego prilozheniia. №4. Т. 7, pp. 44-53.

5. Muhometov R.G. (1975) O zadache integral'noi geometrii [About the task of integral geometry] Matematicheskie problemy geofiziki. №6. T. 2, pp. 212-242.
6. Begmatov Akr.KH. (1995) Dva klassa slabo nekorrektnykh zadach integral'noi geometrii na ploskosti [Two classes of weak ill-posed problems of integral geometry on plane] Sibirskii matematicheskii zhurnal. №2. T. 36, pp. 243-247.
7. Begmatov Akram H. (1995) On a class of weakly ill-posed Volterra-type of integral geometry in the three-dimensional space // J. Inverse and Ill-Posed Problems. Vol. 3. №3. P. 231-235.
8. Begmatov Akr.KH. (1997) Vol'terovskie zadachi integral'noi geometrii na ploskosti dlia krivykh s osobennostiami [Volterovskie tasks of integral geometry on plane curves with features] Sibirskii matematicheskii zhurnal. №4. T. 38, pp. 723-737.
9. Begmatov Akr.KH. (1998) Zadachi integral'noi geometrii po spetsial'ny'm krivy'm i poverkhnostiam s osobennostiami v verшинakh [Tasks of integral geometry on special curves and surfaces with singularities at the vertices] Doklady RAN. №2. T. 358, pp. 151-153.
10. Begmatov Akbar H. and Begmatov Akram H. (2003) Problems of integral geometry on curves and surfaces in Euclidean space // Ill-Posed and Non-Classical Problems of Mathematical Physics and Analysis, M.M. Lavrent'ev et al., Eds., Proceedings of International Conference, VSP, Utrecht-Boston, 1-18.
11. Begmatov Akbar KH. (2000) Zadachi integral'noi geometrii s vozmushcheniem v trekhmernom prostranstve [Tasks of integral geometry in 3D space with indignation] Sibirskii matematicheskii zhurnal. №1. T. 41, pp. 3-14.

УДК 517.9 | **ДОСТАТОЧНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ
ТРИВИАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ И ОТСУТСТВИЯ
ЗАМКНУТЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ОДНОЙ
СИСТЕМЫ ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

Буриев Толибжон Эргашевич
к.ф.-м.н., доцент
tolibjonb@yahoo.com
г. Самарканд

доцент кафедры алгебры и геометрии
механико-математического факультета
Самаркандского государственного уни-
верситета

Мухтаров Яхъё Мухтарович
к.ф.-м.н., доцент
ya-muxtarov@rambler.ru
г. Самарканд

доцент кафедры дифференциальных
уравнений механико-математического
факультета Самаркандского государ-
ственного университета

Аннотация. Предлагаемая работа посвящена исследованию тривиального решения одной системы трех нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящей от десяти параметров. Рассматриваются проблемы устойчивости тривиального решения и существования замкнутых интегральных многообразий в некоторой окрестности начала координат. Используя первый метод Ляпунова, авторы получили достаточные критерии устойчивости тривиального решения системы. Функция Ляпунова рассматривается в виде

$$V(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 v_i(x, y, z),$$

где

$$\begin{aligned}v_1(x, y, z) &= v_{11}(x) + v_{23}(y, z), \\v_2(x, y, z) &= v_{22}(y) + v_{13}(x, z), \\v_3(x, y, z) &= v_{33}(z) + v_{12}(x, y).\end{aligned}$$

Проблема существования замкнутых интегральных многообразий исследована при помощи обобщенного критерия Бендиксона-Дюляка для трехмерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены условия для параметров, при значении которых в системе отсутствуют трехмерные замкнутые интегральные многообразия.

Ключевые слова: система, дифференциальные уравнения, тривиальные решения, устойчивость, критерия Бендиксона, функция Ляпунова, интегральные многообразия.

Целью настоящей работы является исследование устойчивости тривиального решения и отсутствия замкнутых интегральных многообразий системы дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1 x^m + b_1 y + c_1 z, \\ \dot{y} = a_2 x + b_2 y^m + c_2 z, \\ \dot{z} = a_3 x + b_3 y + c_3 z^m, \end{cases} \quad (1)$$

где a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2, 3$) вещественные числа, $m = 2n + 1 \geq 3$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{pmatrix}$$

и $\det A \neq 0$.

Для нахождения достаточных условий устойчивости тривиального решения системы воспользуемся первым методом Ляпунова. Функцию Ляпунова рассмотрим в виде

$$V(x, y, z) = \sum_{i=1}^3 v_i(x, y, z),$$

где

$$\begin{aligned}v_1(x, y, z) &= v_{11}(x) + v_{23}(y, z), \\v_2(x, y, z) &= v_{22}(y) + v_{13}(x, z), \\v_3(x, y, z) &= v_{33}(z) + v_{12}(x, y).\end{aligned}$$

Вычислим полные производные этих функций в силу системы (1)

$$\dot{v}_1|_{(1)} = \dot{v}_{11}(a_1 x^m + b_1 y + c_1 z) + \frac{\partial v_{23}}{\partial y}(a_2 x + b_2 y^m + c_2 z) + \frac{\partial v_{23}}{\partial z}(a_3 x + b_3 y + c_3 z^m),$$

$$\dot{v}_2|_{(1)} = \dot{v}_{22}(a_2 x + b_2 y + c_2 z) + \frac{\partial v_{13}}{\partial x}(a_1 x^m + b_1 y + c_1 z) + \frac{\partial v_{13}}{\partial z}(a_3 x + b_3 y + c_3 z^m),$$

$$\dot{v}_3|_{(1)} = \dot{v}_{33}(a_3 x + b_3 y + c_3 z^m) + \frac{\partial v_{12}}{\partial x}(a_1 x^m + b_1 y + c_1 z) + \frac{\partial v_{12}}{\partial y}(a_2 x + b_2 y^m + c_2 z).$$

Потребуем, чтобы функция $\dot{V}|_{(1)}$ имела такую же функциональную структуру что и V , т.е. имело место

$$\dot{v}_{11}(b_1 y + c_1 z) + \left(\frac{\partial v_{23}}{\partial y} a_2 + \frac{\partial v_{23}}{\partial z} a_3 \right) x = 0,$$

$$\dot{v}_{22}(a_2 x + c_2 z) + \left(\frac{\partial v_{13}}{\partial x} b_1 + \frac{\partial v_{13}}{\partial z} b_3 \right) y = 0,$$

$$\dot{v}_{33}(a_3 x + b_3 y) + \left(\frac{\partial v_{12}}{\partial x} c_1 + \frac{\partial v_{12}}{\partial y} c_2 \right) z = 0.$$

Разделяя переменные в этих уравнениях, получим

$$-\frac{\dot{v}_{11}}{x} = \frac{\frac{\partial v_{23}}{\partial y} a_2 + \frac{\partial v_{23}}{\partial z} a_3}{b_1 y + c_1 z}, \quad -\frac{\dot{v}_{22}}{y} = \frac{\frac{\partial v_{13}}{\partial x} b_1 + \frac{\partial v_{13}}{\partial z} b_3}{a_2 x + c_2 z},$$

$$-\frac{\dot{v}_{33}}{z} = \frac{\frac{\partial v_{12}}{\partial x} c_1 + \frac{\partial v_{12}}{\partial y} c_2}{a_3 x + b_3 y}.$$

Каждая из этих дробей должна быть постоянной, например, равной $-0,5$. Тогда получим

$$v_{11}(x) = x^2, \quad v_{23} = -\frac{b_1}{a_2} y^2 - \frac{c_1}{a_3} z^2,$$

$$v_{22}(y) = y^2, \quad v_{13} = -\frac{a_2}{b_1} x^2 - \frac{c_2}{b_3} z^2,$$

$$v_{33}(z) = z^2, \quad v_{12} = -\frac{a_3}{c_1} x^2 - \frac{b_3}{c_2} y^2,$$

и, следовательно, функция Ляпунова и ее производная в силу системы (1) примут следующий вид:

$$V(x, y, z) = \left(1 - \frac{a_2}{b_1} - \frac{a_3}{c_1}\right) x^2 + \left(1 - \frac{b_1}{a_2} - \frac{b_3}{c_2}\right) y^2 + \left(1 - \frac{c_1}{a_3} - \frac{c_2}{b_3}\right) z^2$$

$$\dot{V}(x, y, z)|_{(1)} =$$

$$= 2a_1 \left(1 - \frac{a_2}{b_1} - \frac{a_3}{c_1}\right) x^{m+1} + 2b_2 \left(1 - \frac{b_1}{a_2} - \frac{b_3}{c_2}\right) y^{m+1} + 2c_3 \left(1 - \frac{c_1}{a_3} - \frac{c_2}{b_3}\right) z^{m+1}.$$

При выполнении следующих условий;

$$1 - \frac{a_2}{b_1} - \frac{a_3}{c_1} > 0, 1 - \frac{b_1}{a_2} - \frac{b_3}{c_2} > 0, 1 - \frac{c_1}{a_3} - \frac{c_2}{b_3} > 0 \quad (2)$$

Функция Ляпунова $V(x, y, z)$ будет положительно (отрицательно) определенной.

Таким образом, в силу теоремы Ляпунова [1] имеет место утверждения:

I. Если наряду с условиями (2) выполняются условия:

$$a_1 < 0, \quad b_2 < 0, \quad c_3 < 0 \quad (> 0),$$

то тривиальное решение системы (1) будет асимптотически устойчивым;

II. Если наряду с условиями (2) выполняются

$$a_1 = 0, \quad b_2 = 0, \quad c_3 < 0$$

то тривиальное решение системы (1) будет устойчивым;

III. Если

$$c_1 a_3 + c_2 b_3 + b_1 a_2 > 0,$$

то тривиальное решение системы (1) будет неустойчивым;

IV. Если

$$a_1 = b_2 = 0, c_3 \neq 0, c_1 a_3 + c_2 b_3 + b_1 a_2 > 0,$$

то тривиальное решение системы (1) будет неустойчивым.

Теперь рассмотрим проблемы отсутствия замкнутых интегральных многообразий в некоторой окрестности тривиального решения.

Для решения этого вопроса воспользуемся обобщенным критерием Бендиксона – Дюляка об отсутствии замкнутых интегральных многообразий для трехмерных систем.

Вычислим частные производные от правых частей системы:

$$P'_x = ta_1 x^{m-1}, Q'_y = mb_2 y^{m-1}, R'_z = mc_3 z^{m-1}.$$

Согласно критерию Бендиксона находим выражение суммы частных производных:

$$D = P'_x + Q'_y + R'_z = ta_1 x^{m-1} + mb_2 y^{m-1} + mc_3 z^{m-1}.$$

Так как по предположению мы рассматриваем нечетные m , т.е. $m=2n+1$, то для величины D получим выражение:

$$D = (2n + 1)(a_1x^{2n} + b_2y^{2n} + c_3z^{2n})$$

Поэтому при выполнении условий (2) и пункта I, это выражение при всех значениях переменных сохраняет знак (либо $D > 0$, либо $D < 0$) и равняется нулю только при $x = y = z = 0$. Следовательно, согласно критерию Бендиксона при выполнении условий (2) и пункта I, в окрестности тривиального решения системы отсутствуют замкнутые трехмерные интегральные многообразия.

Список литературных источников

1. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 224 с.
2. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1976.

CRITERION OF STABILITY TRIVIAL SOLUTION AND EXIST CLOSED INTEGRATED SURFACES IN ONE OF SYSTEM OF THREE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

T. E. Buriyev

Cand. Sci. (Phys.–Math.), associate professor
tolibjonb@yahoo.com
Samarkand

Samarkand State University

Ya. M. Mukhtarov

Cand. Sci. (Phys.–Math.), associate professor
ya-muxtarov@rambler.ru
Samarkand

Samarkand State University

Abstract. In this work the problems about stability of trivial equilibrium state and exist closed integrated surfaces in special type system of three ordinary nonlinear differential equations, is analyzed. To investigate stability of equilibrium state we use the second of Lyapunov method and given sufficiency criterions of stability trivial solution. Using the generalized criterion of Bendikson – Dulac for three dimensional system of the ordinary differential equations we show, that at system in neighborhood of trivial solution cannot exist closed integrated surfaces.

Keywords: differential equations, system, equilibrium point, stability, Lyapunov function, criterion Bendikson, integrated surfaces.

References

1. Barbashin E.A. (1967) Vvedenie v teoriyu ustoi`chivosti [Introduction to the theory of sustainability] M.: Nauka. 224 p.
2. Bautin N.N., Leontovich E.A. (1976) Metody` i priemy` kachestvennogo issledovaniia dinamicheskikh sistem na ploskosti [Methods and techniques of the qualitative study of dynamical systems in the plane] M.: Nauka.

УДК
517.51**О ТОЧНЫХ ОЦЕНКАХ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ
ФУНКЦИЙ С ПРОИЗВОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ КОНЕЧНОЙ
ВАРИАЦИИ ПОСРЕДСТВОМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ****Хатамов Ахтам**
д.ф.-м.н., доцент
khatamov@rambler.ru
г. Самаркандпрофессор кафедры математической физики и
функционального анализа механико-
математического факультета Самаркандского
государственного университета (Узбекистан)**Норкулов Эрали Аслон угли**
старший преподаватель
e.norqulov@mail.ru
г. Самаркандстарший преподаватель кафедры математики
и информатики Академического лицея при
Самаркандском государственном институте
иностранных языков (Узбекистан)

Аннотация. Для функций с особенностями или с небольшой гладкостью полиномы и рациональные функции могут давать плохие приближения, а сплайны обычно дают хорошие приближения как более естественный аппарат приближения, чем многочлены или рациональные функции. Это также подтверждается сравнением результатов статьи [1] с хорошо известными результатами полиномиальных и рациональных аппроксимаций функций из рассматриваемых функциональных классов, которые посвящены точным в смысле порядка малости оценкам наилучших приближений полиномиальными сплайнами минимального дефекта со свободными узлами на конечном отрезке в равномерной и в интегральных метриках функций из следующих функциональных классов:

- а) класс всех выпуклых функций, удовлетворяющих условию Липшица – Гёльдера;
- б) класс всех функций с выпуклыми производными;
- с) класс всех функций с обобщенной конечной вариацией.

В статье [2] доказаны точные в смысле порядка малости оценки наилучших сплайн приближений функций с производной обобщенной конечной вариации, заданных на конечном отрезке прямой в равномерной и в интегральных метриках. Они являются обобщениями результатов статьи [1], где установлены точные в смысле порядка малости оценки для наилучших кусочно-линейных приближений функций обобщенной конечной вариации в интегральных метриках. В настоящей статье доказаны точные в смысле порядка малости оценки наилучших рациональных приближений функций с производной обобщенной конечной вариации на конечном отрезке в равномерной и в интегральных метриках. Они являются основными результатами этой статьи, показывающими такие же скорости приближения, что и результаты статьи [2]. В них показано, что скорости рациональных и сплайн приближений существенно лучшие, чем скорости соответствующих полиномиальных приближений и не улучшаемы в смысле порядка малости. Поэтому эти результаты актуальны и ясно, что к выше упомянутым функциональным классам а), б), с) можно присоединить ещё один класс д) – всех функций с производной обобщенной конечной вариации.

Ключевые слова: точная оценка, сплайн функция, рациональная функция, обобщенная конечная вариация, класс функций с обобщенной конечной вариации, класс функций с производной обобщенной конечной вариации, сплайн приближение функций, рациональное приближение функций, в равномерной и в интегральных метриках.

1. Введение.

В статье [1] доказаны точные (в смысле порядка малости) оценки наилучших приближений полиномиальными сплайнами минимального дефекта со свободными узлами на конечном отрезке в равномерной и в интегральных метриках функций из следующих функциональных классов:

- а) класс всех выпуклых функций, удовлетворяющих условию Липшица – Гёльдера;
- б) класс всех функций с выпуклыми производными;
- с) класс всех функций с обобщенной конечной вариации.

В ней показаны, что эти оценки существенно лучшие чем соответствующие полиномиальные приближения.

В статье [2] установлены точные (в смысле порядка малости) оценки наилучших сплайн приближений функций с производной обобщенной конечной вариации на конечном отрезке в равномерной и в интегральных метриках.

В настоящей статье доказаны такие же оценки для наилучших рациональных приближений функций из тех же классов, что доказаны в статье [2] и которые в свою очередь, являются аналогами результатов статье [3] Н.Ш. Загирова, точных (в смысле порядка малости) оценок наилучших рациональных приближений функций обобщенной конечной вариации в интегральных метриках.

2. Определения и обозначения. Пусть N – множество всех натуральных чисел, $Z_+ = N \cup \{0\}$ $f(x)$ – измеримая по Лебегу на конечном отрезке $\Delta = [a, b]$ действительная функция, $|\Delta| = b - a$, $L_p(\Delta)$ – пространство всех измеримых по Лебегу действительных функций на Δ , суммируемых с p -ой степенью с квазинормой

$$\|f\|_{p,\Delta} := \left\{ \int_{\Delta} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} \quad (0 < p < \infty), \quad \|f\|_{\infty,\Delta} := \operatorname{ess\,sup} \{ |f(x)| : x \in \Delta \} \quad (p = \infty).$$

Пусть функция $\Phi(u)$ – непрерывная, возрастающая и выпуклая книзу функция, определенная на интервале $[0, \infty)$ и такая, что $\Phi(0) = 0$. Для функции $f(x)$, определенной и конечной на отрезке Δ , её Φ -вариацией называется величина

$$V_{\Phi}(f) = V_{\Phi}(f, \Delta) = \sup \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \Phi |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \right\},$$

где верхняя грань берётся по всевозможным разбиениям $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ($n = 1, 2, \dots$) отрезка Δ ([4]).

Пусть $M = \operatorname{const} > 0$, $r \in Z_+$, через $V_{\Phi}^{(r)}(M, \Delta)$ обозначим множество всех функций, r -я производная которых с ограниченной числом M Φ -вариацией на отрезке Δ , т.е.

$$V_{\Phi}^{(r)}(M, \Delta) = \{ f : V_{\Phi}(f^{(r)}, \Delta) \leq M \} \quad (f^{(0)} \equiv f).$$

При $\Phi(u) = u$ $V(f^{(r)}, \Delta) := V_{\Phi}(f^{(r)}, \Delta)$ – полная вариация функции f на отрезке Δ и $V^{(r)}(M, \Delta) = \{ f : V(f^{(r)}, \Delta) \leq M \}$.

Величина

$$\chi(f, n) = \sup \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| : a \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq b \right\}$$

называется модулем изменения функции $f(x)$ на отрезке Δ ([5]).

Функцию s называют полиномиальным сплайном (или просто сплайном) степени m дефекта 1 (или минимального дефекта) с произвольными $n+1$ узлами $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ на отрезке Δ , если

- 1) s – полином степени не выше m на каждом отрезке $[x_k, x_{k+1}]$, $k = \overline{0, n-1}$.
- 2) s – $m-1$ раз непрерывно дифференцируема на отрезке Δ .

Через $S(m, n, \Delta)$ обозначим множество всех сплайнов степени m дефекта 1 с произвольными $n+1$ узлами на отрезке Δ , а при $0 < p \leq \infty$ через $S_n^m(f, \Delta)$ – наименьшее уклонение функции f от сплайнов $s \in S(m, n, \Delta)$ по квазиполунорме пространства $L_p(\Delta)$, т.е.

$$S_n^m(f, \Delta)_p = \inf \left\{ \|f - s\|_{p, \Delta} : s \in S(m, n, \Delta) \right\}.$$

Пусть

$$S_n^m(V_\Phi^{(r)}(M, \Delta))_p := \sup \left\{ S_n^m(f, \Delta)_p : f \in V_\Phi^{(r)}(M, \Delta) \right\}.$$

Пусть

$$E_n(f, \Delta)_p = \inf \left\{ \|f - g\|_{p, \Delta} : g \in P_n \right\}.$$

где P_n – множество всех алгебраических многочленов степени не выше n , и

$$E_n(V_\Phi^{(r)}(M, \Delta))_p := \sup \left\{ E_n(f, \Delta)_p : f \in V_\Phi^{(r)}(M, \Delta) \right\}.$$

Аналогично определяем величины $R_n(f, \Delta)_p$ и $R_n(V_\Phi^{(r)}(M, \Delta))_p$ для наилучших приближений рациональными функциями порядка не выше n .

Если $r = 0$ и $p = \infty$, то в этих обозначениях указания на r и p опускаем.

Всюду ниже $C(\beta_1, \beta_2, \dots)$, $C_1(\beta_1, \beta_2, \dots)$, ... обозначают положительные величины, зависящие только от параметров, указанных в скобке, а $C, C_1, \dots$ обозначают положительные абсолютные постоянные.

Из теорем типа Джексона (см[6]) при $p \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ следует, что

$$E_n(V^{(r)}(M, \Delta))_p \asymp n^{-r-1/p}.$$

В статье [3] Н.Ш. Загиров установил следующие теоремы.

Теорема 1. Для любой ограниченной и измеримой в смысле Лебега на отрезке $I = [0, 1]$ функции $f(x)$ при $0 < p < \infty$ имеем

$$R_n(f, I)_p \leq C(p) \cdot \chi(f, n)/n \quad (1)$$

В [3] показано также, что оценка (1) точна в смысле порядка малости.

Теорема 2. При каждом положительном p имеем

$$R_n(V_\Phi(M, \Delta))_p \asymp \Phi^{-1}(M/n).$$

Точнее,

$$\begin{aligned} R_n(V_\Phi(M, \Delta))_p &\leq C_1(p) |\Delta|^{1/p} \Phi^{-1}(M/n) \\ R_n(V_\Phi(M, \Delta))_p &\geq C_2(p) |\Delta|^{1/p} \Phi^{-1}(M/n) \\ n &= 1, 2, \dots, \quad C_2(p) = 0.01 \cdot 6^{-1/p}. \end{aligned}$$

Следующие теоремы суть аналоги Теорем 1 и 2 для функций f с ограниченной r -ой производной и $f \in V_\Phi^{(r)}(M, \Delta)$ соответственно, а также являются основными результатами настоящей статьи.

Теорема 3. Если при $r \in N$ $f^{(r)}$ ограничена на отрезке Δ , то при любых $p, 0 < p \leq \infty, n \in N, n \geq r + 2$

$$R_n(f, \Delta)_p \leq C_3(r) \cdot |\Delta|^{r+1/p} \cdot \chi(f^{(r)}, n) / n^{r+1}.$$

С другой стороны, для каждого $n \in N$ и $r \in N$ существует функция $f = f_{n,r} \in V_\Phi^{(r)}(M, \Delta)$ с производной $f^{(r)}$ непрерывной на отрезке Δ и такая, что

$$R_n(f, \Delta)_p \geq C_1(r, p) \cdot |\Delta|^{r+1/p} \cdot \chi(f^{(r)}, n) / n^{r+1},$$

где

$$C_1(r, p) = \{24r(12\pi)^r [6(p+1)^{1/p}]\}^{-1}$$

при $0 < p < \infty$ и $C_1(r, \infty) = \{24r(12\pi)^r\}^{-1}$.

Теорема 4. Для всех $p, 0 < p \leq \infty, n \in N, r \in N$ верны оценки

$$C_1(r, p) \cdot |\Delta|^{r+1/p} \cdot n^{-r} \cdot \Phi^{-1}(M/n) \leq R_n(V_\Phi^{(r)}(M, \Delta)_p) \leq C_3(r) \cdot |\Delta|^{r+1/p} \cdot n^{-r} \cdot \Phi^{-1}(M/n),$$

где $C_1(r, p)$ и $C_3(r)$ величины из Теоремы 3.

Доказательство оценок сверху Теорем 3 и 4. 4.1. Для этого введем класс Соболева $W_q^r[a, b]$ всех функций f таких, что $f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывно на отрезке $\Delta = [a, b]$ и $f^{(r)} \in L_p(\Delta)$ и воспользуемся следующей теоремой П. П. Петрушева ([7]).

Теорема 5. Если $f \in W_q^r[a, b], \alpha > 0, m \in N$, то неравенство

$$R_n(f, \Delta)_p \leq C(p, q, r, \alpha, m) |\Delta|^{r+(1/p-1/q)} \cdot n^{-r-\alpha} \cdot \sum_{v=1}^n v^{\alpha-1} \cdot S_v^{m-1}(f^{(r)}, \Delta)_q, \quad n \geq r + m + 1 \quad (2)$$

имеет место в следующих ситуациях:

- 1) $r = 1, 1 \leq p < \infty, q = 1;$
- 2) $r = 1, 1 \leq q < \infty, p = \infty;$
- 3) $r \geq 2, p = \infty, q = 1.$

Если f любая функция с производной r -го порядка $f^{(r)}$ ($r \geq 1$) на отрезке Δ , то из Теоремы 1 статьи [1] следует при $0 < p < \infty, n \in N$ оценка

$$S_n^1(f^{(r)}, \Delta)_p \leq 5 \cdot |\Delta|^{1/q} \cdot \chi(f^{(r)}, n) / n \quad (3)$$

С учётом (2) воспользуемся неравенством (1) в ситуации 2)

Теоремы 5. Тогда получим при $n \geq 2, r = 1, \alpha = 3, q = 2$

$$\begin{aligned} R_n(f, \Delta) &\leq C \cdot |\Delta|^{1/2} \cdot n^{-4} \cdot \sum_{v=1}^n v^2 \cdot S_v^1(f', \Delta)_2 \leq 5 \cdot C \cdot |\Delta| \cdot n^{-4} \cdot \sum_{v=1}^n v \cdot \chi(f', \Delta) \leq \\ &\leq 10 \cdot C \cdot |\Delta| \cdot n^{-2} \cdot \chi(f', \Delta) \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть теперь $r \geq 2, q = 1$ f – любая функция, имеющая ограниченную r -ю производную на отрезке Δ . Тогда из (3) при всех $n \in N$ имеем

$$S_n^1(f^{(r)}, \Delta)_1 \leq 5 |\Delta| \cdot \chi(f^{(r)}, n) / n$$

Учитывая последнее неравенство из неравенства (2), выполняемого в ситуации 3)

Теоремы 5, при $n \geq r + 1, \alpha = 3$ получим

$$\begin{aligned} R_n(f, \Delta) &\leq C_2(r) \cdot |\Delta|^{r-1} \cdot n^{-r-3} \cdot \sum_{v=1}^n v^2 \cdot S_v^1(f^{(r)}, \Delta)_1 \leq \\ &\leq 5 \cdot C_2(r) \cdot |\Delta|^r \cdot n^{-r-3} \cdot \sum_{v=1}^n v \cdot \chi(f^{(r)}, v) \leq 10 \cdot C_2(r) \cdot |\Delta|^r \cdot n^{-r-1} \cdot \chi(f^{(r)}, n) \end{aligned} \quad (5)$$

Неравенства (4) и (5) дают оценку сверху Теоремы 3. Оценки сверху Теоремы 4 легко следуют из оценки сверху Теоремы 3 и из неравенства

$$\chi(f^{(r)}, n) \leq n\Phi^{-1}(M/n), \quad (6)$$

которое верно для любой функции $f \in V_{\Phi}^{(r)}(M, \Delta)$ и может быть установлено следующим путём: для любого разбиения $a \leq x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$ используя свойства выпуклости снизу функции Φ , получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |f^{(r)}(x_{k+1}) - f^{(r)}(x_k)| &= n\Phi^{-1} \left\{ \Phi \left[\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f^{(r)}(x_{k+1}) - f^{(r)}(x_k)| \right] \right\} \leq \\ &\leq n\Phi^{-1} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \Phi[f^{(r)}(x_{k+1}) - f^{(r)}(x_k)] \right\} \leq n\Phi^{-1}[V_{\Phi}(f^{(r)}, \Delta)/n] \leq n\Phi^{-1}(M/n). \end{aligned}$$

4.2. Доказательство оценок снизу Теорем 3 и 4.

Предложение 1. Для любых $n \in N, r \in N$ функция

$$f(x) = f_{n,r,\Phi}(x) = 1/2 \cdot (12\pi n)^{-r} \cdot \Phi^{-1}[M/(12rn)] \sin(12\pi n x),$$

где Φ и M функция и постоянная из Теоремы 4, такова, что $f \in V_{\Phi}^{(r)}(M, I)$ и при любых $p, 0 < p \leq \infty$,

$$R_n(f, I)_p \geq \{24r(12\pi)^r [6(p+1)^{1/p}]^{-1} \cdot n^{-r} \cdot \Phi^{-1}(M/n).$$

Доказательство Предложения 1. Пусть r - чётное натуральное число. Тогда

$$f^{(r)}(x) = [(-1)^{r/2}/2] \cdot \Phi^{-1}[M/(12rn)] \sin(12\pi n x),$$

Докажем, что $f \in V_{\Phi}^{(r)}(M, I)$. Действительно, в точках $x_k = k/(12rn) \in I$ при $k = \overline{0, 12rn}$ функция $f^{(r)}(x)$ обращается в нуль, а в точках $y_k = (k+1/2)/(12rn) \in I$ при $k = \overline{0, 12rn-1}$ $f^{(r)}(y_k) = (-1)^{k+r/2}/2 \cdot \Phi^{-1}[M/(12rn)]$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} V_{\Phi}(f^{(r)}, I) &= \Phi(f^{(r)}(y_0) - f^{(r)}(0)) + \sum_{k=1}^{12rn-1} \Phi(f^{(r)}(y_k) - f^{(r)}(y_{k-1})) + \\ &+ \Phi(f^{(r)}(1) - f^{(r)}(y_{12rn-1})) = 2\Phi\{(1/2)\Phi^{-1}[M/(12rn)]\} + (12rn-1)\Phi\{\Phi^{-1}[M/(12rn)]\} \leq M, \end{aligned}$$

т.е. $f \in V_{\Phi}^{(r)}(M, I)$.

Если же r нечётное натуральное число, то

$$f^{(r)}(x) = (-1)^{(r-1)/2}/2 \cdot \Phi^{-1}[M/(12rn)] \cos(12\pi n x),$$

и точно также как и при чётном натуральном r можно показать, что $f \in V_{\Phi}^{(r)}(M, I)$.

Далее докажем оценку снизу Предложения 1 для $R_n(f, I)_p$. Очевидно, что точки $x_k = k/(12rn)$, $k = \overline{0, 12rn}$, являются всеми нулями функции f на отрезке I . Поэтому функция f на отрезке I имеет $12rn+1$ участков монотонности. Всюду в дальнейшем пусть $\mathfrak{R}_n$ - множество всех рациональных функций порядка не выше n . Пусть $R \in \mathfrak{R}_n$. Число нулей функции R не больше чем $2n-1$. Следовательно, функция R на отрезке I имеет не больше $2n$ участков монотонности. Положим

$$\Delta_j := [x_{3j-3}, x_{3j}], \quad j = \overline{1, 4rn}; \quad \delta_k := [x_k, x_{k+1}], \quad k = \overline{0, 12rn-1}.$$

Через Δ'_j обозначим те из сегментов Δ_j , внутри которых монотонна функция R . А сегменты Δ_j , внутри которых нарушается монотонность функции R , обозначим через Δ''_j . Очевидно, что число сегментов Δ''_j не больше $2n-1$. Но, тогда число сегментов Δ'_j не меньше $2n(2r-1)+1 > 2nr$. Поскольку внутри отрезка Δ'_j функция R монотонна, то существует хотя бы один сегмент $\delta_k \subset \Delta'_j$, что во всех его точках $f(x) \cdot R(x) \leq 0$. Поэтому для любого отрезка Δ'_j при всех $0 < p < \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \left\{ \int_{\Delta'_j} |f(x) - R(x)|^p dx \right\}^{1/p} &\geq \left\{ \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x)|^p dx \right\}^{1/p} = \frac{1}{2} (12\pi n)^{-r} \Phi^{-1}(M/(12rn)) \\ \left\{ \int_{k/(12rn)}^{(k+1)/(12rn)} |\sin(12\pi nx)|^p dx \right\}^{1/p} &= \frac{1}{2} (12\pi n)^{-r-1/p} \Phi^{-1}(M/(12rn)) \cdot \left\{ \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin y|^p dy \right\}^{1/p} \geq \\ &\geq 1/2 (\pi/(p+1))^{1/p} (12\pi n)^{-r-1/p} \Phi^{-1}(M/(12rn)). \end{aligned}$$

Отсюда с учётом количества отрезков Δ'_j и свойства выпуклости кверху функции Φ^{-1} легко получаем

$$\begin{aligned} \|f - R\|_{p,I} &\geq \left\{ \sum_{\Delta'_j} \int_{\Delta'_j} |f(x) - R(x)|^p dx \right\}^{1/p} \geq 1/2 (12\pi)^{-r} \cdot (6(p+1))^{-1/p} \cdot n^{-r} \cdot \Phi^{-1}(M/(12rn)) \geq \\ &\geq (24r)^{-1} (12\pi)^{-r} (6(p+1))^{-1/p} \cdot n^{-r} \cdot \Phi^{-1}(M/n). \end{aligned} \quad (7)$$

Переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$ в неравенстве (7), получим оценку

$$\|f - R\|_{C(I)} \geq \{24r(12\pi)^r\}^{-1} \cdot n^{-r} \cdot \Phi^{-1}(M/n). \quad (8)$$

Из (7) и (8) следует оценка снизу Предложения 1. Предложение 1 доказано.

Предложение 2. Если $\Delta = [a, b]$ конечный отрезок, то для любых $n \in N$, $r \in N$ функция

$$f(x) = f_{n,r,\Delta,\Phi}(x) = 1/2 [(12\pi n)/|\Delta|]^{-r} \cdot \Phi^{-1}(M/(12rn)) \sin[12\pi n(x-a)/|\Delta|],$$

где Φ и M из теорема 4, обладает свойствами:

а) $f \in V_{\Phi}^{(r)}(M, \Delta)$;

б) при любых p , $0 < p \leq \infty$, справедлива оценка

$$R_n(f, \Delta)_p \geq \{24r(12\pi)^r [6(p+1)]^{1/p}\}^{-1} |\Delta|^{r+1/p} n^{-r} \Phi^{-1}(M/n).$$

Доказательство Предложения 2. Точно также как и при доказательстве Предложения 1 находя нули функции $f^{(k)}$ и её точек локальных максимумов и минимумов на отрезке Δ в случаях чётных r и нечётных r легко можно показать, что $f \in V_{\Phi}^{(r)}(M, \Delta)$. Свойство а) Предложения 2 доказано.

Теперь докажем свойство б) Предложения 2.

Воспользовавшись Предложением 1, получаем

$$\begin{aligned} R_n(f, \Delta)_p &:= \inf_{R \in \mathcal{R}_{n+1}} \left\{ \int_{\Delta} |f(x) - R(x)|^p dx \right\}^{1/p} = \\ &= \inf_{R \in \mathcal{R}_{n+1}} \left\{ \int_{[0,1]} \left| 1/2 [(12\pi n)/|\Delta|]^{-r} \Phi^{-1}(M/(12rn)) \sin(12\pi ny) - R(a + |\Delta|y) \right|^p dy \right\}^{1/p} \geq \end{aligned}$$

$$\geq \left\{ 24r(12\pi r)^r [6(p+1)]^{1/p} \right\}^{-1} |\Delta|^{r+1/p} n^{-r} \Phi^{-1}(M/(n)).$$

Предложения 2 доказано.

Из предложения 2 немедленно следует оценка снизу Теоремы 4. А оценка снизу Теоремы 3 легко следует из Предложения 2 и из неравенства (6). Таким образом, оценки снизу Теорем 3 и 4 доказаны, тем самым полностью доказаны Теоремы 3 и 4.

Список литературных источников

1. Khatamov A., On the exact estimates of the best spline approximations of functions. Electronic Transactions on Numerical Analysis. Kent State University (USA), 2006. V.25. p. 446–453.
2. Khatamov A., On estimates of the best approximations of functions with derivative of generalized finite variation by polynomial splines. Uzbek math. jour. Tashkent, 2015. №3. p. 164–173.
3. Загиров Н.Ш. О приближении функций обобщенной конечной вариации посредством рациональных функций. Матем заметки. Москва, 1982. Т. 32. №5. С. 657–668.
4. Musielac J., Orlich W. On generalized variation (I). Studia Math. 1959. p. 11–41.
5. Popov V.A. On the connection between rational and spline approximation. C.R.Acad.Bulg. Sci, 1975. №5. p. 623–626.
6. Тиман А.Ф., Теория предложения функций действительного переменного. Физматгиз, Москва, 1960.
7. Petrushev P.P., Popov V.A., Rational approximation of real functions. Combridge university press. Combridge, 1987. p. 244–257.

ON THE EXACT ESTIMATES OF THE BEST APPROXIMATIONS OF FUNCTIONS WITH DERIVATIVE OF GENERALIZED FINITE VARIATION BY RATIONAL ONES

A. Khatamov
Dr. Sci. (Phys.–Math.), associate professor
khatamov@rambler.ru
Samarqand

Samarqand State University

E.A. Norkulov
Senior Lecturer
e.norqulov@mail.ru
Samarqand

Samarqand State University

Abstract. For the function with singularities or with non-great smoothness polinomal and rational function can give a bad approximations, but the splines are more natural apparatus of approximation than polynomials and rational functions ordinary give the good approximations. It is also confirmed by comparison of the results of article [1] with well-known polynomial and ra-

tional approximations of functions from considering functional classes, which is devoted to the exact in the sense of the order of smallness estimates of the best approximations by polynomial splines of the minimal defect with free knots on a finite segment in uniform and in integral metrics of functions from the following functional classes:

- a) the class of all convex functions, satisfying the Lipschits-Hölder condition;
- b) the class of all functions with convex derivatives;
- c) the class of all functions with generalized finite variation.

In the article [2] the exact in the sense of the order of smallness estimates of the best spline approximations of functions with derivative of the generalized finite variation given on a finite segment of the straight line in uniform and in integral metrics are proved. They are generalizations of the results of the article [1], where the exact in the sense of the order of smallness estimates for the best piecewise-linear approximations of functions of the generalized finite variation in integral metrics are established. In present article the exact in the sense of the order of smallness estimates of the best rational approximations of functions with derivative of the generalized finite variation on a finite segment in uniform and in integral metrics are proved. They are main results of this article, showing the same rates of approximations that and results of the article [2]. These results are showed that the rates of rational and spline approximations essentially better than the rates of the corresponding polynomial approximations and non-improving in sense of the order of smallness. So these results actual and clearly that to mentioned above the classes of a), b), c) can be added another class d) – all functions with derivative of the generalized finite variation.

Key words: exact estimate, spline function, rational function, generalized finite variation, the class of functions with generalized finite variation, the class of functions with derivative of generalized finite variation, spline approximation of functions, rational approximation of functions, in uniform and in integral metrics.

References

1. Khatamov A. (2006) On the exact estimates of the best spline approximations of functions. Electronic Transactions on Numerical Analysis. Kent State University (USA). V.25. p. 446–453.
2. Khatamov A. (2015) On estimates of the best approximations of functions with derivative of generalized finite variation by polynomial splines. Uzbek math. jour. Tashkent. №3. p. 164–173.
3. Zagirov N.Sh. (1982) O priblizhenii funktsii obobshchennoi konechnoi variatsii posredstvom ratsional'nykh funktsii [The approximation of functions of generalized finite variation by means of rational functions] Matem zametki. Moskva. №5. T. 32, pp. 657-668.
4. Musielac J., Orlich W. (1959) On generalized variation (I). Studia Math. p. 11–41.
5. Popov V.A. (1975) On the connection between rational and spline approximation. C.R.Acad.Bulg. Sci. №5. p. 623–626.
6. Timan A.F. (1960) Teoriia predlozheniia funktsiy dei'svitel'nogo peremennogo [The theory offers a valid funkcij AC] Fizmatgiz, Moskva.
7. Petrushev P.P., Popov V.A. (1987) Rational approximation of real functions. Combridge university press. Combridge. p. 244–257.

УДК
681.52

**АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРОЦЕДУРЫ
ДИНАМИЧЕСКОГО ПОСТРОЕНИЯ УПРОЩЕННОЙ
МОДЕЛИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ СОКРАЩЕНИЯ
ТРУДОЕМКОСТИ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Докучаева Александра Николаевна
ассистент
a.n.dokuchaeva@gmail.com
г. Санкт-Петербург

ассистент кафедры высшей математики
Балтийского государственного
технического университета
«ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова

Емельянов Валентин Юрьевич
к.т.н., доцент
v.emelyanov@bk.ru
г. Санкт-Петербург

профессор кафедры систем управления
и компьютерных технологий Балтийского
государственного технического
университета «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова

Аннотация. В данной статье сопоставляются временные характеристики статических и динамических процедур построения упрощенных моделей, применяемых для сокращения трудоемкости вычислений при решении задач статистического имитационного моделирования процессов и систем. Рассмотренные примеры подтверждают эффективность и обоснованность применения динамических процедур построения упрощенных моделей для сокращения трудоемкости статистического моделирования с заданной точностью оценок. В качестве практической составляющей рассматривается задача оценки точности самонаведения летательного аппарата на движущуюся цель, причем, в целях исследования временных характеристик упрощенных моделей различного вида, точность оценки конечного промаха планомерно повышается в процессе моделирования.

Ключевые слова: статистическое имитационное моделирование, сокращение трудоемкости моделирования, динамическое построение упрощенных моделей.

Статистическое имитационное моделирование широко применяется в качестве метода исследования случайных процессов и систем со случайными параметрами. Оценка искомых статистических характеристик с заданной точностью в большинстве случаев требует от исследователя проведения заранее неопределенного числа опытов с имитационной статистической моделью. К сожалению, оценка фактического числа опытов при стандартной схеме проведения статистического моделирования [1, с.142] зачастую оказывается многократно завышенной, что приводит к неоправданным затратам ресурсов на проведение эксперимента.

Один из подходов к сокращению трудоемкости статистического имитационного моделирования в параллельном исследовании исходной (базовой) модели и ее упрощенного аналога. Такой подход лег в основу «метода выделения главной части» [2]. В данной работе модель именуется упрощенной, если ее статистические характеристики несущественно отличаются от базовой модели системы или процесса, но время проведения статистического эксперимента значительно сокращается. Упрощенную модель можно строить либо аналитически в процессе предварительного трудоемкого исследования базовой модели, либо адаптивно [3], что подразумевает построение упрощенной модели в универсальной форме и подбор ее параметров непосредственно во время эксперимента. В работе [3] предлагается механизм построения упрощенной модели в форме полинома, являющегося аппроксимацией функции отклика базовой модели, степень которого определяется аналитически Математический аппарат статистического имитационного моделирования подразумевает [1] взаимозависимость точности оценки и числа проведенных экспериментов, определяемую выражением:

$$n_{\text{треб}}^* = \alpha_{\text{дог}}^2 D_x^* / \varepsilon_{\text{дог}}^2, \quad (1)$$

где $\alpha_{\text{дог}}$ – доверительный интервал оценки; D_x^* – оценочная дисперсия; $\varepsilon_{\text{дог}}$ – требуемая точность оценки. Нетрудно заметить, что при фиксированных значениях $\varepsilon_{\text{дог}}$ и $\alpha_{\text{дог}}$ сокращение трудоемкости моделирования достижимо лишь при снижении D_x^* .

Пусть исследуемая базовая модель представлена в виде системы дифференциальных уравнений $\dot{X}_j(t) = \varphi_j(X(t), t, V)$, где $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \dots, X_m(t))$ – переменные состояния системы; $\bar{V} = (V_1, V_2, \dots, V_k)$ – случайные факторы. Допустим, что характеристикой эффективности системы является состояние $X = X_1$ в некоторый фиксированный момент времени. Таким образом, задача статистического моделирования сводится к оценке математического ожидания $m_x = M[X_1(t, \bar{V})]$ [1, с.142]. При стандартной схеме организации эксперимента оценка математического ожидания в серии из n опытов определяется при использовании выражения:

$$m_x^* = \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad (2)$$

где X_i – реализации искомой характеристики, n – общее число опытов.

Метод [2] предполагает замену точного решения $X_1(t, \bar{V})$ приближенным $Y(t, \bar{V})$, именуемым «главной частью». Заменой $X_1(t, \bar{V}) = Z(t, \bar{V}) + Y(t, \bar{V})$ выполняется переход от переменной $X_1(t, \bar{V})$ к $Z(t, \bar{V})$. На практике подобное преобразование редко осуществимо, в этом случае эксперимент проводят параллельно и с базовой моделью и с главной частью и для каждого опыта вычисляется $Z(t, \bar{V}) = X_1(t, \bar{V}) - Y(t, \bar{V})$, где $Y(t, \bar{V})$ характеризуется пониженным $n_{\text{треб}}^*$. При проведении эксперимента также оценивают m_z^* исходя из (2), искомую же оценку получают из выражения $m_x^* = m_y + m_z^*$. На каждом этапе эксперимента итеративно уточняют необходимое количество опытов при переходе в (1) от D_x^* к дисперсии D_z^* случайной величины $Z(t, \bar{V})$. Сокращение трудоемкости статистического моделирования определяется исключительно удачным выбором $Y(t, \bar{V})$, что обуславливает существенное уменьшение D_z^* по сравнению с D_x^* .

Ввиду отмеченной особенности ключевое значение имеет подход к построению упрощенной модели, используемой в качестве «главной части». В настоящее время существуют несколько способов адаптивного построения упрощенной модели, один из которых является статическим – в виде аппроксимирующего полинома [3], а другой – динамическим – в форме «карты высот» [4]. Динамическое построение упрощенной модели характеризуется итеративным усложнением упрощенной модели, что требует оценки влияния процедуры обслуживания карты высот на общую трудоемкость статистического моделирования. Проведем сравнительный анализ временных характеристик обозначенных способов адаптивного построения упрощенных моделей.

В работе [3] предлагается использовать полином второй степени в качестве упрощенной модели. Количество членов k зависит от размерности вектора случайных параметров $\bar{V}$: $Y(t, \bar{V}) = C_0(t) + \sum_{j=1}^k C_j(t)V_j + \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k C_{jk+l}(t)V_j V_l$. Минимум D_z^* достигается адаптивно в процессе однократной оптимизации коэффициентов полинома во время проведения инициализации.

зационной части эксперимента. В качестве альтернативного варианта статически построенной упрощенной модели будем рассматривать полином третьей степени, имеющий вид:

$$Y(t, \bar{V}) = C_0(t) + \sum_{j=1}^k C_j(t) V_j + \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k C_{jk+l}(t) V_j V_l + \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \sum_{m=1}^k C_{jk^2+lk+m}(t) V_j V_l V_m.$$

Использование упрощенной модели, предложенной в работе [4], подразумевает как итеративное уточнение оставшегося числа опытов, так и включение новых вершин в динамически усложняющуюся карту высот. Картой высот именуется многомерная поверхность $P(x_1, x_2, \dots, x_k) = h(x_1, x_2, \dots, x_k)$, формируемая в процессе моделирования посредством аппроксимации точного решения системы $X_1(t, \bar{V})$, где $h(x_1, x_2, \dots, x_k)$ – аппроксимирующая функция, задающая форму поверхности, заданная на координатной сетке $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, соответствующей вектору случайных параметров $\bar{V}$. На инициализационном этапе эксперимента выполняется заранее заданное число опытов $n = n_0$ с точным решением $X_1(t, \bar{V})$, что составляет базовую выборку карты высот, причем $h(\bar{V}) = X_1(t, \bar{V}) + C$. Карта высот $H^0 = h(\bar{V})$, основанная на базовой выборке, используется на итеративном этапе для уточнения упрощенной модели H . Приближенное решение системы для произвольной реализации $\bar{V}$ вычисляется как усреднение «высот» двух ближайших точек H . Расстояние между двумя произвольными вершинами карты высот $A(t, \bar{V}^A)$ и $B(t, \bar{V}^B)$ определяется как $R^{AB} = \sqrt{(V_1^B - V_1^A)^2 + \dots + (V_n^B - V_n^A)^2}$. Если для некоторой точки $B(t, \bar{V}^B)$ ближайшими вершинами карты высот H^0 являются $A(t, \bar{V}^A)$ и $B(t, \bar{V}^B)$, причем $R^{AB} < R^{BB}$, тогда значение H в этой точке вычисляется по следующей формуле:

$$H^{(B)} = h(\bar{V}^B) = \frac{h(\bar{V}^A) + R^{AB} / R^{BB} \cdot h(\bar{V}^B)}{1 + R^{AB} / R^{BB}}.$$

Для краткости обозначим упрощенные модели, построенные в виде полиномов второй и третьей степени, а также в виде динамически формируемой карты высот как $L0$, $L2$ и $D0$ соответственно.

Исследование временных характеристик

Обсуждаемая ниже модель относится к системам, для которых использование полиномиальных упрощенных моделей второго и третьего порядков демонстрируют сравнительно низкую эффективность. Рассмотрим задачу статистической оценки промаха системы наведения летательного аппарата (ЛА). Актуальность сокращения трудоемкости статистического моделирования существенно возрастает с ростом требуемой точности оценки искомой характеристики, поскольку для каждого опыта требуется численное решение системы нелинейных дифференциальных уравнений. Параметрами модели являются: угол наклона траектории θ , тангаж ϑ , атаки α , скорость изменения угла тангажа ω_z и относительные линейные координаты ЛА и координаты цели (высота h и дальность x). Базовая модель представлена в виде системы нелинейных дифференциальных и алгебраических уравнений для угловых координат ЛА в вертикальной плоскости [5, 6]:

$$D = \sqrt{x^2 + h^2}, \quad \alpha = \vartheta - \theta, \quad \frac{dV_K}{dt} = -g \sin \theta + \frac{P}{m} \cos \alpha + \frac{qS}{m} (-c_x \cos \alpha - c_y \sin \alpha),$$

$$\frac{dh}{dt} = V_K \sin \theta - V_{\text{ц}} \sin \theta_{\text{ц}}, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega_z, \quad \frac{d\theta}{dt} = -\frac{g}{V_K} \cos \theta + \frac{P}{mV_K} \sin \alpha + \frac{qS}{mV_K} (-c_x \cos \alpha - c_y \sin \alpha),$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{qSb_a}{I_z} (m_z^\alpha \alpha + m_z^\delta \delta_\epsilon + m_z^\omega \omega_z), \quad \frac{dx}{dt} = V_K \cos \theta - V_{\Pi} \cos \theta_{\Pi}, \quad T_{\Pi} \frac{d\delta_\epsilon^*}{dt} + \delta_\epsilon^* = k_{\Pi} \sigma,$$

$$\sigma = -i_1 \nu - i_2 \dot{\nu} + k_{cn} (\dot{\theta} - k_n \dot{\theta}_{\Pi}), \quad \theta_{\Pi} = \arctg \frac{h}{x}, \quad \delta_\epsilon = \begin{cases} \delta_\epsilon^* & |\delta_\epsilon^*| \leq (\delta_\epsilon^*)_{\max} \\ (\delta_\epsilon^*)_{\max} \operatorname{sign} \delta_\epsilon^* & |\delta_\epsilon^*| > (\delta_\epsilon^*)_{\max} \end{cases},$$

$$\frac{d\theta_{\Pi}}{dt} = - \frac{V_{\Pi} \sin(\theta_{\Pi} - \theta_{V_{\Pi}}) - V_K \sin(\theta_{\Pi} - \theta)}{D}.$$

Здесь: m – масса ЛА; S – площадь ЛА; P – сила тяги двигателя;

V_K и V_{Π} – скорость ЛА и цели;

x_K и x_{Π} – координаты ЛА и цели;

m_z^α , m_z^δ и m_z^ω – частные производные коэффициента аэродинамического момента тангажа по α , δ_ϵ и ω_z ;

c_x , c_y – коэффициент лобового сопротивления и подъемной силы ЛА;

$q = \rho V_K^2 / 2$ – скоростной напор, ρ – плотность воздуха;

b_a – средняя аэродинамическая хорда крыльев ЛА;

I_z – момент инерции ЛА относительно поперечной оси O_{Z1} связанной системы координат;

$\theta_{V_{\Pi}}$ – угол наклона вектора скорости цели;

δ_ϵ и δ_ϵ^* – угол поворота руля высоты как с учетом, так и без учета ограничения максимальной величины;

$(\delta_B^*)_{\max}$ – максимально допустимое абсолютное значение угла поворота руля высоты;

k_{Π} , T_{Π} – коэффициент передачи и постоянная времени рулевого привода;

i_1 , i_2 – передаточные числа автопилота;

k_n и k_{cn} – параметр закона самонаведения по методу пропорциональной навигации и коэффициент самонаведения. Данные коэффициенты нелинейно зависят от значений линейных и угловых координат ЛА:

$$P = P(h, M), \quad c_x = c_x(h, M, \alpha, \delta_B), \quad c_y = c_y(h, M, \alpha, \delta_B), \\ m_z^\alpha = m_z^\alpha(h, M, \alpha, \delta_B), \quad m_z^\delta = m_z^\delta(h, M, \alpha, \delta_B), \quad m_z^\omega = m_z^\omega(h, M, \alpha, \delta_B),$$

где $M = V_K / a$ – число Маха, $a = a(h)$ – скорость звука. Справочные данные, требуемые для расчета коэффициентов приведены в работе [6].

Исследуемая модель характеризуется четырьмя случайными параметрами с нормальным законом распределения: начальным углом тангажа $\mathcal{G}_0$ (математическое ожидание -45° , СКО 0.5°), начальным расстоянием до цели x_0 (м.о. 19400 м., СКО 100 м.), начальной скоростью ЛА V_{K0} (м.о. 2000 м./с., СКО 20 м./с.), углом атаки α_0 (м.о. 0° , СКО 0.1°), а также одним случайным параметром с экспоненциальным законом распределения – моментом включения контура самонаведения t_1 ($\lambda = 1$). Базовая выборка составляет 100 опытов. Оцениваемый параметр $X_1(t, \bar{V})$ представляет собой конечный промах ЛА. В целях исследования временных характеристик различных упрощенных моделей при статистическом моде-

лировании будем рассматривать изменение требуемой точности оценки на интервале $\varepsilon_{\text{дон}} = [0.03; 0.3]$ с шагом 0.03.

При моделировании базовой системы (ЛА) с изменением точности вычислений производилось измерение требуемого времени на формирование и обслуживание упрощенной модели (T_0) и отдельно общее время расчетов по базовой модели (T_1). Графики обозначенных зависимостей представлены на рис. 1.

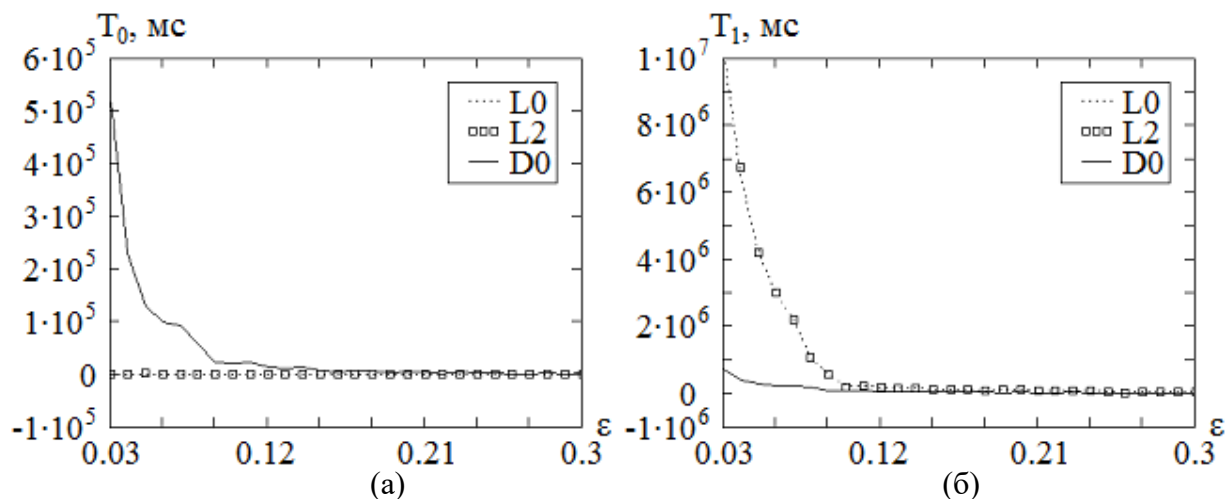


Рис. 1. Время выполнения различных этапов упрощенного статистического моделирования динамики полета ЛА: построение и обслуживание упрощенной модели (а); расчеты по основной модели (б).

Для статической и динамической процедур построения упрощенной модели ресурс времени T_0 включает различные действия. При статическом подходе упрощенная модель формируется единожды на основе базовой выборки, ввиду этого рост точности вычислений оказывает незначительное влияние на затраты данного вида вычислительных ресурсов. При динамическом подходе на каждой итерации эксперимента упрощенная модель уточняется – увеличивается количество вершин, составляющих в карту высот, – что закономерно повышает время поиска ближайших вершин при расчете приближенного решения для каждой последующей реализации $\bar{V}$. Все это обуславливает нелинейный рост T_0 для данного вида упрощенных моделей. Характеристика T_1 в свою очередь отражает общее число проведенных опытов, требуемых для достижения искомой оценки. Данный параметр может рассматриваться в качестве меры эффективности процедуры сокращения трудоемкости моделирования для различных способов построения упрощенных моделей, выраженной в единицах измерения времени. Общее время упрощенного статистического моделирования, а также результирующее число включенных в карту высот вершин представлены на рис. 2.

На рис. 3 изображена достигнутая при различной точности вычислений эффективность сокращения трудоемкости статистического моделирования K , выраженная в процентном соотношении, а также усредненные значения $L0^a$, $L2^a$ и $D0^a$ для различных видов упрощенных моделей. K определяется как отношение достигнутого в рамках каждого метода количества экспериментов к общему количеству экспериментов необходимых для моделирования, осуществляемого по стандартной схеме.

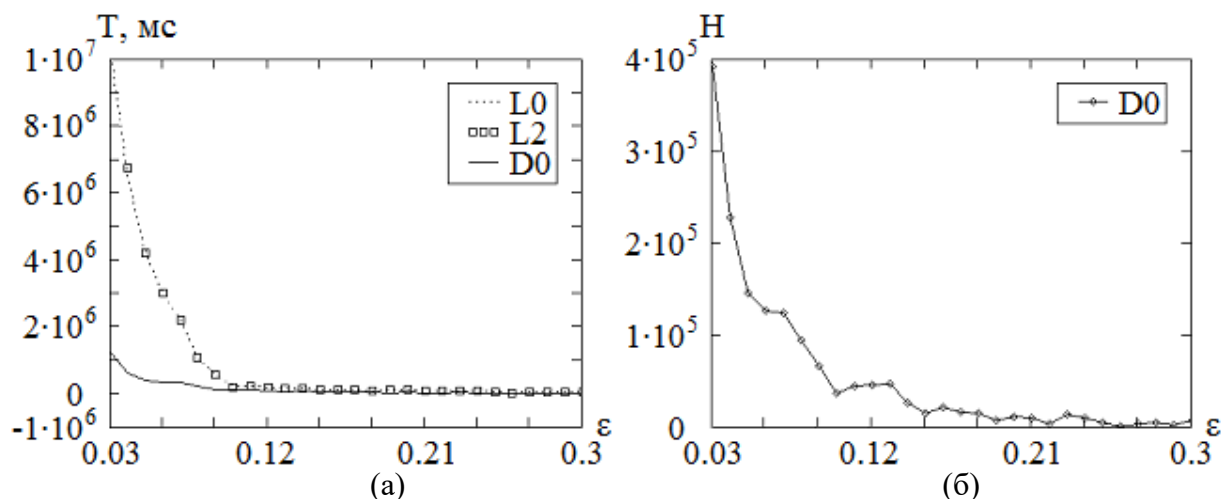


Рис. 2. Общее время упрощенного статистического моделирования динамики полета ЛА (а), а также размер карты высот на момент окончания упрощенного статистического моделирования (б).

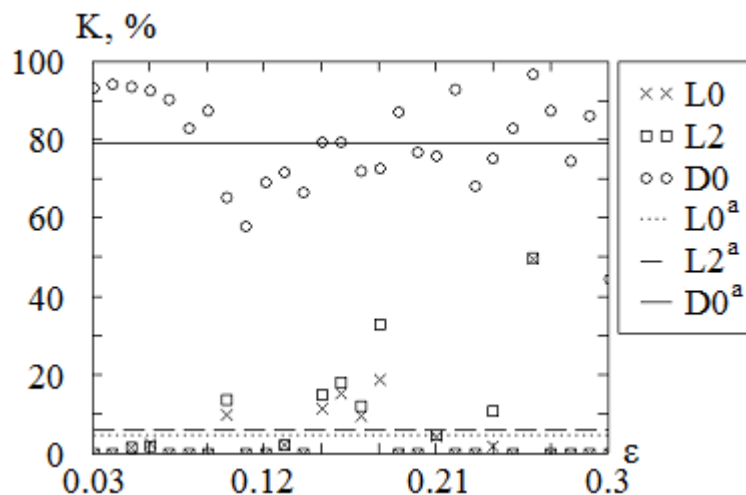


Рис. 3. Эффективность снижения трудоемкости статистического моделирования.

Представленные результаты подтверждают актуальность исследований, направленных на разработку динамических процедур построения упрощенных моделей при решении задачи сокращения трудоемкости статистического имитационного моделирования. Очевидно, что эффективность применения упрощенной модели в виде карты высот в рассмотренном случае существенно превосходит статические способы построения, основанные на полиномиальных моделях.

Список литературных источников

1. Емельянов В.Ю. Методы моделирования стохастических систем управления. С.-Пб.: БГТУ, 2004. 167 с.
2. Астапов Ю.М., Медведев В.С. Статистическая теория систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1982. 106-108 с.
3. Емельянов В.Ю., Лихолет Н.О. Адаптивный алгоритм статистического моделирования // Известия Российской академии ракетных и артиллерийских наук. №4(58). 2008. С.54-57.

4. Емельянов В.Ю., Докучаева А.Н. Способы автоматизации процедуры динамического построения упрощенной модели для эффективного решения задачи сокращения трудоемкости статистического моделирования // Системы управления и информационные технологии. №4.1(66). 2016. С.197-202.
5. Лебедев А.А., Карабанов В.А. Динамика систем управления беспилотными летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1965. 528 с.
6. Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С. Динамика полета. М.: Оборонгиз, 1962. 549 с.

TIMING CHARACTERISTICS ANALYSIS OF THE DYNAMICAL SIMPLIFIED-MODEL CONSTRUCTION APPROACH FOR STATISTICAL MODELING WITH COMPLEXITY REDUCTION

A.N. Dokuchaeva
assistant
a.n.dokuchaeva@gmail.com
Saint-Petersburg

Baltic State Technical University «VOENMEH»
named after D. F. Ustinov, Saint-Petersburg

V.U. Emelianov
Cand. Sci. (Engineering), associate professor
v.emelyanov@bk.ru
Saint-Petersburg

Baltic State Technical University «VOENMEH»
named after D. F. Ustinov, Saint-Petersburg

Abstract. There has been discussed timing characteristics comparison of the static and dynamic simplified-model construction approaches used for the complexity reduction of the statistical modeling.

Keywords: statistical modeling, complexity reduction, dynamical simplified-model construction.

References

1. Emel'ianov V.Iu. (2004) Metody` modelirovaniia stohasticheskikh sistem upravleniia [Modeling methods of stochastic control systems] S.-Pb.: BGTU, 2004. 167 p.
2. Astapov Iu.M., Medvedev V.S. (1982) Statisticheskaiia teoriia sistem avtomaticheskogo regulirovaniia i upravleniia [Statistical theory of automatic control systems and management] M.: Nauka, 1982. 106-108 p.
3. Emel'ianov V.Iu., Leeolet N.O. (2008) Adaptivny`i` algoritm statisticheskogo modelirovaniia [Adaptive algorithm of statistical modelling] Izvestiia Rossiiskoi` akademii raketnykh i artilleriiskikh nauk. №4(58), pp. 54-57.
4. Emel'ianov V.Iu., Dokuchaeva A.N. (2016) Sposoby` avtomatizatsii protsedury` dinamicheskogo postroeniia uproshchennoi` modeli dlia e`ffektivnogo resheniia zadachi sokrashcheniia trudoemkosti statisticheskogo modelirovaniia [How to dynamically build procedure automation simplified model for effectively addressing the challenges of reducing labor intensity of statistical modelling] Sistemy` upravleniia i informatcionny`e tekhnologii. №4.1(66), pp. 197-202.
5. Lebedev A.A., Karabanov V.A. (1965) Dinamika sistem upravleniia bespilotny`mi letatelny`mi apparatami [Dynamics control systems for unmanned aerial vehicles] M.: Mashinostroenie, 1965. 528 p.
6. Lebedev A.A., Chernobrovkin L.S. (1962) Dinamika poleta [Flight dynamics] M.: Oborongiz, 1962. 549 p.

УДК 311.2 | ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ КЛАСТЕРНОГО АНАЛИЗА

Чернобровкина Ирина Ивановна

к.п.н, доцент
iichernobrovkina@yandex.ru
г. Орел

доцент кафедры алгебры и математических методов в экономике Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева

Аннотация. В данной статье рассматриваются методы применения теории нейронных сетей и генетических алгоритмов к решению задачи кластерного анализа. При решении задачи предлагается использовать готовые программные средства Deductor и GeneHunter.

Ключевые слова: информационные технологии, кластерный анализ, нейронные сети, генетические алгоритмы.

Кластерный анализ – это метод, применяемый для разбиения множества исследуемых объектов на однородные (по одному или нескольким признакам) группы. Это многомерный статистический метод, который широко применяется в различных сферах жизнедеятельности. Описание этого метода можно найти в соответствующей литературе. Кроме того, достаточно много литературы, в которой описываются решения задач из различных областей (экономики, медицины, биологии и т.д.).

Трудоемкость вычислений, которые необходимо выполнять при решении таких задач, приводит к желанию использовать готовое программное обеспечение и использовать информационные технологии. Так, широко используются пакеты STATISTICA, SPSS, STATGRAPHICS. В учебном пособии [1, стр.166 - 182], например, можно найти и теоретический материал по кластерному анализу, и подробное описание действий, которые необходимо выполнить в вышеперечисленных пакетах, а также приводятся примеры использования кластерного анализа при решении задач прикладных исследований. Поскольку использование данных программных продуктов широко описано в современной литературе, остановимся более подробно на том, как решать задачи кластеризации с помощью нейронных сетей и генетических алгоритмов.

Программное обеспечение, позволяющее работать с картами Кохонена, достаточно разнообразно, например, Statistica, NeuroShell, NeuroScalp, Deductor и другие.

Покажем решение задачи кластеризации банков города Орла с показателями деятельности за 2010. Необходимо провести их кластеризацию, т.е. выделить однородные группы банков на основе шести показателей: количество банкоматов, количество рабочих, уставной капитал, собственный капитал, активы, обороты сначала года. Кластеризации подверглись 40 банков, работающих в то время на территории Орловской области: Авангард, Банк Заречье, Внешпромбанк, Восточный экспресс банк, Всероссийский банк развития регионов, ВТБ, ВТБ24, Гаспромбанк, Курскпромбанк, Ланта-Банк, Мак-Банк, МДМ Банк, Московский Индустриальный Банк, МоскомПриватБанк, МосОблБанк, Национальный Банк Траст, ОТП Банк, ПроБизнесБанк, РайффайзенБанк, РенессансКредит, РосБанк, РосЕвроБанк, Россельхозбанк, Россия, Рост Банк, Русский стандарт, Русфинанс Банк, Сбербанк, Связь-банк, Северный Морской Путь, Стройкредит, Темпбанк, Транскредитбанк, УРАЛСИБ Банк, Финанс Бизнес Банк, Форус Банк, Хоум кредит энд Финанс Банк, ЦЕРИХ, Юниаструм Банк, Юникормбанк.

После загрузки программы Deductor и импортирования в нее исходных данных необходимо задать параметры обработки карты, настройки параметров остановки обучения, параметров обучения. В программе есть возможность выбора двух вариантов кластерного анали-

за: 1) число кластеров определяется программой автоматически; 2) число кластеров задается пользователем. Для решения вышепоставленной задачи воспользуемся автоматическим определением числа кластеров. Этот шаг настройки представлен на рис. 1.

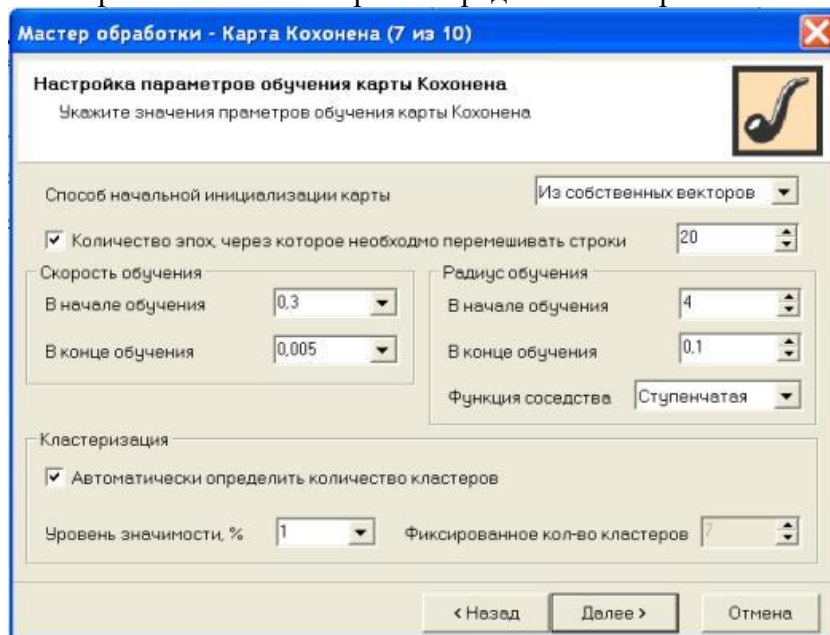


Рис.1. Настройка параметров остановки обучения

Далее кнопкой «Пуск» запускается процесс обучения сети. По окончании обучения в списке визуализаторов необходимо выбрать "Карту Кохонена" и визуализатор "Что-если". На последнем этапе – настраивается отображение карты Кохонена (см. рис. 2).

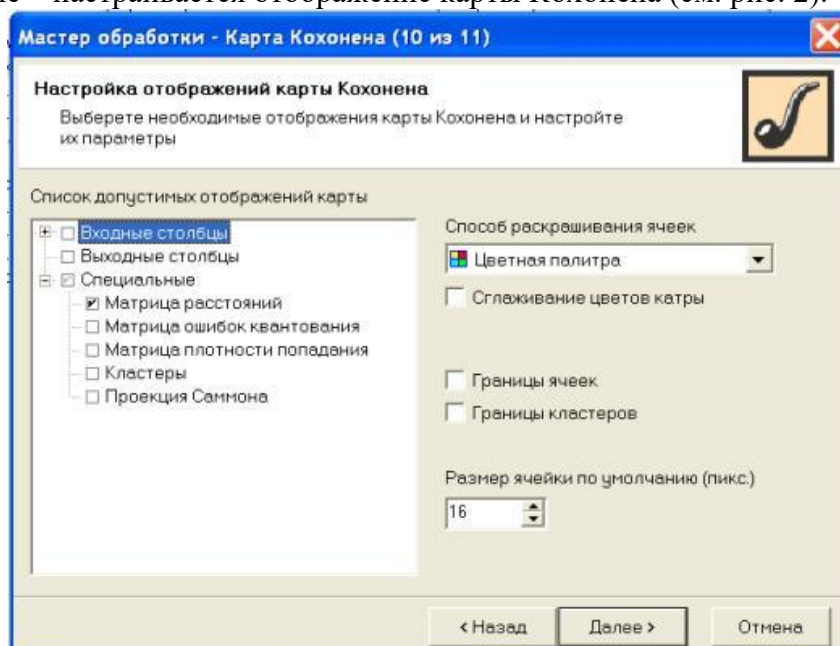


Рис. 2. Настройка отображений карты Кохонена

Результатом работы программы является 5 кластеров (рис.3).

Далее полученный результат интерпретируется и обрабатывается с учетом поставленной задачи. Например, кластеры можно проранжировать в соответствии со следующей шкалой: 1. Очень низкое значение показателей; 2. Ниже среднего; 3. Среднее значение показателей; 4. Выше среднего; 5. Очень высокое значение показателей.

Экономическая интерпретация полученных результатов может быть, например, следующая: по карте кластера (а также по выводимой ниже информации) можно сделать вывод о количестве банков, попавших в тот или иной кластер.

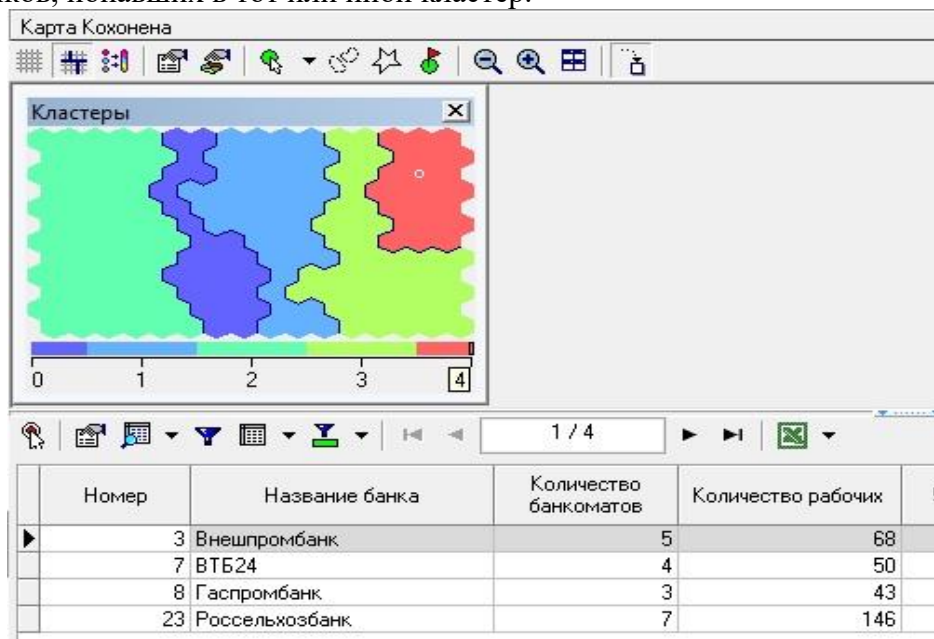


Рис. 3. Карта кластеров

Рассмотрим задачу решения кластерного анализа с помощью другой информационной технологии: генетического алгоритма. Генетические алгоритмы, наравне с нейронными сетями, в настоящее время широко входят в учебные планы многих направлений обучения [2]. Воспользуемся самой удобной, на наш взгляд, на сегодняшний день программой GeneHunter. Эта программа удобна тем, что не требует какого-либо импортирования данных, а работает прямо с Excel. Ее интерфейс очень похож на «Поиск решения» в программе Excel. Поэтому обычно не вызывает проблем с приобретением навыков работы в программе. Подробно о работе программы можно узнать в источнике [3].

Пусть необходимо разбить данные на три кластера. Изначально исходные данные желательно пронормировать. Задача кластеризации будет звучать следующим образом: минимизация суммы расстояний между центрами трех кластеров и всеми данными путем подбора координат центров кластеров.

Алгоритм решения задачи следующий:

1. Составить таблицу с данными (заранее пронормированными), например, по двум свойствам (таблица 1).

Таблица 1. Фрагмент исходных данных

	А	В
7	Свойство 1	Свойство 2
8	0,85	0,44
9	0,18	0,21
10	0,24	0,12
11	0,93	0,60
12	0,75	0,54
13	0,66	0,72
14	0,03	0,39

2. Зарезервировать для центров кластеров ячейки (таблица 2).

Таблица 2. Координаты центров кластеров

	N	O	
	Хромосомы (координаты центров кластеров)		
	Свойство 1	Свойство 2	
4	0,816	0,678	Центр первого кластера
5	0,467	0,165	Центр второго кластера
6	0,173	0,725	Центр третьего кластера

Изначально значения в ячейках можно положить случайным образом. Пусть для определенности центр кластера 1 имеет координаты (N4, O4), центр кластера 2: (N5, O5), центр кластера 3: (N6, O6).

3. Составить таблицу расстояний от центров кластеров, применив при этом формулы: $\text{КОРЕНЬ}((\$A8-\$N\$4)^2+(\$B8-\$O\$4)^2)$ – расстояние от первого наблюдения (A8; B8) до центра первого кластера (N4, O4), $\text{КОРЕНЬ}((\$A8-\$N\$5)^2+(\$B8-\$O\$5)^2)$ – расстояние от первого наблюдения (A8; B8) до центра второго кластера (N5, O5), $\text{КОРЕНЬ}((\$A8-\$N\$6)^2+(\$B8-\$O\$6)^2)$ – расстояние от первого наблюдения (A8; B8) до центра третьего кластера (N6, O6). Процедуру повторить для всех наблюдений. При этом постепенно заполнится таблица 3.

Таблица 3. Расстояние от центров кластеров

Класс 1	Класс 2	Класс 3
0,24	0,47	0,73
0,79	0,29	0,52
0,80	0,23	0,61
0,14	0,63	0,77
0,15	0,47	0,61
0,16	0,58	0,48
0,84	0,50	0,37

4. Составить таблицу минимальных найденных расстояний для каждого свойства и согласно результатам присвоить наблюдениям принадлежность кластеру (таблица 4). Целевая функция – сумма минимальных расстояний. Запустив программу – получим результат кластерного анализа.

Таблица 4. Фрагмент результата кластерного анализа

	Мин. расстояние	Присвоенные классы		
		Класс 1	Класс 2	Класс 3
6				
7				
8	0,24	1	0	0
9	0,29	0	1	0
10	0,23	0	1	0
11	0,14	1	0	0
12	0,15	1	0	0
13	0,16	1	0	0
14	0,37	0	0	1

В результате хочется отметить, что кластерный анализ проведенный с помощью генетического алгоритма, более «правильный», чем с помощью нейронной сети.

Список литературных источников

1. Берестнева О.Г., Марухина О.В., Шевелев Г.Е. Прикладная математическая статистика: учебное пособие. Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012. 188 с.
2. Чернобровкина И.И. К вопросу о необходимости изучения дисциплин искусственного интеллекта на различных специальностях в вузах // Вестник международных конференций. №2. Т. 2. 2014. С.23-26.
3. Neuroproject / Каталог программ [Электронный ресурс]. URL: <http://www.neuroproject.ru/bghunt1.htm> (дата обращения: 06.04.2016)

APPLICATION OF METHODS OF INFORMATION TECHNOLOGY FOR SOLVING PROBLEMS OF CLUSTER ANALYSIS

I.I. Chernobrovkina Cand. Sci. (Pedagogy), associate professor iichernobrovkina@yandex.ru Orel	Orel State University
--	-----------------------

Abstract. This article discusses methods of applying the theory of neural networks and genetic algorithms to solving the problem of cluster analysis. While solving a problem it is proposed to use a ready software: Deductor and GeneHunter.

Keywords: information technology, cluster analysis, neural networks, genetic algorithms

References

1. Berestneva O.G., Maruhina O.V., Shevelev G.E. (2012) Prikladnaia matematicheskaia statistika: uchebnoe posobie [Applied mathematical statistics: tutorial] Tomsk: Izd-vo Tomskogo politekhnicheskogo universiteta, 2012. 188 p.
2. Chernobrovkina I.I. (2014) K voprosu o neobhodimosti izucheniia distciplin iskusstvennogo intellekta na razlichny`kh spetsial`nostiakh v vuzakh [The need to study artificial intelligence disciplines in various specialties in universities] Vestneyk mezhdunarodny`kh konferentsii`. №2. Т. 2, pp. 23-26.
3. Neuroproject / Katalog programm [Electronic resource] [Neuroproject/catalog]. URL: <http://www.neuroproject.ru/bghunt1.htm> (Accessed: 06.04.2016)

УДК 517.9 | **ИССЛЕДОВАНИЕ TS-МОДЕЛИ МАЯТНИКОВОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ ЧИСЛЕННОГО АЛГОРИТМА ЛОУСОНА****Иголина Елена Викторовна**к.ф.-м.н., доцент
elenaigonina7@mail.ru
г. Елецдоцент кафедры математического
моделирования и компьютерных
технологий Елецкого государственного
университета им. И.А. Бунина

Аннотация. В статье изложены теоретические аспекты моделирования и анализа устойчивости управляемых маятниковых систем с логическим регулятором на примере модели обратного маятника. С помощью подхода, базирующегося на применении логических регуляторов и на аппроксимации исходной модели управляемой системы моделью Такаги–Суджено (TS-моделью), построена TS-модель обратного маятника. Применение редукции к числу правил позволило модифицировать синтезированную модель. Для изучения устойчивости TS-модели обратного маятника разработан логический регулятор на основе метода параллельной распределенной компенсации. Указанный метод заключается в том, что каждое правило регулятора строится из соответствующего правила TS-модели. Образующийся общий логический регулятор, являющийся нелинейным, представляет собой сочетание отдельных линейных регуляторов. При этом логический регулятор использует те же нечеткие множества, что и модель в исходных частях, и в расчет берется только локальная эффективность каждого правила. Для TS-модели обратного маятника определена функция Ляпунова, получены условия асимптотической устойчивости в виде набора линейных матричных неравенств. Дано обоснование и описание численного алгоритма Лоусона, используемого в работе при создании комплекса программ для изучения динамики моделей управляемых маятниковых систем. Перечислены основные модули программы и их функции. Приведены результаты численного анализа модифицированной TS-модели обратного маятника. В вычислительной среде Matlab построены графики, демонстрирующие эффективность применения синтезированного логического регулятора при достаточно больших углах отклонения маятника.

Ключевые слова: управляемая система, устойчивость, перевернутый маятник, TS-модель, численный алгоритм Лоусона.

Создание адекватных математических моделей и развитие конструктивных методов анализа устойчивости являются важными проблемами математического моделирования маятниковых систем. Актуальность изучения моделей указанных систем определяется тем, что они могут быть использованы при исследовании моделей механических, физических и технических систем, в частности, моделей динамики транспортных средств с гироскопическими устройствами, моделей робототехники и биомеханики. В процессе разработки моделей, в которых управляемые маятники являются важной составной частью, оценка устойчивости и условия стабилизации являются важными этапами. Методы исследования моделей маятниковых систем развивались в работах многих отечественных и зарубежных исследователей (например, работы Ф.Л. Черноусько, С.А. Решмина, А.М. Формальского, Р. Дорфа и Р. Бишопа) [1]. Наряду с классическими методами необходимо разрабатывать альтернативные методы, поскольку использование традиционных методов для моделирования управляемых маятниковых систем в ряде случаев связано с недостаточно полной информацией о поведении системы или сопряжено с большим объемом вычислительных операций.

Одним из эффективных подходов к изучению нелинейных управляемых систем является подход, базирующийся на применении логических регуляторов и на аппроксимации исходной модели соответствующей моделью Такаги–Суджено (TS-моделью). В [2] дано описа-

ние метода построения TS-модели и получен ряд ключевых условий устойчивости. Общей идеей большинства исследований по устойчивости TS-моделей является использование метода функций Ляпунова и сведение решения вопроса об устойчивости к анализу свойств линейных матричных неравенств, к которым применимы методы численного решения.

Важным этапом при изучении моделей динамических систем является компьютерное моделирование. При компьютерном моделировании управляемых маятниковых систем возникает ряд трудностей, связанных с наличием квазилинейных дифференциальных уравнений. Известные численные методы (метод Рунге–Кутты, метод Адамса и др.) не позволяют выполнить для указанных моделей адекватные численные эксперименты. Это обусловлено ограниченной областью устойчивости решений, полученных традиционными численными методами, и разнотемповостью протекания процессов в управляемых системах. Поэтому возникает необходимость в модификации известных или использовании специальных алгоритмов, позволяющих выполнить адекватные численные эксперименты при изучении динамики и решении задач стабилизации моделей маятниковых систем, описываемых системами дифференциальных уравнений.

В настоящей работе показана эффективность применения численного алгоритма Лоусона решения систем линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений для изучения моделей управляемых маятниковых систем с логическими регуляторами. Указанный алгоритм позволил реализовать альтернативный подход к изучению моделей маятниковых систем.

Модель Такаги–Суджено обратного маятника задается двумя правилами вида:

П₁: если $x_1(t)$ приблизительно равно 0, то $\dot{x}(t) = A_1x(t) + B_1u(t)$,

П₂: если $x_1(t)$ приблизительно равно $\pm \pi/2$ ($|x_1| < \pi/2$), то

$$\dot{x}(t) = A_2x(t) + B_2u(t), \quad (1)$$

где $x = (x_1 \ x_2)^T$ – вектор состояния, включающий в себя соответственно угол отклонения маятника от вертикали и угловую скорость, u – управляющее воздействие, приложенное к тележке, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ – гравитационная постоянная, m – масса маятника, M – масса тележки, $2l$ – длина маятника, $a = 1/(m + M)$, $\beta = \cos 88^\circ$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{4l/3 - aml} & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2g}{\pi(4l/3 - aml\beta^2)} & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ a\beta \end{bmatrix}.$$

Отметим, что в [2] дано подробное описание построения модели (1), включающей редукцию числа правил. Логический регулятор, построенный с помощью метода параллельной распределенной компенсации [2], представляет собой сочетание отдельных линейных регуляторов, определяемых правилами вида:

П₁: если $x_1(t)$ приближенно равно 0, то $u(t) = -F_1x(t)$.

П₂: если $x_1(t)$ приближенно равно $\pm \pi/2$ ($|x_1| < \pi/2$), то $u(t) = -F_2x(t)$,

где F_1 и F_2 – матрицы коэффициентов усиления. Общий логический регулятор задается в виде $u(t) = -h_1(x_1(t))F_1x(t) - h_2(x_1(t))F_2x(t)$, где h_1 и h_2 – функции, определяющие принадлежность угла отклонения правилам П₁ и П₂ соответственно, причем $h_1 + h_2 = 1$.

Для нахождения решений дифференциальных уравнений, описывающих TS-модель обратного маятника (1), использован численный алгоритм Лоусона [3], заключающийся в преобразовании исходной системы дифференциальных уравнений в систему дифференциальных уравнений относительно новой неизвестной функции с помощью специальной замены, после чего полученная система может быть решена традиционными

методами численного интегрирования. Используемый в настоящей работе алгоритм, представленный в виде расширения для Matlab, решает ее методом Рунге–Кутты, при этом одновременно с решением производится обратное преобразование от новой введенной функции к исходной функции.

Верификация синтезированной модели (1) выполнена в компьютерной среде Matlab с помощью программы, состоящей из следующих модулей: модуль для ввода данных, модуль для вывода результатов и для графической иллюстрации результатов, модуль основной программы, объединяющей работу двух правил модели (1), а также двумя подпрограммами: `right.m` – вычисляет значение функции в правой части (1), `rightj.m` – вычисляет матрицу Якоби правой части (1). Коэффициенты усиления матриц F_1 и F_2 найдены с учетом условий устойчивости модели (1), изложенных в работе [2]. Значения функций принадлежности h_1 и h_2 определены с помощью редактора функций принадлежности Membership Function Editor пакета Fuzzy Logic Toolbox среды Matlab.

Результаты численного моделирования системы управления обратным маятником при значениях параметров $m = 2$ кг, $M = 8$ кг, $2l = 1$ м и конкретных начальных условиях представлены на рис. 1 и 2.

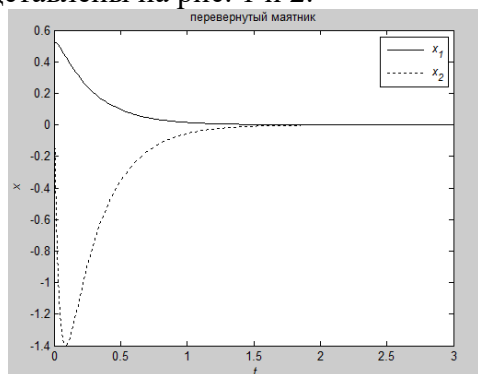


Рис. 1. Процесс стабилизации перевернутого маятника при $x(0) = (\pi/6 \ 0)^T$

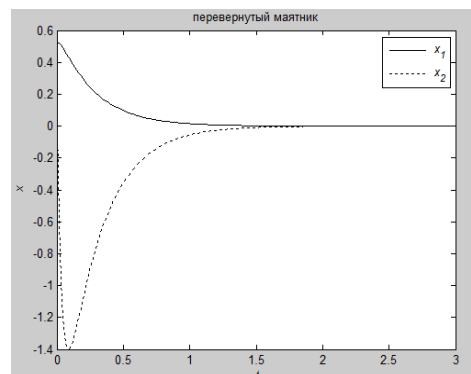


Рис. 2. Процесс стабилизации перевернутого маятника при $x(0) = (\pi/3 \ 0)^T$

Модельные расчеты показали, что для каждого начального условия существуют положительно определенные матрицы F_1 и F_2 , при которых для модели (1) обратного маятника можно построить стабилизирующий логический регулятор.

Список литературных источников

1. Игонина Е.В. Исследование устойчивости и компьютерное моделирование маятниковой системы управления // Школа-семинар молодых ученых «Фундаментальные проблемы системной безопасности». Елец. 2014. С.93-99.
2. Дружинина О.В., Игонина Е.В., Масина О.Н. Моделирование и стабилизация динамических систем с логическими регуляторами // Сообщение по прикладной математике. М.: ВЦ РАН. 2015. С.68.
3. Douglas Lawson J. (1967) Generalized Runge–Kutta processes for stable systems with large Lipschitz con-stants // SIAM J. Numer. Anal. V. 4. № 3. P. 372–380.

**RESEARCH TS-MODEL OF PENDULAR SYSTEM
BY MEANS OF THE NUMERICAL ALGORITHM OF LAWSON**

Igonina Elena Viktorovna

c. v.-m. n., senior teacher

elenaigonina7@mail.ru

Yelets

Bunin Yelets State University

Summary. In article theoretical aspects of modeling and the analysis of stability of the operated pendular systems with the logical regulator on the example of model of the inverted pendulum are stated. On the basis of the approach which is based on use of logical regulators and on approximation of initial model of the operated system TS-model the TS-model of inverted pendulum is constructed. Application of a reduction to number of rules has allowed to modify the synthesized model. The logical regulator by means of a method of the parallel distributed compensation is developed for studying of stability of TS-model of the inverted pendulum. The specified method is that each rule of the regulator is under construction of the corresponding rule of TS-model. The formed general logical regulator which is nonlinear represents a combination of separate linear regulators. At the same time the logical regulator uses the same indistinct sets, as model in initial parts, and only local efficiency of each rule is taken into account. For TS-model of the inverted pendulum Lyapunov's function is defined, conditions of asymptotic stability in the form of a set of linear matrix inequalities are received. Justification and the description of a numerical algorithm of Lawson used in work during creation of a complex of programs for studying of dynamics of models of the operated pendular systems is given. The main modules of the program and their function are listed. Results of the numerical analysis of the modified TS model of the inverted pendulum are given. In the computing Matlab environment the schedules showing efficiency of use of the synthesized logical regulator at rather big corners of a deviation of a pendulum are constructed.

Keywords: operated system, stability, inverted pendulum, TS-model, numerical algorithm of Lawson.

References

1. Igonina E.V. (2014) Issledovanie ustoi`chivosti i komp`iuternoe modelirovanie maiatneykovoi` sistemy` upravleniia [Study on the stability of circular and computer simulation of the control system] "Shkola-seminar molody`kh ucheny`kh «Fundamental`ny`e problemy` sistemnoi` bezopasnosti»" ["School-seminar of young scientists "fundamental problems of system safety»"], pp.93-99.
2. Druzhinina O.V., Igonina E.V., Masina O.N. (2015) Modelirovanie i stabilizatsiia dinamicheskikh sistem s logicheskimi reguliatorami [Modeling and dynamic stabilization systems with logical regulators] Soobshchenie po prikladnoi` matematike. M.: VTC RAN, pp. 68.
3. Douglas Lawson J. (1967) Generalized Runge–Kutta processes for stable systems with large Lipshitz con-stants // SIAM J. Numer. Anal. V. 4. № 3. P. 372–380.

УДК
517.9**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВАРИАЦИОННЫХ
ИТЕРАЦИЙ К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ****Абдурашидов Акмалжон Аблакулович**
ассистент
abdira@mail.ru
г. Самаркандассистент Самаркандского
государственного
архитектурно-строительного
института (Узбекистан)

Аннотация. Интегро-дифференциальные уравнения нашли успешное применение во многих приложениях физики, механики, химии, биологии. Существуют многочисленные методы, посвященные решению интегро-дифференциальных уравнений, такие как метод многочленов Чебышева, гибридные функции Лежандра, метод многочленов Тейлора, метод дифференциального преобразования, метод вариационных итераций (МВИ), метод многочленов Бесселя, метод Тейлора, метод разложения Адомиана, численные методы и др. [1-2]. Анализ научных работ, опубликованных зарубежными учеными [1-2], показывает, что метод вариационных итераций и его модификации успешно применены ко многим приложениям прикладных наук. В 1997 году был разработан новый и эффективный метод решения нелинейных моделей, так называемый метод вариационных итераций, ученым J.H. He [1], который был успешно применен ко многим нелинейным проблемам. Этот метод не требует дискретизации переменных, вычисления ошибки округления, не требует малых параметров, которые необходимы для некоторых других методов. Целью данной работы является применение МВИ к решению линейных и нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра и Фредгольма, а также подтверждение надежности данного метода в обработке научных проблем. В этой работе МВИ использован к приближенному решению типичных линейных и нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра и Фредгольма разного порядка и разного типа. Результаты этого метода сходятся быстрее к точному решению для некоторых нелинейных проблем.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, метод вариационных итераций, начальное приближение, приближенное решение.

Постановка задачи. Требуется решить следующее нелинейное интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра и Фредгольма соответственно

$$y^{(m)}(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)F(y(t))dt, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \dots, \quad y^{(m-1)}(0) = y_0^{(m-1)}, \quad (1)$$

$$y^{(m)}(x) = f(x) + \int_0^1 K(x,t)F(y(t))dt, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0, \dots, \quad y^{(m-1)}(0) = y_0^{(m-1)} \quad (2)$$

методом вариационных итераций, где $y^{(m)}(x) = \frac{d^m y(x)}{dx^m}$; $y(x)$ – искомая функция; $f(x)$, $F(y(x))$ – известные функции; $K(x,t)$ – ядро интегрального уравнения (1) и (2) [2].

Алгоритм метода вариационных итераций. Итерационная формула для приближенного решения уравнения (1) и (2) методом вариационных итераций имеет вид [2]

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda(s) \left(y_n^{(m)}(s) - f(s) - \int_0^s K(s,r)F(y_n(r))dr \right) ds, \quad (3)$$

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda(s) \left(y_n^{(m)}(s) - f(s) - \int_0^1 K(s,r) F(y_n(r)) dr \right) ds, \quad (4)$$

где λ – множитель Лагранжа находим в следующем порядке:

$$y'(s) + f(y(s), y'(s)) = 0, \lambda = -1; \quad y''(s) + f(y(s), y'(s), y''(s)) = 0, \lambda = s-x;$$

$$y'''(s) + f(y(s), y'(s), y''(s), y'''(s)) = 0, \lambda = -\frac{1}{2!}(s-x)^2; \dots;$$

$$y^{(m)}(s) + f(y(s), y'(s), y''(s), \dots, y^{(m)}(s)) = 0, \lambda = (-1)^m \frac{(s-x)^{m-1}}{(m-1)!}.$$

Начальное приближение выбираем так $y_0(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{x^2}{2!}y''(0) + \dots + \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}y^{(m-1)}(0)$.

Точное решение уравнение (1) находим так $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$.

Приложение. Ниже рассмотрены несколько примеров, посвященных решению проблемы (1) и (2) методом вариационных итераций.

Пример 1. Требуется решить следующее линейное интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра [2]:

$$y'(x) = x - 1 - \int_0^x (x-t)y(t)dt, \quad y(0) = 1.$$

Используя формулу (3), запишем следующую итерационную формулу:

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \int_0^x \left(y_n'(s) - s + 1 + \int_0^s (s-r)y_n(r)dr \right) ds. \quad (5)$$

Начальное приближение $y_0 = y(0) = 1$. Дальнейшие приближения вычисляем по (5):

$$y_1(x) = y_0(x) - \int_0^x \left(y_0'(s) - s + 1 + \int_0^s (s-r)y_0(r)dr \right) ds = 1 - \int_0^x \left(-s + 1 + \int_0^s (s-r)dr \right) ds = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!};$$

$$y_2(x) = y_1(x) - \int_0^x \left(y_1'(s) - s + 1 + \int_0^s (s-r)y_1(r)dr \right) ds = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!}; \dots;$$

$$y_n(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}. \text{ Точное решение } y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = e^{-x}.$$

Пример 2. Требуется решить следующее линейное интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра:

$$y'(x) = -\frac{11}{4} - \frac{3}{2}x - \frac{1}{12}x^4 + e^x(5-2x) - \frac{1}{4}e^{2x} + \int_0^x (x-t)y^2(t)dt, \quad y(0) = 1.$$

Используя формулу (3) запишем следующую итерационную формулу:

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \int_0^x \left(y_n'(s) + \frac{11}{4} + \frac{3}{2}s + \frac{1}{12}s^4 - e^s(5-2s) + \frac{1}{4}e^{2s} - \int_0^s (s-r)y_n^2(r)dr \right) ds. \quad (6)$$

Начальное приближение $y_0 = y(0) = 1$. Дальнейшие приближения вычисляем по (6):

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= y_0(x) - \int_0^x \left(y_0'(s) + \frac{11}{4} + \frac{3}{2}s + \frac{1}{12}s^4 - e^s(5-2s) + \frac{1}{4}e^{2s} - \int_0^s (s-r)y_0^2(r)dr \right) ds = \\
&= 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{40}x^5 - \frac{13}{720}x^6 - \frac{23}{5040}x^7 - \frac{41}{40320}x^8 + \dots; \\
y_2(x) &= y_1(x) - \int_0^x \left(y_1'(s) + \frac{11}{4} + \frac{3}{2}s + \frac{1}{12}s^4 - e^s(5-2s) + \frac{1}{4}e^{2s} - \int_0^s (s-r)y_1^2(r)dr \right) ds = \\
&= 1 + 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6 - \frac{1}{720}x^7 - \frac{11}{4480}x^8 + \dots; \dots; \\
y_n(x) &= x + \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{6!}x^6 + \dots \right) = x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = x + e^x.
\end{aligned}$$

Пример 3. Требуется решить следующее линейное интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра [2]:

$$y''(x) = 1 + xe^x - \int_0^x e^{x-t} y(t) dt, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Используя формулу (3) запишем следующую итерационную формулу:

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x (s-x) \left(y_n''(s) - 1 - se^s + \int_0^s e^{s-r} y_n(r) dr \right) ds. \quad (7)$$

Начальное приближение $y_0 = y(0) + xy'(0) = x$. Дальнейшие приближения вычисляем по (7):

$$\begin{aligned}
y_1(x) &= y_0(x) + \int_0^x (s-x) \left(y_0''(s) - 1 - se^s + \int_0^s e^{s-r} y_0(r) dr \right) ds = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots; \\
y_2(x) &= y_1(x) + \int_0^x (s-x) \left(y_1''(s) - 1 - se^s + \int_0^s e^{s-r} y_1(r) dr \right) ds = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots; \dots; \\
y_n(x) &= x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \right) - 1.
\end{aligned}$$

Точное решение заданное уравнение имеет вид $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = e^x - 1$.

Пример 4. Требуется решить следующее линейное интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма [2]:

$$y''(x) = e^x - x + \int_0^1 xty(t)dt, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Используя формулу (4) запишем следующую итерационную формулу:

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x (s-x) \left(y_n''(s) - e^s + s - \int_0^1 sry_n(r)dr \right) ds. \quad (8)$$

Начальное приближение $y_0(x) = 1 + x$. Дальнейшие приближения вычисляем по (8):

$$y_1(x) = e^x - \frac{x^3}{36}; \quad y_2(x) = e^x - \frac{x^3}{1080}; \quad y_3(x) = e^x - \frac{x^3}{32400}; \dots; \quad y_{10}(x) = e^x - \frac{x^3}{708588000000000}.$$

Отсюда имеем точное решение $y(x) = e^x$.

Пример 5. Требуется решить следующее линейное интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма [2]:

$$y''(x) = -\cos x - \frac{3\pi}{128}x + \frac{1}{64} \int_0^1 xy^2(t)dt, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

Используя формулу (4) запишем следующую итерационную формулу:

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x (s-x) \left(y_n''(s) + \cos s + \frac{3\pi}{128}s - \frac{1}{64} \int_0^1 sy_n^2(r)dr \right) ds. \quad (9)$$

Начальное приближение $y_0(x) = 2$. Дальнейшие приближения вычисляем по (9):

$$y_1(x) = 1 + \cos x + 0,0204531x^3; \quad y_2(x) = 1 + \cos x + 0,0011884x^3; \quad y_3(x) = 1 + \cos x + 0,00004333x^3; \dots$$

Отсюда имеем точное решение $y(x) = 1 + \cos x$.

Пример 6. Требуется решить следующее линейное интегро-дифференциальное уравнение [2]:

$$y^{(V)}(x) = y'(x) + \int_{-1}^1 y(t)dt, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0, \quad y'''(0) = -1, \quad y^{(IV)}(0) = 0.$$

Используя формулу (4) запишем следующую итерационную формулу:

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - \frac{1}{24} \int_0^x (s-x)^4 \left(y_n^{(V)}(s) - y'(s) - \int_{-1}^1 y_n(r)dr \right) ds. \quad (10)$$

Начальное приближение $y_0(x) = x - x^3/6$, а для дальнейшие приближения имеем

$$y_1(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}; \quad y_2(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \dots; \dots; \quad y_n(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

Отсюда имеем точное решение $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \sin x$.

Выводы. МВИ успешно применен к решению линейных и нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра и Фредгольма. Результаты расчетов проверены с помощью математического пакета Maple. Метод полезен для линейных и нелинейных уравнений. Этот метод очень силен и эффективен для нахождения точных и приближенных решений для широких классов проблемы. МВИ очень точен и прост, не требует утомительных алгебраических вычислений, облегчает вычислительную работу и дает быстрое решение.

Список литературных источников

1. He. J.H. (2007) Variational iteration method-Some recent results and new interpretations, Journal of Computational and Applied Mathematics, 207, 3-17.
2. Wazwaz A.M. (2011) Linear and Nonlinear Integral Equations: Method and Applications. Chicago: Saint Xavier University, 658 p.

APPLICATION THE VARIATIONAL ITERATION METHOD FOR THE APPROXIMATE SOLUTION OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION

Abdurashidov Akmaljon Ablakulovich
assistant
abdira@mail.ru
Samarkand

assistant SamSIAC, Samarkand (Uzbekistan)

Abstract. The integro-differential equations found successful application in many applications of applied sciences, as in science and technology, physics, mechanics, chemistry, biology [1-2]. There are numerous methods devoted to the solution of the integro-differential equations such as method of polynoms of Chebyshev, hybrid functions of Legendre, a method of polynoms of Taylor, a method of differential conversion, a variational iterations method, a method of polynoms of Bessel, Taylor's method, Adomian decomposition method, numerical method, etc. [1-2]. The analysis of scientific operations, published a row by foreign scientists [1-2] show that the variational iterations method and its modification are successfully applied to many applications of applied sciences. In 1997 new idle time, the best and effective method of the solution of non-linear models, a so-called variational iterations method was developed by scientific J.H. He [1] which it was successfully applied to many non-linear problems. This method doesn't require sampling variables, there is no computation of a rounding-off error, doesn't require small parameters which are necessary for some methods. The purpose of this operation is to apply a method of variational iterations to the solution of the linear and non-linear integro-differential equations of Voltaire and Fredholm, and also to confirm reliability of this method in processing of scientific problems. In this operation the variational iterations method is used to approximate solution typical the linear and non-linear integro-differential Voltaire and Fredholm equations of a different order and different type. Results of this method meets quicker to the exact decision for some non-linear problems. Variational iterations method very effective and idle time.

Keywords: integro-differential equations, variational iterations method, initial approach, approximate solution.

References

1. He. J.H. (2007) Variational iteration method-Some recent results and new interpretations, Journal of Computational and Applied Mathematics, 207, 3-17.
2. Wazwaz A.M. (2011) Linear and Nonlinear Integral Equations: Method and Applications. Chicago: Saint Xavier University, 658 p.

Максимов Дмитрий Игоревич

ассистент
timonrpm@mail.ru
г. Елец

ассистент кафедры прикладной
математики и информатики
Елецкого государственного
университета им. И.А. Бунина

Аннотация. В статье представлен шаблон для написания PHP-расширения, рассмотрена последовательность компиляции и подключения расширения. Приведен пример экспортируемой функции.

Ключевые слова: php-расширения; программирование; Zend Engine.

Препроцессор PHP в наше время является одним из самых популярных языков программирования динамических web-сайтов и его функционала хватает для реализации большого количества задач разработки. Однако одним из его минусов является интерпретируемость, т.е. исходный код программы не преобразовывается в машинный код, а исполняется с помощью программы-интерпретатора Zend Engine, что сказывается на производительности. Сам же PHP, а точнее его интерпретатор написан на компилируемом языке C. Дистрибутив PHP содержит набор расширений. Например, для работы с базой данных можно использовать расширение `mysqli`. Информацию о PHP и об установленных расширениях можно просмотреть с помощью команды `phpinfo()`.

При разработке web-приложений может возникнуть необходимость повышения производительности, например, при обращении к базам данных. Или необходимо использовать внешние библиотеки. Для реализации данных задач возможностей языка PHP уже не хватает. В этом случае разработчики имеют возможность писать собственные PHP-функции и классы, используя язык C/C++.

Разработка на языке C/C++ предоставляет следующие преимущества:

- увеличение скорости работы;
- сокращение сложности PHP-кода.

Но имеет и недостатки:

- увеличение цикла разработки;
- снижение надежности приложения;
- сокращение возможности сопровождения.

В связи с этим, не имеет смысла весь PHP-код переписывать на C.

Для написания расширения интерпретатор Zend Engine предоставляет большое количество структур, функций и макросов. При разработке используется некоторый шаблон (Листинг 1).

В данном листинге представлен текст основного заголовочного файла PHP-расширения (`myextension.h`). Здесь определены две директивы `PHP_EXTNAME` и `PHP_EXTVERSION`, которые являются именем разрабатываемого расширения и его версией. Также подключается конфигурационный файл `config.h` и файл среды `php.h`. В конце листинга объявляется внешняя переменная точки входа модуля и указатель на нее. В расширении при помощи макроса `PHP_FUNCTION` объявлены две экспортируемые функции `myFunction` и `myFunction2`. Их количество может быть любое, но объявлять необходимо только те функции, которые непосредственно будут вызываться из PHP.

```

#ifndef MYEXTENSION_H
#define MYEXTENSION_H

#define PHP_EXTNAME "MyExtension"
#define PHP_EXTVERSION "1.0"

#ifdef HAVE_CONFIG_H
    #include "config.h"
#endif

#include "php.h"

PHP_FUNCTION(myFunction);
PHP_FUNCTION(myFunction2);
//...

extern zend_module_entry myextension_module_entry;
#define phpext_myextension_ptr &myextension_module_entry;

#endif

```

Листинг 1. Шаблон заголовочного файла расширения.

При разработке конкретного расширения указывается собственное имя файла, обычно совпадающее с названием расширения, а все вхождения «myextension» заменяются на конкретное название. В этом файле также могут быть добавлены подключения дополнительных файлов и указаны необходимые объявления.

Рассмотрим файл реализации данного шаблона:

```

#include "myextension.h"

static zend_function_entry myextension_functions[] = {
    PHP_FE(myFunction, NULL)
    PHP_FE(myFunction2, NULL)
    //...
    PHP_FE_END
};

zend_module_entry myextension_module_entry = {
    PHP_EXTNAME,
    myextension_functions,
    NULL,
    NULL,
    NULL,
    NULL,
    NULL,
    PHP_EXTVERSION,
    STANDARD_MODULE_PROPERTIES
};

#ifdef COMPILE_DL_MYEXTENSION
    ZEND_GET_MODULE(myextension)
#endif

PHP_FUNCTION(myFunction) {

```

```
//реализация функции
}

PHP_FUNCTION(myFunction2) {
    //реализация функции2
}

/*
...
*/
```

Листинг 2. Шаблон файла реализации расширения.

В данном листинге представлен текст основного файла реализации PHP-расширения (myextension.c). Здесь определен массив функций модуля `myextension_functions`, в котором указаны при помощи макросов `PHP_FE` добавляемые функции. Второй параметр макроса определяет способ передачи параметров функции. Значение `NULL` определяет, что параметры функции будут передаваться по значению.

Далее реализована точка входа модуля `myextension_module_entry`. Она представляет собой специальную структуру Zend Engine. В шаблоне указаны не все значения этой структуры, а только название расширения `PHP_EXTNAME`, массив функций расширения `myextension_functions`, версия расширения `PHP_EXTVERSION` и указано, что модуль обладает стандартными свойствами `STANDARD_MODULE_PROPERTIES`. Неуказанные параметры отвечают за инициализацию модуля, его запуск и остановку, а также за информацию о модуле [1].

Макрос `ZEND_GET_MODULE` производит связывание модуля с интерпретатором.

В конце файла при помощи макросов `PHP_FUNCTION` созданы шаблоны функций. Функции реализуются на языке C.

Рассмотрим пример функции с параметрами и возвращаемым значением. Реализуем функцию приближенного нахождения числа π с использованием ряда Лейбница:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots$$

Параметром функции будет количество членов ряда.

На C/C++ функция будет иметь следующий вид:

```
double sequencePi(long count)
{
    double result = 0;
    long i;
    for(i = 0; i < count; i++)
    {
        if(i % 2 == 0)
            result += 1.0 / (2 * i + 1);
        else
            result -= 1.0 / (2 * i + 1);
    }
    return 4 * result;
}
```

Листинг 3. Функция на C/C++.

Если алгоритм вычисления на C/C++ уже написан, то при реализации функции в расширении есть два пути: либо вставить имеющийся код в расширение и вызвать его из функции расширения, либо преобразовать его в формат функции Zend Engine. Рассмотрим оба подхода.

В заголовочном файле `myextension.h` объявляем функцию:

```
PHP_FUNCTION(sequencePiZE);
```

В файле реализации `myextension.c` в списке `myextension_functions[]` указываем функцию:

```
static zend_function_entry myextension_functions[] = {
    PHP_FE(sequencePiZE, NULL)
    PHP_FE_END
};
```

При использовании первого подхода вставляем код листинга 3 в файл реализации `myextension.c` перед описанием функции и вызываем его:

```
//код листинга 3

PHP_FUNCTION(sequencePiZE) {
    int argc = ZEND_NUM_ARGS();
    long count;
    if (zend_parse_parameters(argc TSRMLS_CC, "l", &count) == FAILURE)
    {
        RETURN_FALSE;
    }
    RETURN_DOUBLE(sequencePi(count));
}
```

Листинг 4. Функция PHP-расширения (вариант 1).

Для разбора параметров используется специальная функция `zend_parse_parameters`. Первый ее параметр – это количество передаваемых параметров, которое можно получить при помощи специального макроса `ZEND_NUM_ARGS()`. Второй параметр содержит спецификаторы типов получаемых параметров. В примере этот параметр имеет значение `"l"`, указывающее на то, что принимается одно значение типа `long`. У каждого типа данных свой спецификатор [2]. Для получения нескольких значений в данном параметре спецификаторы указываются подряд. Остальные параметры являются указателями на переменные, в которые передаются значения.

Данная функция возвращает одно из двух значений: `SUCCESS` – если параметры приняты без ошибок и `FAILURE` в противном случае.

Функция возвращает значение с помощью макроса `RETURN_DOUBLE()`, указывающего, что передается значение типа `double`. Для других типов также предусмотрены свои макросы [2].

Отличие второго подхода будет заключаться в том, что в экспортируемую функцию будет добавлен код вычислений, вместо использования функции листинга 3:

```
PHP_FUNCTION(sequencePiZE) {
    int argc = ZEND_NUM_ARGS();
    long count;
    double result = 0;
    long i;
    if (zend_parse_parameters(argc TSRMLS_CC, "l", &count) == FAILURE)
    {
        RETURN_FALSE;
    }
    for(i = 0; i < count; i++)
    {
        if(i % 2 == 0)
            result += 1.0 / (2 * i + 1);
        else
            result -= 1.0 / (2 * i + 1);
    }
    RETURN_DOUBLE(4 * result);
}
```

Листинг 5. Функция PHP-расширения (вариант 2).

Для компиляции расширения в *nix системах также потребуется создать конфигурационный файл config.m4:

```
PHP_ARG_ENABLE(MyExtension, whether to enable MyExtension support,
[ --enable-myextension Enable MyExtension support])

if test "$PHP_MYEXTENSION" = "yes"; then
    AC_DEFINE(HAVE_MYEXTENSION, 1, [Whether you have MyExtension])
    PHP_NEW_EXTENSION(MyExtension, myextension.c, $ext_shared)
fi
```

*Листинг 6. Шаблон файла конфигурации для *nix систем.*

Для сборки расширения используется консоль, в которой необходимо выполнить следующие команды:

```
phpize
./configure --enable-myextension
make
```

Первая команда обрабатывает файл config.m4 и создает из него конфигурационный сценарий. Вторая – конфигурирует расширение. Третья команда компилирует в файл myextension.so.

Полученное расширение следует загрузить путем добавления в файл php.ini следующей директивы:

```
extension=myextension.so
```

Если загружать расширение во время выполнения PHP-сценария, то в него необходимо добавить код:

```
dl("myextension.so");
```

В этом случае после завершения запроса расширение будет выгружено из памяти.

Стандартные средства компиляции в системах семейства Windows не предусмотрены. Сборка расширения производится с использованием некоторой системы программирования, обычно, Visual Studio, в которой необходимо создать и настроить проект динамической библиотеки (dll) на C/C++, а также скачать скомпилированные исходные и bin-файлы PHP.

В результате сборки получим dll-файл, представляющий собой расширение. Подключить его можно также либо в файле `php.ini`, либо при помощи функции `dlopen`.

После загрузки расширения можно его использовать в PHP-сценариях:

```
echo sequencePiZE(100);      //Вывод: 3.1315929035586
```

Список литературных источников

1. Zend Developer Zone [Электронный ресурс]. URL: <https://devzone.zend.com/> (дата обращения: 13.09.2017)
2. Александр Пирамидин. Учебник PHP [Электронный ресурс]. URL: <https://phpclub.ru/manrus> (дата обращения: 13.09.2017)

INTRODUCTION TO THE DEVELOPMENT OF PHP-EXTENSIONS

Maximov Dmitry Igorevich
assistant
timonpm@mail.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

Abstract. The article presents a template for writing a PHP extension, considers the sequence of compilation and connection of the extension. An example of exported function is given.

Keywords: php-extensions; programming; Zend Engine.

References

1. Zend Developer Zone [Electronic resource]. URL: <https://devzone.zend.com/> (Accessed: 13.09.2017)
2. Alexander Pyramidin, Uchebnik PHP [Electronic resource] [Book PHP]. URL: <https://phpclub.ru/manrus> (Accessed: 13.09.2017)

УДК
004.7

ВАРИАНТЫ ПОСТРОЕНИЯ АРХИТЕКТУРЫ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ИНФОРМАЦИОННОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Тарова Анастасия Дмитриевна
магистрант
tarova@bk.ru
г.Елец

магистрант института математики,
естествознания и техники
Елецкого государственного
университета им. И.А. Бунина

Аннотация. Статья посвящена рассмотрению вариантов построения структурно распределенной информационной системы, трактуемой автором как специализированная информационно-вычислительная система, включающая персональные компьютеры, вспомогательные и центральные серверы и позволяющая решать различные задачи, различающиеся по стоимости и эффективности. Приведен перечень современных требований, предъявляемых к распределенной информационной системе, а также указаны факторы, которые должны учитываться при ее построении. Авторами выделены варианты распределенной информационной образовательной системы с централизованной и децентрализованной структурой, указаны преимущества и недостатки как одной, так и другой. Предложены варианты построения распределенной информационной образовательной системы, направленной на обеспечение ее отказоустойчивости и высокой производительности. Реализация вышеуказанных вариантов предполагается автором на основе децентрализованной архитектуры, при которой фрагменты информационной базы данных распределены по узлам сети.

Ключевые слова: информационная база данных, распределенная информационная образовательная система.

Структурно распределенная информационная образовательная система (РИОС) представляет собой специализированную информационно-вычислительную систему, включающую персональные компьютеры (одиночные удаленные пользователи), локальные вычислительные сети (группы обучающихся), вспомогательные (дочерние) и центральные серверы. Для создания РИОС, как распределенной системы, существует значительное количество возможных путей и средств. Они, позволяя решать различные задачи, различаются по стоимости и эффективности [1], [2].

Распределенная структурная организация РИОС дает возможность размещения учебной информации по узлам (серверам) сети. Основная цель такого распределения – увеличение пропускной способности (производительности) системы и снижение средних задержек получения информации для конечных пользователей – обучающихся.

Анализ возможных архитектурных решений позволяет разработать пути совершенствования архитектуры РИОС, а также оптимальный способ организации информационно-вычислительного процесса по управлению ресурсами и информационными потоками для систем данного класса.

В процессе проектирования архитектуры РИОС можно выделить несколько общих вариантов ее построения.

РИОС с централизованной архитектурой (с одним центральным узлом). Вся информация хранится на центральном сервере, который обрабатывает запросы всех пользователей.

РИОС с децентрализованной (распределенной) архитектурой. Например, с одним центральным узлом (центральным сервером) и несколькими вспомогательными узлами (дочерними серверами), к которым подключаются пользователи (абоненты). Вся информация хранится на центральном сервере, который обрабатывает запросы как напрямую от клиентов,

так и от дочерних серверов, которые несут на себе часть его нагрузки. Запросы от дочерних серверов возникают в случае, если на них нет запрошенной пользователем информации.

Одним из основных преимуществ распределенной архитектуры, из которого, по сути, следуют и остальные преимущества, является возможность обработки данных там, где они больше всего необходимы. Иначе говоря, данные и управляющие функции системы распределены географически таким образом, что это распределение отражает саму информационную структуру системы.

Такой подход позволяет, как правило, более эффективно использовать имеющиеся в наличии информационные ресурсы, и работать с объемами информации, потенциально во много раз большими, чем это могла бы позволить система с централизованной архитектурой [3].

Однако, при всех своих преимуществах, распределенные системы распространены не так широко, как можно было бы ожидать. Как это ни парадоксально, но самой большой трудностью в работе с распределенной системой является именно ее распределенность. Вот далеко не полный перечень современных требований, предъявляемых к распределенной информационной системе:

- работать на разных аппаратно-программных платформах;
- использовать различные типы СУБД, в зависимости от конкретных локальных потребностей;
- иметь возможность работать с широким спектром системного и прикладного программного обеспечения;
- работать независимо от различных сетевых протоколов и коммуникаций;
- оставаться прозрачной для пользователя, то есть не показывать эту свою разнородность.

Пользователь должен полагать, что система не распределена, т.е. должен не чувствовать «распределенности».

Перечислим факторы, которые должны учитываться при построении распределенной информационной вычислительной системы:

- наличие автоматизированных процессов, которые обеспечивают быстрый отклик и лучший сервис для конечного пользователя;
- возможность динамического (автоматического) изменения распределения информации в системе;
- автоматизация повторяющихся управленческих задач (например, управление пользователями или характеристиками системы);
- автоматизированные диагностика, контроль и предложения по устранению неисправностей;
- способность дистанционно управлять выполняющимися приложениями.

Архитектуру РИОС, как распределенной системы, рассмотрим в двух вариантах: РИОС с распределением ресурсов между узлами обработки и РИОС с сосредоточенными ресурсами. В первом случае производится распределение программ обработки и информационной базы данных (ИБД) и жесткое закрепление фрагментов ИБД по серверам (узлам обработки). Соответственно запросы пользователей к «своим» фрагментам ИБД разделяются по серверам (рис. 1). Тип заявки пользователя определяет, какой именно сервер РИОС (из центральных и дочерних) будет задействован.

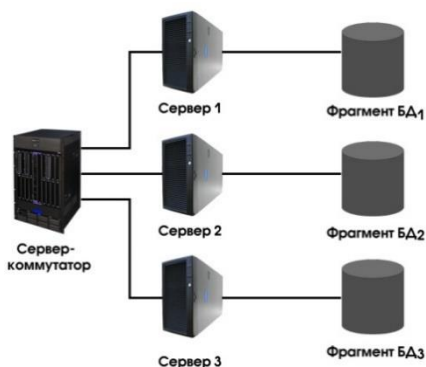


Рис.1. РиОС с разделением ресурсов.

Во втором случае (рис. 2) все фрагменты ИБД находятся на одном из узлов (например, на центральном сервере - сервере баз данных). Прикладные программы для их обработки находятся в узлах обработки (сервер 1 - сервер 3). Каждый из узлов может обработать любую заявку.

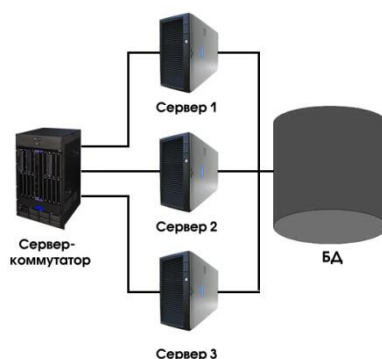


Рис.2. РиОС с сосредоточенными ресурсами.

Рассмотрим процесс функционирования РиОС на базе выделенных архитектур. Пусть РиОС состоит из нескольких узлов, причем один из узлов выполняет функции коммутатора. Распределенная ИБД состоит из нескольких массивов информации, а их обработку осуществляют несколько пользовательских прикладных программ. Кроме этого, выделим два вида заявок, передаваемых по сети: «*запрос пользователя*», при котором пользовательское приложение производит обращение к фрагменту ИБД и «*запрос администратора*», при котором осуществляется корректировка ИБД и передача служебной информации, необходимой для организации взаимодействия узлов РиОС. Наличие узла-коммутатора определяет единую точку входа всех заявок, он осуществляет их фильтрацию и распределение между узлами РиОС. Важно отметить, что заявки, поступающие от пользователей, могут отличаться от заявок, выдаваемых программами при обращении к ИБД как по объему, так и по содержанию.

Повышения производительности в обоих вариантах можно достичь совмещением телекоммуникационных работ, например, узел обработки, к которому подключен пользователь (группа пользователей) будет выполнять функции узла-коммутатора.

Кроме того, распределять фрагменты ИБД и программы их обработки можно оптимально, с учетом текущих требований пользователей, территориального расположения узлов, системных затрат на обработку и т.п. Если предположить, что требования абонентов на обслуживание изменяются раз за Тц (цикл функционирования), тогда архитектура РиОС в процессе своего функционирования постоянно изменяется. Образно можно представить, что для каждой группы пользователей (динамически формируемой в каждом цикле) создается «своя» временная РиОС по варианту с одним узлом обработки, в которой узлом-

коммутатором является узел, к которому она подключена (заметим, что необходимый фрагмент ИБД и требуемая прикладная программа могут находиться в узле, к которому прикреплен пользователь).

Таким образом, в каждый момент времени одновременно функционирует конечное множество временных РИОС. Их число определяется в общем плане текущими параметрами распределенной информационной образовательной системы, а в частности количеством узлов (используемых в системе серверов).

Такая сеть изображена на рис. 3. В этом случае для рабочих станций пользователей 1-3 РИОС будет выглядеть так, как представлено на рис. 3 а) обеспечение отказоустойчивости или б) обеспечение производительности.

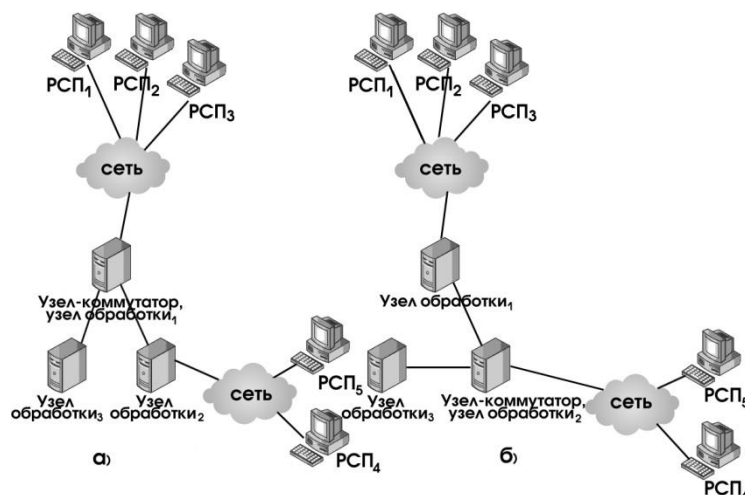


Рис.3. Временные РИОС групп пользователей.

С нашей точки зрения, наиболее оптимальный вариант с децентрализованной архитектурой, при котором фрагменты ИБД распределены по узлам (дочерним серверам). При обеспечиваемой средней задержке доступа около 20-30сек. становится возможным поднять производительность системы в несколько раз по сравнению с системой с централизованной архитектурой. В силу слабой загруженности центрального сервера, рекомендуется смешанный вариант обслуживания: несколько классов, подключенных к системным дочерним серверам, несколько классов, непосредственно связанных с центральным сервером, и до 10 удаленных индивидуальных пользователей со связью через сеть.

Список литературных источников

1. Бертсекас Д., Галлагер Р. Сети передачи данных. М.: Мир, 1989. 544 с.
2. Кульгин М. Технологии корпоративных сетей. СПб.: Питер, 1999.
3. Попков В.К. Моделирование информационных сетей. Новосибирск, 1994.

**VARIANTS OF BUILDING ARCHITECTURE OF
A DISTRIBUTED INFORMATION EDUCATIONAL SYSTEM**

Tarova Anastasia Dmitrievna
undergraduate
tarova@bk.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

Summary. The article is devoted to the consideration of options for constructing a structurally distributed information system, interpreted by the author as a specialized information and computing system, which includes personal computers, auxiliary and central servers and allows to solve various tasks that differ in cost and efficiency. A list of modern requirements for a distributed information system is given, as well as factors that must be taken into account when constructing it. The authors singled out variants of the distributed information educational system with a centralized and decentralized structure, the advantages and disadvantages of both one and the other are indicated. The options for constructing a distributed information educational system are proposed, both aimed at ensuring its fault tolerance, and ensuring high productivity. The implementation of the above options is assumed by the author on the basis of a decentralized architecture in which fragments of the information database are distributed among the nodes of the network.

Key words: information database, distributed information educational system.

References

1. Bertsekas D., Gallager R. (1989) Seti peredachi danny`kh [Data transmission network] M.: Mir, 1989. 544 p.
2. Kul`gin M. (1999) Tekhnologii korporativny`kh setei` [Technology enterprise networks] SPb.: Peter, 1999.
3. V.K. Popkov (1994) Modelirovanie informatcionny`kh setei` [Modeling of information networks] Novosibirsk, 1994.

НОВШЕСТВА ФГОС И ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ

УДК
372.851

СОЦИОКУЛЬТУРНО-ОРИЕНТИРОВАННОЕ ОБУЧЕНИЕ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ: ФОРМИРОВАНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ

Подаева Наталия Георгиевна
д.п.н., профессор
podaeva@mail.ru
г. Елец

заведующий кафедрой прикладной
математики и информатики
Елецкого государственного
университета им. И.А. Бунина

Аннотация. Статья посвящена одной из методических проблем обучения математике в школе – проблеме формирования научных понятий на уроках геометрии. Приводится анализ связей освоения геометрических понятий в ситуации учения-обучения и непосредственно связанного с ним процесса развития геометрического знания. С позиций психологии, формальной логики и методики обучения математике раскрывается содержание ключевых категорий, характеризующих процесс освоения геометрических понятий в ситуации учения-обучения: уровень представлений, понятийный уровень усвоения знаний, математический объект, математическое понятие, геометрические объекты, геометрические понятия, теоретические объекты, эмпирические идеальные объекты. Выделяются способы мысленного воспроизведения геометрических объектов, лежащие в плоскости содержания понятия, и способы описания геометрических объектов, лежащие в плоскости знаковой формы. В качестве единиц целостного мыслительного процесса, вслед за Г.П. Щедровицким, предлагается рассматривать целостные операции, которые включают в себя реальные операции (объективно-содержательные) и формальные операции. При этом реальные операции рассматриваются как познавательные, начинающиеся непосредственно с объекта, представляющие собой действия с объектом и способные выделять в объекте некоторое содержание. Формальные операции представляются как начинающиеся с готовых знаний, с языковых выражений, фиксирующих «связь знаний», позволяющих переходить от одного свойства объекта к другому, но не связанные с усмотрением нового содержания в объекте, то есть как операции, играющие роль познавательных, не являясь таковыми. Соотнесение выделенных целостных единицы мышления с изложением геометрического доказательства позволяет каждую целостную операцию рассматривать как «спивающую» четыре вида действий: 1) «движения» по чертежу (реальные операции; плоскость содержания); 2) от чертежа к формальным отношениям; 3) в плоскости знаковой формы (формальные операции); 4) интерпретация полученного результата на чертеже. Выделяются компоненты целостной психической структуры, обеспечивающей в ситуации учения-обучения геометрии формирование способов действия по освоению геометрических понятий: «Представление (образ–перцепт) – предпонятие (образ–концепт) – понятие». Схематично этапы развития данной структуры представляются в виде четырех блоков, соответствующих уровням усвоения понятия.

Ключевые слова: уровень представлений; понятийный уровень усвоения знаний; геометрические объекты; геометрические понятия; теоретические объекты; эмпирические идеальные объекты.

Актуализируя проблему исследования, отметим, что философия образования всегда отражает состояние науки, а на современном этапе развития научного знания (начиная со второй половины XX в.) наблюдается становление так называемого постнеклассического детерминизма, для которого характерно нелинейное мировоззрение, связанное с открытием явлений детерминированного хаоса – неопределенности, непредсказуемости, самоорганизации, критичности развития и фрактальности, в результате чего сложилась постнеклассическая общенаучная парадигма. Другими словами, мир оказался сложнее, чем это казалось еще совсем недавно. Он имеет сложную онтологическую структуру, этот нелинейный, динамический, онтологически множественный мир с бесчисленными обратными связями, развивается по сложным законам и непредсказуемость будущего – атрибут процесса его познания. Меняются представления о детерминизме – идее определенности. Современная наука демонстрирует парадокс: чем больше усложняется методология исследования, тем больше растет уровень неопределенности в точных предсказаниях будущего поведения различных систем.

В этой связи в настоящем исследовании предлагаются новые аспекты рассмотрения проблемы обучения математике в школе. Первый аспект методологически опирается на естественнонаучно-ориентированное сознание и технократические тенденции. Как уже говорилось, речь идет о научно-методологической проблеме перехода от классического лапласовского детерминизма к так называемому постдетерминизму, или вероятностному детерминизму. В качестве эпиграфа хотелось бы привести знаменитое высказывание Эйнштейна: «Бог не играет с миром в кости!»¹.

Актуализируя эту проблему в контексте методики обучения математике, хотелось бы обратиться к высказыванию психолога Д.А. Леонтьева, который отмечал, что еще примерно десять лет назад в мире было немало мест, где события развивались предсказуемо (детерминировано, с необходимостью), и можно было жить с твердой уверенностью в будущем. Сегодня таких мест нет вообще, и стало ясно, что всякая стабильность относительна, абсолютна лишь неопределенность. Надежды на внешнюю точку опоры больше не существует. Такую точку опоры, основу существования, следует искать в самом себе и самому вносить хоть какую-то определенность в глобальную неопределенность мира. По мнению М. Мамардашвили, такую точку опоры представляет собой кристаллизованная структура личности, способная превратить человека в устойчивую, самодостаточную единицу, способную связать причину со следствием, понимать эту связь. В контексте предлагаемого исследования такой точкой опоры служат понятийные психические структуры личности школьника.

¹ Имеется в виду, что, по мнению Эйнштейна, во Вселенной нет ничего случайного. До открытия квантовой механики идеи жесткой детерминации и случайности мирно уживались. Считалось, что случайность носит гносеологический характер – это лишь результат незнания человеком всех причинных факторов, результат ограниченности человеческого разума. Развитие квантовой механики привело к онтологизации случайности – признанию случайности в самой реальности, а не только в сознании. Такое изменение взглядов на природу случайности не отвергает детерминизм. Детерминизм лишь ослабляется, принимая форму вероятностного детерминизма. Событие имеет множество причин и множество следствий, оказываясь включенным в сеть причинно-следственных отношений. Следствие вытекает из причины уже только не с необходимостью, а с некоторой вероятностью. Вероятность – это степень необходимости, способная принимать непрерывный спектр значений от нуля (невозможность) до единицы (необходимость).

Другой аспект рассмотрения задачи обучения математике – социокультурный, связан с необходимостью сближения, диалога двух культур. Проблема решается уже на другом методологическом основании, предполагающем отход от технократических тенденций и естественнонаучно-ориентированного сознания. В традиционных исследованиях по методике обучения математике преимущественно речь идет о трансляции знаний, формировании умений, в то время как культура предполагает самореализацию личности в этом знании, социализацию личности: важен онтологический контекст рассмотрения – не просто распредмечивание продуктов культурного опыта, а бытийствование в этой культуре.

Начнем с того, что в психодидактике традиционно выделяют два уровня усвоения знаний:

- *уровень представлений*: признаки объекта (понятия) присутствуют ограниченно, недифференцированно, не выделяются связи между ними;
- *понятийный уровень*: ключевые моменты – знание некоторого набора признаков понятия, а также системность – усвоение каждого понятия предполагается в системе с другими понятиями.

Кроме того, в формальной логике различают:

- *математический объект* – выделение количественных и пространственных отношений из предметов и явлений окружающего мира и абстрагирование от всех других;
- *математическое понятие* – возникающая при изучении соответствующего математического объекта система суждений.

Исходя из этого, будем различать: **геометрические объекты** – это точки, линии, фигуры, поверхности, тела и др., их элементы и отношения; **геометрические понятия** – имеющиеся у субъекта-обучаемого понятия о геометрических объектах, фиксирующие процесс мысленного их воспроизведения. Причем этот процесс как правило не совпадает с последовательностью введения его в теории². Безусловно, суть обучения геометрии в овладении школьниками геометрическими понятиями, что оказывается вне процесса историографического изучения геометрии как теории.

Рассматривая проблему освоения геометрических понятий в ситуации учения-обучения, напомним, что, предмет геометрии составляют *теоретические объекты* – «логические реконструкции действительности». Они существуют лишь в знаках и символах. Им приписываются такие свойства, которыми реальные объекты не обладают. Например, прямая линия, плоскость, парабола обладают свойством неограниченной протяженности и др. Следует дифференцировать *эмпирические идеальные объекты*, являющиеся схематизациями реального мира (например, пространственно-временной континуум в физике).

Под *геометрическими объектами* в широком смысле понимаются топологические многообразия – конкретные геометрические линии, фигуры, их элементы, а также бинарные отношения (равенства, параллельности и др.), тернарные отношения (композиция движений, скалярное произведение векторов и др.).

Как отмечал Г.П. Щедровицкий, под «треугольником как геометрическим объектом» следует понимать целостность линий, углов, их возможных отношений и связей, а также систем отношений и связей. Именно эта целостность или единство самих отношений и относящихся предметов (вещей) является геометрическим объектом «треугольник». И тогда иметь понятие о треугольнике – значит быть способным восстановить эту целостность во всей полноте [10, с. 175].

² Примером служит понятие *движения* в геометрии, которое возникло как формализация движения твердых тел в механике. В геометрии движение – это преобразование пространства (биективное отображение пространства на себя), сохраняющее расстояние между точками.

В свою очередь, элементы треугольника также фиксируют некоторые отношения или связи и являются геометрическими объектами. Если считать отрезки и углы объектами некоторого уровня, то треугольник будет являться объектом следующего уровня, а отношение треугольников объектом еще более высокого уровня. Таким образом, при реконструкции мыслительного процесса, как отмечает Г.П. Щедровицкий, мы приходим к «матрёшечному» устройству геометрического понятия. А именно, понятие о геометрических объектах как бы содержит в себе понятие о его элементах, которые также являются геометрическими объектами, и т.д. до некоторых простейших отношений. Иными словами, *в геометрическом понятии отражены в свернутом виде все «уровни» развития знания*. Что касается аксиоматического метода изложения геометрии, то оно разворачивается ортогонально восходящим линиям познания, отражает развитые формы геометрических понятий, фиксирует связи геометрических фактов и родовитые отношения объектов [10, с. 175].

Различают *описание геометрического объекта* (норму геометрического понятия) – определение, свойства, признаки, и понятие о геометрическом объекте или *геометрическое понятие*, имеющееся у субъекта [10, с. 37].

Как отмечают психологи, способы мысленного воспроизведения геометрических объектов лежат в *плоскости содержания понятия*, а описания геометрических объектов – в *плоскости знаковой формы*. Тогда геометрические понятия как средства мысленного воспроизведения объектов объединяют эти плоскости. При таком подходе к пониманию геометрического понятия специфика понятийного мышления может быть определена следующим образом: оно разворачивается в образных структурах, при этом механизмом разворачивания являются логические операции [10, с. 37].

Как отмечалось Г.П. Щедровицким, предметные действие, лежащее в основе изучения геометрии, – «измерение», основанное, в свою очередь, на действии «наложения». Поскольку «наложение» не может быть проделано непосредственно с чертежами; то оно не интериоризируется во внутренний план, в том смысле, что теряет свою результативность. «Возникает разрыв между способом существования объектов и деятельностью, которая может решить возникшую задачу» [10, с. 135]. Этот разрыв «может быть преодолен за счет появления новой деятельности, «подходящей к способу существования объектов». Возникает необходимость строить «обходной путь» с целью установления возможности «наложения» фигур, то есть вводить другую деятельность, замещающую «наложение». Такой деятельностью может быть только необъектная деятельность со знаками. В этом, – считает Г.П. Щедровицкий, – «заложено основание перехода от объектов к моделям-чертежам». Это, собственно, и приводит, по его мнению, к развитию геометрии как самостоятельной теории (там же, с. 135).

В качестве единиц целостного мыслительного процесса Г.П. Щедровицкий предлагает рассматривать *целостные операции*, которые включают в себя *реальные операции* (объективно-содержательные) и *формальные операции* [10, с. 164]. Реальные операции, являющиеся познавательными, начинаются непосредственно с объекта, представляют собой действия с объектом и могут выделять в объекте некоторое содержание. Формальные операции начинаются с готовых знаний, с языковых выражений, фиксирующих «связь знаний», позволяющих переходить от одного свойства объекта к другому, но не связаны с усмотрением нового содержания в объекте, то есть играют роль познавательных, не являясь таковыми.

Если соотнести выделенные *целостные единицы мышления* с изложением геометрического доказательства, то каждая целостная операция как бы «сшивает» четыре вида действий: 1) «движения» по чертежу (реальные операции; плоскость содержания); 2) от чертежа к формальным отношениям; 3) в плоскости знаковой формы (формальные операции); 4) интерпретация полученного результата на чертеже.

Как отмечают психологи, геометрическое понятие – это знаково-символическая система. Компоненты этой системы: 1) идеальные свойства и признаки объектов; 2) материально-

предметные модели (знаковая натурализация геометрического объекта в реальном мире – чертежи, макеты); 3) знаково-символьные системы; 4) предметные, формальные и реальные действия и операции, позволяющие создавать образ-перцепт, образ-концепт, оперировать образом, включать его в отношения, получать новые объекты. Образы действий с чертежами интериоризируются в *образы геометрических объектов*, обеспечивающих отнесенность всех видов знаков к единому целостному объекту.

В этом смысле в основе геометрического понятия лежит **предпонятие** – образ-понятие или образ-концепт. Оно находится в простом и непосредственном отношении к объекту и не включенный в систему вышестоящего понятия. Термин «предпонятие», по словам Л.С. Выготского [1], был широко распространен еще в 30-е годы в педологии. Предпонятие рассматривается как основная психическая структура младшего школьного возраста (6-11 лет). Развитие предпонятия связано с активизацией образного мышления, с так называемой *«знаковой натурализацией геометрического понятия»* [9], предполагающей *«предметные действия с вещами»*, однако освоение понятий не сводится к перцепту, чувственному восприятию, действию, эмпирическому обобщению. Предпонятие только лишь «готовит» само понятие, освоение которого обеспечивает вербально-логическое мышление.

Что касается структуры *деятельностной компоненты геометрических понятий*, то Г.П. Щедровицкий в качестве единиц геометрического мышления выделял **целостные операции**, включающие *познавательные и формальные операции*. Этим, по его мнению, обеспечивается единство *плоскости содержания понятия* (или плоскости геометрического объекта) и *плоскости знаковой формы* [1010].

Результатом выполнения целостных операций, фиксирующихся в сознании в виде образов, являются новые знания и связи знаний. Такие образы отражают сам процесс получения знания, фиксируют объект, содержательные и формальные операции, связи знаний.

На высоком уровне развития геометрического мышления целостные операции оказываются свернутыми и в процессе мышления представлены образами, позволяющими при необходимости «развернуть» необходимую операцию, восстановить процесс получения соответствующего знания [10, с. 51].

В результате анализа психологических исследований были выделены компоненты целостной психической структуры, обеспечивающей в ситуации учения-обучения геометрии формирование способов действия по освоению геометрических понятий: «Представление (образ-перцепт) – предпонятие (образ-концепт) – понятие». Схематично этапы развития данной структуры были представлены в виде четырех блоков, соответствующих уровням усвоения понятия. Содержание этапов определяется содержанием *деятельностной компоненты геометрических понятий*, включающей *предметные действия и целостные операции*.

Первый блок: представление (образ-перцепт). Предполагается освоение *предметных действий с вещами* – вычерчивание, конструирование, деформация и др., обеспечиваемое *предметно-практическим* способом кодирования информации, требующим опоры на обыденные представления обучающихся.

Такой тип действия закрепляет восприятие чертежа. Имеет место «натурализация знания»: все материализуется, сводится к вещам, что негативно сказывается на теоретическом освоении геометрии. Как отмечает А.А. Устиловская, «<... > любая материализация идеального объекта уже не идеальный объект, а вещь <... > Поскольку геометрические объекты – не вещи, то материальные действия в отношении них невозможны» [9].

Будем исходить из того, что, как известно, освоение геометрических понятий предполагает владение способами интерпретации идеальных объектов в реальном физическом пространстве (с помощью предметных действий, «знаковой натурализации»). С другой стороны, необходимо понимание ограничений физических тел (вещей) в интерпретации идеальных объектов. Специфика геометрии определяется внутренним диалектическим противоречием

(А.Д. Александров): предмет геометрии составляют идеальные объекты, которые интерпретируются в реальном физическом мире, но любая интерпретация геометрической теории не является эквивалентной самой теории.

Коллизия в том, что, как отмечал Г.Д. Глейзер [23], если учащемуся не предоставить возможность *предметного* действия (знаковой натурализации), он будет запоминать тексты формально, без осознания. В этой связи Э.В. Ильенков отмечал, что важный момент для «воссоздания в мышлении идеальных геометрических объектов» – сопоставление собственного графического представления с представлениями другого человека (коммуникация). «В противном случае не исключено, что идеальное вообще не складывается, или складываются его искаженные формы. Причем сам человек не может обнаружить искажений». Таким образом, освоение геометрических понятий как культурной нормы совершенно требует сделать понимаемое предметом коммуникации ученика с учителем и другими детьми, для чего необходима *визуализация складывающихся образов* [4, с. 226]. Иначе все сводится или к «неоформленной образности», которая не может быть представлена и выражена в операциях, преобразованиях, или к полному отсутствию образности – вербализму.

С другой стороны, чрезмерное увлечение *знаковой натурализацией чертежа* негативно влияет на усвоения геометрических понятий как теоретических, поскольку задача обучения геометрии – формирование представлений об *идеальном* пространстве, особенностей понимания и способов действия с теоретическими образами. В этой связи необходимо отметить, что в исследованиях Е.Н. Кабановой-Меллер [5], Н.Ф. Талызиной [8], А.А. Устиловской [9] и др. отмечается, что условием перехода к теоретическому уровню геометрического мышления является преодоление знаковой натурализации – построение школьниками абстрактных моделей структуры евклидова пространства, отражающих специфические свойства, не характерные для натурального мира.

Психологи условно выделяют три типа пространства: перцептивное, реальное и геометрическое. В *перцептивном* действует ориентация «по схеме тела» (справа от себя, впереди себя), в *реальном* работают также объективные земные ориентиры (горизонтальность, к югу, севернее ...), в *геометрическом* пространстве система отсчета постоянно меняется. Названия геометрических фигур, их элементов не зависят от расположения относительно земной поверхности. Так, например, попробуем «прорефлексировать» образ тетраэдра, который возникает у обучающегося в идеальном плане при задании – «построить изображение треугольной пирамиды». Суть в том, что этот образ нельзя натурализировать как плоское изображение. Скорее, тетраэдр видится как бы одновременно со всех сторон – происходит выход в пространство «Я-центр» с постоянно меняющейся точкой отсчета. Основание пирамиды определяется не тем, что на нем «стоит» тетраэдр, а отношениями между его элементами – высота проведена к данной грани и т.п. Умение переходить от точки отсчета, сосредоточенной в наблюдателе, к пространству с постоянно меняющейся точкой отсчета С.Л. Рубинштейн назвал «стержнем общего понимания пространства». [7, с. 138-139].

С точки зрения Ж. Пиаже [6], П.Я. Гальперина [2], Б.Д. Эльконина [11], Э.В. Ильенкова [4] идеальные действия интериоризируются от предметных. Трансформация материального действия в идеальное связывается с символизацией самой формы действия. Материальный предмет оказывается идеализированным, если индивид способен активно воссоздавать его, опираясь на предметно-символьные системы. В качестве условия существования идеального как деятельности способности человек выделяет превращение формы деятельности в особый предмет, который он может некоторым образом преобразовывать, изменять в соответствии с требованиями деятельности; при этом идеальное как таковое может быть передано от человека к человеку не в «чистом» виде, как форма деятельности, но только при активных действиях осваивающего с предметом и продуктом деятельности.

Второй блок (предпонятие - образ-концепт). Предполагается процесс денатурализации, обеспечиваемый закономерностями *осознания, осмысления и обобщения*. Поскольку геометрические понятия не являются результатами эмпирического обобщения, то оперирование ими не есть производное от предметных действий. Необходимы операции другого типа – не сводящиеся к действию «с вещами». Предполагается *визуально-пространственный* способ кодирования информации – использование образов, передача в виде образов существенных признаков математических объектов, оперирование мысленным образом, развитие образа в процессе рассуждения, ориентация в пространстве, самостоятельное конструирование обучающимися моделей математических объектов и т.д. Роль слова в становлении мыслительной деятельности решающая, но в формировании понятийного мышления превращение слова в действительный регулятор процесса усвоения информации предполагает представление предметных действий и зрительных впечатлений в наглядно-обобщенной форме. Образ – это не просто приложение к теоретической мысли, это необходимая составная часть понятийного мышления. Необходимо формировать умение ученика мобилизовать образное мышление при изучении математического материала, что облегчает его понимание (осознание, осмысление, обобщение) и усвоение (запоминание, профилактику забывания). В качестве основы *операционального* способа восприятия геометрических понятий взята структура «*пространственный компонент (перцепт + оперирование образом + ориентация в пространстве) – логический компонент – понятие*».

Третий блок (вербально-логический уровень): понятие + система понятий.

Предполагается формирование геометрических понятий как теоретических. Выделяются этапы:

Категоризация – введения понятия: ознакомление учащихся с новым математическим объектом. Этап начинается с обозначения усваиваемого понятия (знаково-символического и визуально-образного). Предполагается *словесно-символический* способ кодирования – перевод информации с родного языка на математический и обратно. Школьники учатся кодировать информацию с помощью формулы, «всматриваться» в математическую символику.

Затем постепенно увеличивается степень обобщенности содержания понятия, учащиеся ориентируются на выделение частных и общих, существенных и несущественных признаков понятия. Заканчивается этап категоризации определением.

Обогащение – раскрытие структуры понятия (изучение теории понятия). В процессе изучения теории формируются понятия «свойство» и «признак» понятия; формируется умение высказывать гипотезы относительно свойств и признаков и проверять их.

Перенос – использование понятия в различных ситуациях. Формируется умение применять свойства и признаки понятия в учебно-познавательной деятельности. Термины «свойство» и «признак» используются не только в математике, но и в биологии, химии и других учебных предметах. Необходимо вести целенаправленную работу по уточнению смысла этих терминов в каждом случае. Например, после изучения теоремы «В равнобедренном треугольнике углы при основании равны» можно провести следующую беседу, способствующую формированию понятия «свойство».

- О какой фигуре говорится в теореме?
 - Что именно говорится о равнобедренном треугольнике?
 - Может ли быть треугольник равнобедренным, если у него не равны углы при основании?
 - Следовательно, равенство двух углов является свойством равнобедренного треугольника?
 - Какими еще свойствами обладает равнобедренный треугольник?
- При формировании понятия «признак» можно поставить следующие вопросы.
- По каким признакам можно распознать равнобедренный треугольник?

- Можно ли равенство двух углов считать признаком понятия «равнобедренный треугольник»?

Какие признаки этого понятия вы еще знаете? Будут ли они также свойствами?

Свертывание – включение понятия в систему других понятий – происходит при изучении последующего материала. Необходимо выделить понятие, в которое данное понятие включается как максимальная подсистема, т.е. которое для данного является ближайшим родом, и понятие, для которого данное является ближайшим родом. При этом выделяется достаточный и необходимый набор существенных свойств геометрического понятия и формулируется дефиниция. Здесь необходимо двигаться от дефиниции к «макетированию» содержание понятия при помощи предметных действий с чертежом.

Процесс образования понятий завершается этапом свертывания. Субъективный образ содержания понятия, развернутый на предыдущих этапах, на этом этапе представляется в сжатой, концентрированной форме. Предполагается интериоризация имеющихся сведений о понятии и трансформация их в обобщенную единицу знания. Особое место этому этапу отводится на уроках обобщения и систематизации знаний.

Четвертый блок (эмоционально-оценочный уровень): ценностное отношение. На данном этапе в русле социокультурно-ориентированного подхода на первый план выступает *ценностно-ориентированное* обучение, представляющее так называемую *контекстную* область математического знания и реализующее идею гуманистического подхода к математическому образованию, выводящего на первый план становление «Я» ученика. Характеристическая особенность ценностно-ориентированного обучения – любое понятие рассматривается в контексте его отношения к человеку, его нормам, идеалам и целям. Обучение рассматривается как коммуникация-трансляция системы *культурных ценностей*, носители которых – математические понятия и методы, а формы усвоения ценностей – математические знания, умения, навыки. При этом создается эффект «личного присутствия» обучающегося благодаря наполнению содержательного материала сведениями об отношении человека к определенным фактам, явлениям, действиям, умозаключениям. Исторический дискурс позволяет школьникам оценить роль математики в общечеловеческой культуре, в формировании мировоззрения, в решении прикладных проблем, проследить генезис математических идей, взглядов, открытий, драматургию жизни ученых-математиков. Ценностные (оценочные) знания выражаются в виде оценочных суждений с использованием таких слов, как «важный (бесполезный)», «рациональный (нерациональный)», «изящный (громоздкий)», «любопытный (неинтересный)» и т.п. Например: «Я знаю, какое важное значение имело доказательство независимости пятого постулата Евклида для развития науки». Предполагается *сенсорно-эмоциональный* способ кодирования информации, формирующийся благодаря вопросам, подводящим учащихся к эмоциональным оценкам предметного материала, созданию виртуальных ситуаций, в которых ученик может использовать метафоры, воображение и фантазию. Другими словами, когда человек нечто понимает, то он это словесно определяет, мысленно видит, связывает с предметными действиями и переживает.

Как уже отмечалось, учебно-познавательная деятельность в рамках формирования определенного понятия рассматривается как отдельный цикл освоения субъектом-обучающимся ценностного отношения, включающий последовательно сменяющие друг друга этапы деятельности³. Причем на каждой фазе этого цикла формируется ценностное отношение, как «принятие или отклонение объекта». Однако оно становится культурной ценностью, только пройдя все фазы цикла. При завершении последней фазы отдельный цикл обучения заканчивается, ориентируя тем самым обучающегося на приобретение нового кон-

³ Ценностная ориентация, побуждение, коммуникация, адаптация, продуцирование.

кретного опыта, а затем весь цикл повторяется уже на другом содержательном материале и т.д.

Таким образом, можно выделить следующие этапы деятельности по освоению подростками геометрических понятий.

1. *Формирование внутренней мотивации.*
2. *Уровень представлений.*
3. *Вербально-логический уровень.*
4. *Эмоционально-оценочный уровень.*

Список литературных источников

1. Выготский Л.С. Собрание сочинений: В 6 т. Т. 2: Мышление и речь. М.: Педагогика, 1982.
2. Гальперин П.Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий // Исследование мышления в советской психологии. Под ред. Е.В. Шороховой. М.: Наука, 1966. С. 236-237.
3. Глейзер Г.Д. Развитие пространственных представлений школьников при обучении геометрии: науч.-исслед. институт общего образования взрослых Академии пед. наук СССР. М.: Педагогика, 1978.
4. Ильенков Э.В. Об идолах и идеалах. М.: Политиздат, 1969.
5. Кабанова-Меллер Е.Н. Психология формирования знаний и навыков школьников. М.: Изд-во АПН РСФСР, 1962.
6. Пиаже Ж. Избранные психологические труды. Психология интеллекта / Пер. с франц. В.А. Лекторского и др. М.: Просвещение, 1969. 659 с.
7. Рубинштейн С.Л. Основы общей психологии. СПб.: Питер Ком, 1999. 720 с.
8. Талызина Н.Ф. Пути усвоения научных понятий // Дидакт, 1994, №4-5, с.10-13.
9. Устиловская А.А. Психологические механизмы преодоления знаковой натурализации идеального содержания геометрических понятий: дисс. ...канд. псих. наук. М., 2008. 160 с.
10. Щедровицкий Г.П. Процессы и структуры в мышлении (курс лекций) / Из архива Г.П. Щедровицкого. Т.6. М., 2003.
11. Эльконин Б.Д. Особенности знакового опосредования при решении творческих задач // Психологическая наука и образование. 1997, №3.

SOCIOCULTURALLY-ORIENTED TRAINING MATHEMATICS IN SCHOOL: FORMATION OF GEOMETRIC CONCEPTS

Podayeva Natalia Georgiyevna
d.p.n., professor
podaeva@mail.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

Summary. The article is devoted to one of the methodological problems of teaching mathematics in the school - the problem of the formation of scientific concepts in geometry lessons. The

author analyzes the connections between mastering geometric concepts in the process of learning-learning and the process of development of geometric knowledge, directly related to it. The methods of mental reproduction of geometric objects that lie in the plane of the concept's content and ways of describing geometric objects lying in the plane of the sign form are singled out. As units of an integral thought process, following G.P. Shchedrovitsky, it is proposed to consider holistic operations, which include real operations (objective-content) and formal operations. In this case, real operations are viewed as cognitive, starting directly from the object, representing actions with the object and capable of allocating some content in the object. Formal operations are represented as starting with ready knowledge, with language expressions that fix the "connection of knowledge", allowing to move from one property of the object to another, but not related to the discretion of the new content in the object, that is, as operations that play the role of cognitive ones.

Keywords: level of representations; the conceptual level of mastering knowledge; geometric objects; geometric concepts; theoretical objects; empirical ideal objects.

References

1. Vy`gotskii` L.S. (1982) *Sobranie sochinenii`*: V 6 t. T. 2: *My`shlenie i rech`* [Edition: 6 t. t. 2: thinking and speech] M.: Pedagogika, 1982.
2. Gal`perin P.Ia. (1966) *Psihologiiia my`shleniia i uchenie o poe`tapnom formirovanii umstvenny`kh dei`stvii`* [Psychology of thinking and teaching about the gradual formation of mental actions] *Issledovanie my`shleniia v sovetsvkoi` psihologii*. Pod red. E.V. Shorohovoi`. M.: Nauka, pp. 236-237.
3. Glei`zer G.D. (1978) *Razvitie prostranstvenny`kh predstavlenii` shkol`nikov pri obuchenii geometrii: nauch.-issled. institut obshchego obrazovaniia vzrosly`kh Akademii ped. nauk SSSR* [Development of spatial representations of pupils in teaching geo-metering: research-er-issled. Institute of general adult education Academy of ped. of Sciences of the USSR] M.: Pedagogika, 1978.
4. Il`enkov E`.V. (1969) *Ob idolakh i idealakh* [About idols and ideals] M.: Politizdat, 1969.
5. Kabanova-Meller E.N. (1962) *Psihologiiia formirovaniia znaniia i navy`kov shkol`nikov* [The psychology of knowledge and skills of schoolchildren] M.: Izd-vo APN RSFSR, 1962.
6. Piazhe ZH. (1969) *Izbranny`e psihologicheskie trudy`. Psihologiiia intellekta* / Per. s frants. V.A. Lektorskogo [Selected psychological works. Psychology of intelligence. with Franz. In A Lecturing] M.: Prosveshchenie, 1969. 659 p.
7. Rubinshtein S.L. (1999) *Osnovy` obshchei` psihologii* [Basics of General Psychology] SPb.: Peter Kom, 1999. 720 p.
8. Taly`zina N.F. (1994) *Puti usvoeniia nauchny`kh poniatii`* [The path of assimilation of scientific concepts] *Didakt. №4-5*, pp. 10-13.
9. Ustilovskaia A.A. (2008) *Psihologicheskie mehanizmy` preodoleniia znakovoi` naturalizatsii ideal`nogo sodержaniia geometricheskikh poniatii`* [Psychological mechanisms overcome the emblematic naturalization-Mo content of geometric concepts] diss. ...kand. psikh. nauk. M., 2008. 160 p.
10. Shchedrovitskii` G.P. (2003) *Protcessy` i struktury` v my`shlenii (kurs lektcii`)* / Iz arhiva G.P. Shchedrovitskogo. T.6. [Processes and structures in thinking (lectures)/from the archives of the G.P. Generously-vickogo. T. 6.] M., 2003.
11. E`l`konin B.D. (1997) *Osobennosti znakovogo oposredovaniia pri reshenii tvorcheskikh zadach* [Features of mediation in resolving significant creative tasks] *Psihologicheskaia nauka i obrazovanie. №3*.

УДК
378.147**ПРАКТИКО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
ЗАДАЧИ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ОБЩЕКУЛЬ-
ТУРНОЙ И ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ
БУДУЩИХ ЮРИСТОВ⁴****Дворяткина Светлана Николаевна**
д.п.н., доцент
sobdvor@yelets.lipetsk.ru
г. Елецпрофессор кафедры
математики и методики ее преподавания
Елецкого государственного университета
им. И.А. Бунина**Лопухин Арсений Максимович**
студент
г. Москвастудент Московского государственного
института международных отношений
(университета) Министерства
и иностранных дел Российской Федерации

Аннотация. В статье актуализируется проблема разработки и внедрения в учебный процесс практико-ориентированных математических задач с правовым содержанием, ориентированных на эффективное формирование общекультурной и профессиональной компетентности будущих специалистов юридического профиля. В основной части работы рассматривается вопрос о необходимости обучения студентов юридических направлений подготовки математическим методам. Обосновано, что эффективным условием формирования общекультурных и профессиональных компетенций является создание интегративной профессионально-развивающей среды обучения в контексте диалога математической, гуманитарной и информационной культур. Решение обозначенных проблем в рамках традиционного обучения в вузе обеспечивается посредством включения в учебный процесс текстовых математических задач с правовым содержанием, поскольку специфика математики такова, что основным видом учебной деятельности студентов на занятиях по математике является решение задач. Введено понятие практико-ориентированных математических задач, выделены их основные функции. В заключение проиллюстрирован пример решения методом математического моделирования научно-исследовательской проблемы в юридической науке. Интерпретация математического решения практико-ориентированной задачи следующая: варьируя правовое поле посредством математической модели, учитывающей состояние экономики, возможно добиться беспрецедентной эффективности, недоступной при статичном подходе к формированию законодательной базы. Правильная постановка практико-ориентированных задач и их решение с привлечением гуманитарных средств анализа и математических методов прогнозирования могут быть использованы для повышения показателя сформированности общекультурной и профессиональной компетентности, успешного профессионального становления личности специалиста.

Ключевые слова: компетентностный подход, практико-ориентированные и профессиональные задачи, математическое моделирование правовых процессов, синергия знаний.

В современном обществе с каждым годом возрастают требования к интеллектуальному и профессиональному развитию выпускников вузов, социальной мобильности, уровню их личностного развития. Поэтому уровень высшего образования должен соответствовать потребностям общества и обеспечивать его дальнейшее совершенствование. Федеральным За-

⁴ Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект № 16-18-10304

коном «Об образовании в Российской Федерации», Федеральными государственными образовательными стандартами высшего образования (ФГОС ВО) компетентностный подход определяется в качестве практической составляющей стратегии модернизации высшего образования. Компетентностный подход задает цель образования в терминах ожидаемого результата, в качестве которого выступает понятие «компетенция/компетентность». Компетентность обеспечивает как уровень владения технологиями профессиональной деятельности, так и наличие соответствующих этой деятельности качеств личности — способности принятия решений, творческого подхода к делу, способности к саморазвитию и самосовершенствованию, гибкости теоретического и профессионального мышления и др. [1]. Таким образом, компетентностная модель выпускника вуза ориентирована на формирование как общекультурных, так и профессиональных компетенций, позволяющих успешно решать профессиональные задачи, выстраивать и реализовывать перспективные линии интеллектуального, культурного, нравственного и профессионального саморазвития и самосовершенствования, быть конкурентоспособным специалистом.

Важную роль в формировании широкого спектра компетенций отводится математическому образованию по всем направлениям подготовки, включая гуманитарные. Применение математических методов как эффективного инструментария анализа, оценки, прогнозирования общественных процессов и явлений имеет большой научно-практический потенциал. Широкая практика применения математических методов в экономике, психологии, социологии постепенно распространяется и на конструкты правовых явлений и процессов. Сегодня математические методы успешно применяются во многих отраслях права. Например, в правовой доктрине они выступают средством познания государственно-правовых явлений и процессов, в криминалистике математические методы легли в основу перспективной криминалистической методики географического профилирования, в сфере страхового права и социального обеспечения занимают важное место при оценке рисков, расчете тарифных ставок и т. д. Количественный анализ позволяет обеспечить наглядность, точность, достоверность и полноту исследуемых явлений [4]. Это определяет особую роль математической подготовки будущего юриста в системе подготовки в высшей школе. Следует заключить, что математическая подготовка — необходимая составляющая общекультурной концепции правоведов, заключающаяся в способности использовать основы экономических и математических знаний при решении профессиональных задач [6].

Более того, математическое знание — важная составляющая профессиональной подготовки будущих юристов. Математика необходима для формирования строго последовательного, обоснованного, объективного мышления юриста. В юриспруденции, как и в математике, применяются одни и те же методы рассуждений, основной целью которых является установление истины, принятия справедливого решения. Любой правовед, как и математик, должен уметь логически рассуждать, применять на практике индуктивный и дедуктивный методы. Поэтому, занимаясь математикой, будущий юрист формирует и развивает свое профессиональное мышление и правовую культуру. Поэтому новый проект ФГОС ВО предусматривает формирование общепрофессиональных (ОПК-5; ОПК-6) и профессиональных (ПК-2) компетенций [6].

Эффективным условием формирования общекультурных и профессиональных компетенций является создание интегративной профессионально-развивающей среды обучения в контексте диалога математической, гуманитарной и информационной культур [2]. Реализация данного условия на содержательном уровне, согласно концепции фундирования Е.И. Смирнова [9], приводит к необходимости проектирования в процессе обучения поэтапного развертывания интегративных конструктов знания и образцов деятельности в форме спиралей или кластеров фундирования базовых учебных элементов в соответствии с наличным состоянием опыта и развития высших психических функций обучаемого. Эффективным

средством для поэтапного углубления и расширения знаний в направлении профессионализации являются практико-ориентированные задачи.

Следует заметить, что в методической литературе их называют по-разному: практико-ориентированные, профессионально-направленные, прикладные задачи и др. Существует множество трактовок понятия такой задачи, но все они сводятся к следующему. Это некоторая абстрактная модель реальной проблемной ситуации прикладного характера в профессиональной сфере деятельности, сформулированная в вербальной, знаковой или образно-графической форме и решаемая математическими средствами [8]. Поскольку для студентов юридических направлений подготовки математика не является профилирующей дисциплиной, мы будем называть их практико-ориентированными математическими задачами. Нами практико-ориентированная математическая задача понимается как задача, условие которой определяют модель некоторой проблемной ситуации, возникающей в профессиональной сфере деятельности юриста, и ее исследование осуществляется средствами математического аппарата, способствуя формированию общекультурной и профессиональной компетентности будущего специалиста.

Можно выделить следующие дидактические функции практико-ориентированных математических задач: развитие познавательной и профессиональной мотивации; интеллектуальное и творческое развитие; становление профессионального правового мышления и культуры; выявление и актуализация механизмов синергии и интеграции математических, гуманитарных и информационных знаний; совершенствование навыков самоконтроля и саморазвития; эффективная саморегуляция личностных черт обучающегося; развитие исследовательской деятельности.

Разрабатываемый нами банк включает задачи количественного анализа правовых явлений, оценки статистической зависимости между величинами юридической статистики, исследования количественных характеристик изменения институциональной среды, так и задачи с применением метода математического моделирования социально-правовых процессов, в частности, регулирования правотворческого процесса на примере планирования государственных закупок. Система практико-ориентированных задач, распределенных по четырем уровням сложности, была представлена в наших работах для инженерных направлений подготовки [3]. В данной статье проиллюстрируем приложение математики для решения задачи четвертого уровня — научно-исследовательской проблемы в юриспруденции, решение которой методом математического моделирования осуществляется по трехэтапной схеме.

Задача. Установить возможность оперативного изменения содержания нормативной базы в зависимости от изменения социально-экономической ситуации к вопросам составления проекта бюджета, в частности, к системе планирования государственных закупок (ФЗ №44). Исследовать вопросы взаимосвязи динамики изменений экономически значимых факторов с динамикой детерминированных ими изменений правовой системы на примере Липецкой области.

Этап. 1. Построение математической модели (фаза математизации)

В качестве индикатора введем сводный индекс социально-экономического положения, связанный с социально-экономической ситуацией, и, согласно расчетным параметрам, будет варьировать смягчение или ужесточение законодательства о контрактной системе путем активизации или исключения ряда поправок. В качестве такого фактора A условно примем индекс ММВБ, в состав которого входят наиболее торгуемые акции российских предприятий, допущенные к обращению на фондовой бирже ММВБ. Период изменения данного индекса рассматриваем на промежутке с 2008 по 2016 гг.

Установим ключевые параметры микроэкономического состояния, зависящие от изменения данного индекса: y_1 — эффективность выполнения государственных заданий, %; y_2 — отношение количества текущих административных дел (судебных процессов) к предыдущему

му году, %; y_3 — показатель изменения количества работников предприятия к предыдущему году, %; y_4 — показатель изменения величины оборотных средств предприятия к предыдущему году, %; y_5 — степень платежеспособности предприятия (отношение величины дебиторской к кредиторской задолженности), %; y_6 — показатель изменения задолженности по налогам, %; y_7 — показатель изменения задолженности по зарплате к предыдущему году, %.

В качестве математического метода для составления модели применяем однофакторный дисперсионный анализ. Модель однофакторного дисперсионного анализа представляется следующим выражением: $y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$, где y_{ij} — отклик, полученный на j -ом уровне фактора А в i -ой повторности ($i=1,2,\dots,n, j=1, \dots, k$); μ — общее среднее, отражающее общий уровень всех данных (т.е. среднее из j средних значений по столбцам); τ_j — эффект j -того уровня фактора А, $\tau_i = a_j - \mu$; ε_{ij} — случайная ошибка в i -ом наблюдении на j -ом уровне.

Методом наименьших квадратов получаем оценки значений параметров. Для однофакторной модели эти оценки равны: $\hat{\mu} = \bar{x}$, $\hat{\tau}_j = \bar{x}_j - \bar{x}$, $\hat{\varepsilon}_{ij} = x_{ij} - \bar{x}_j$, где общее среднее всего

эксперимента $\bar{x} = \frac{1}{nk} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n x_{ij}$, среднее для j -того уровня фактора А $\bar{x}_j = \sum_{i=1}^n x_{ij} / n$.

Нулевая гипотеза H_0 состоит в том, что $a_1=a_2=\dots=a_k$. Если H_0 отклоняется, то уровни фактора А различаются, и фактор А оказывает значимое влияние на Y .

Проверка гипотезы H_0 . В дисперсионном анализе с учетом предположения, что ошибки наблюдений ε_{ij} независимы и распределены по нормальному закону с одной и той же дисперсией, отношение средних квадратов $MS_A/MS_{\text{ост}}$ имеет F-распределение. Выбрав уровень значимости α , определяется критическое значение $F_{\text{кр}}$ со степенями свободы ν_1 и ν_2 и $F_{\text{эмп}} = MS_A/MS_{\text{ост}}$. Если $F_{\text{эмп}} < F_{\text{кр}}$, то гипотеза H_0 не противоречит экспериментальным данным ($a_1=a_2=\dots=a_k$), т. е. данные эксперимента не подтверждают вопрос о возможном различии эффектов уровней. В противном случае H_0 отклоняется, что свидетельствует о существовании различий в эффектах фактора.

Этап 2. Расчеты в готовой математической модели (фаза дедукции)

Эмпирической базой исследования служат данные, находящиеся в свободном доступе и размещенные на сайтах Единой информационной системы в сфере закупок, Федеральной налоговой службы, Федеральной антимонопольной службы, на основе которых формировалась репрезентативная выборка, объемом 40 предприятий Липецкой области, относящихся к категории малого и среднего бизнеса. Полученные статистические сведения вносим в сводную таблицу (табл. 1).

Табл. 1. Эмпирические данные по предприятиям

Микроэкономические параметры состояния предприятия, влияющие на выполнение контракта	Изменения показателя индекса ММВБ		
	Снижение индекса 2008-2009	Стабильность индекса 2010-2014	Рост индекса 2015-2016
Y_1	86,50	91,60	99,50
Y_2	75,72	102,72	128,75
Y_3	88,24	100,00	112,13
Y_4	58,47	99,78	141,07
Y_5	90,42	87,87	154,50
Y_6	125,02	102,89	85,82
Y_7	102,00	100,60	101,14

Статистическую обработку данных проведем с использованием режима «Однофакторный дисперсионный анализ» ТП Excel. Как следует из таблицы (табл. 2), эмпирическое значение F-критерия ($F_{\text{эмп}}=4,05$) принадлежит критической области (3,55; $+\infty$), что дает основа-

ние отклонить нулевую гипотезу с 95% вероятностью и принять альтернативу о значимых различиях в наблюдаемых эффектах фактора индекса ММВБ, характеризующего социально-экономическое состояние территории.

Таб. 2. Однофакторный дисперсионный анализ

Однофакторный дисперсионный анализ						
ИТОГИ						
Группы	Счет	Сумма	Среднее	Дисперсия		
Столбец 1	7	626,37	89,4814286	430,35021		
Столбец 2	7	685,46	97,9228571	33,942357		
Столбец 3	7	822,91	117,558571	612,53205		
Дисперсионный анализ						
Источник вариации	SS	df	MS	F	P-Значение	F критическое
Между группами	2905,3382	2	1452,6691	4,0470911	0,03536383	3,554557146
Внутри групп	6460,947714	18	358,94154			
Итого	9366,285914	20				

В случае установления значимого влияния фактора А на параметр Y, выявим статистическую связь при помощи построения матрицы парных коэффициентов корреляции. Все выбранные параметры относятся к парным связям, соответственно матрицу можно использовать для предварительного отбора параметров Y для внесения поправок в правовое поле. Расчёт матрицы выборочных парных коэффициентов корреляции осуществляется также в ТП Excel с использованием режима «Корреляционный анализ» (табл. 3).

Таб. 3. Матрица парных коэффициентов корреляции

	A	Y1	Y2	Y3	Y4	Y5	Y6	Y7
A	1							
Y1	0,704637705	1						
Y2	0,81394352	0,6145261	1					
Y3	0,794288281	0,60054	0,9571	1				
Y4	0,859658812	0,6553798	0,9652	0,990407	1			
Y5	0,657088017	0,6659302	0,7733	0,83124	0,860605	1		
Y6	-0,903079135	-0,5697669	-0,963	-0,95414	-0,9707	-0,77376	1	
Y7	0,122987692	0,0484945	0,3456	0,289776	0,232234	0,061776	-0,28658	1

Отметим в матрице парных коэффициентов корреляции наиболее значимые ($>0,7$). К таким показателям относятся параметры Y1, Y2, Y3, Y4, Y6. Для установления надежности полученных статистических показателей осуществлена проверка значимости выборочных коэффициентов корреляции. Предположение о некоррелированности случайных параметров в генеральной совокупности следует признать необоснованным.

Этап 3. Толкование результатов дедукции и расчетов (фаза интерпретации)

Согласно проведенным математическим расчетам, нами были установлены наиболее значимые параметры, характеризующие состояние участников закупочных процедур. Выдвижение одинаковых требований к участникам закупочных процедур экономически не эффективно, если учитывать реальную динамику изменения выбранного нами фактора и связанные с ним корреляции. В связи с полученными результатами необходима динамика изменений требований, предъявляемых к участникам закупочных процедур и зафиксированных в ст. 31 ФЗ № 44. В наибольшей степени коррекции требуют следующие разделы ФЗ №44 в

зависимости от изменения социально-экономической ситуации: подп. 5 ч. 1 ст. 31; подп. 1 ч. 2 ст. 31; подп. 2. ч. 2 ст. 31; подп. 3. ч. 2 ст. 31; подп. 4. ч. 2 ст. 31 [7].

Применения математических методов в праве связано с достижением синергетического эффекта. Желаемый итог — максимизация эффективности, будь то экономической или правовой. Посредством количественного учета ряда качественно-значимых параметров в ключевые временные интервалы и интенсификации принципа обратной связи законодатель получает возможность осуществлять объективно обоснованный выбор конкретной наиболее эффективной модели правового регулирования тех или иных общественных отношений.

Для будущего юриста важно понимать роль и место математики, как части общечеловеческой культуры, в жизни современного общества. Математика должна стать для обучающихся не только новым инструментом комплексного исследования юридических объектов, но и эффективным механизмом развития и саморазвития личности будущего профессионала, их ключевых и профессиональных компетенций, способствующих укреплению потенциала науки и различных сфер жизнедеятельности общества.

Список литературных источников

1. Борисова Н.В., Кузов В.Б. Технологизация проектирования и методического обеспечения компетентностно-ориентированных учебных программ дисциплин/модулей, практик в составе ООП ВПО нового поколения: Методические рекомендации для организаторов проектных работ и профессорско-преподавательских коллективов вузов. — М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов, 2010. 52 с.
2. Дворяткина С.Н. Развитие вероятностного стиля мышления студентов в обучении математике на основе диалога культур: автореф. дис. док. пед. наук: 13.00.02. Елец, 2012. 48 с.
3. Дворяткина С.Н., Розанова С.А. Разработка интегративных курсов на основе синергетического подхода при решении профессиональных и прикладных задач // Ярославский педагогический вестник. Серия «Психолого-педагогические науки» Ярославль, Изд-во ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 2016, №6. С. 128-133.
4. Лопухин А.М., Орлов С.Ю. К вопросу о целесообразности применения математических методов в юридических науках в контексте синергетического подхода // Вопросы Российского и международного права. 2016. №9. С. 63-74.
5. Нормативные правовые акты, принятые в целях реализации Федерального закона от 5 апреля 2013 г. № 44-ФЗ «О контрактной системе в сфере закупок товаров, работ, услуг для обеспечения государственных и муниципальных нужд». Электронный ресурс. Режим доступа: <http://base.garant.ru/57742222/#friends#ixzz4QwsdkzLx>
6. Об утверждении и введении в действие федерального государственного стандарта высшего образования: приказ Минобрнауки России от 01.12.2016 N 1511 по направлению подготовки 40.03.01. Юриспруденция (уровень бакалавриата) . Электронный ресурс. Режим доступа: <http://rulaws.ru/acts/Prikaz-Minobrnauki-Rossii-ot-01.12.2016-N-1511>.
7. Орлов С.Ю., Лопухин А.М. Оптимизация системы государственных закупок (математическое решение) // Вопросы Российского и международного права. 2017. Т.7. №4А. С. 76-88.
8. Скоробогатова Н.В. Наглядное моделирование профессионально-ориентированных задач в обучении математике студентов инженерных направлений технических вузов : дис. ... канд. пед. наук. Ярославль, 2006. 183 с.
9. Смирнов Е.И. Фундирование опыта в профессиональной подготовке и инновационной деятельности педагога. Ярославль, Изд-во «Канцлер», 2012. 654 с.

PRACTICALLY-ORIENTED MATHEMATICAL OBJECTIVES AS A MEANS OF FORMING THE CULTURAL AND PROFESSIONAL COMPETENCE OF FUTURE LAWYERS

S.N. Dvoryatkina

Dr. Sci. (Pedagogy), professor
sobdvor@yelets.lipetsk.ru
Moscow

Bunin Yelets State University

A.M. Lopukhin

student
Moscow

Moscow state Institute of international
relations (University) of the Ministry of
foreign Affairs of the Russian Federation

Abstract. The article actualizes the problem of development and introduction of practical-oriented mathematical problems with legal content into the educational process, oriented to the effective formation of general cultural and professional competence of future specialists of a legal profile. In the main part of the paper, the question of the necessity of teaching of students in legal fields of preparation for mathematical methods is being considered. It is substantiated that an effective condition for the formation of general cultural and professional competencies is the creation of an integrative vocational and developing learning environment in the context of a dialogue of the mathematical, humanitarian and information cultures. The solution of the indicated problems within the framework of traditional education in the university is ensured by including in the educational process textual mathematical problems with legal content because the specifics of mathematics is that the main type of educational activity of students in the classroom mathematics is problem solving. Introduced the concept of practice-oriented mathematical problems highlighted their main didactic function. In conclusion, an example of a solution of the scientific research problem in the legal science by mathematical modeling is illustrated. Interpretation of the mathematical solution of the practice-oriented problem is the following: by varying the legal field through a mathematical model that takes into account the state of the economy, it is possible to achieve unprecedented efficiency that is inaccessible with a static approach to the formation of a legislative framework. The correct formulation of practice-oriented tasks and their solution with the help of humanitarian analysis tools and mathematical prediction methods can be used to increase the indicator of the formation of general cultural and professional competence, the successful professional development of the personality of the specialist.

Keywords: competence approach, practical-oriented and professional tasks, mathematical modeling of legal processes, synergy of knowledge.

References

1. Borisova N.V., Kuzov V.B. (2010) Tekhnologizatsiia proektirovaniia i metodicheskogo obespechivaniia kompetentnostno-orientirovanny`kh uchebny`kh programm distsiplin/modulei`, praktik v sostave OOP VPO novogo pokoleniia: Metodicheskie rekomendatsii dlia organizatorov proektny`kh rabot i professorsko- prepodavatel`skikh kollektivov vuzov [Design and methodological providing technologization of competence-oriented curriculum subjects/modules, practices consisting of the PLO HPE new generation: methodi-

- cal recommendations for design work and teaching teachers ' collectives of universities] М.: Issledovatel'skii` centr problem kachestva podgotovki spetsialistov, 2010. 52 p.
2. Dvoriatkina S.N. (2012) Razvitie veroiatnostnogo stilia my'shleniia studentov v obuchenii matematike na osnove dialoga kul'tur: avtoref. dis. dok. ped. nauk: 13.00.02 [Development of probabilistic thinking style of students in learning mathematics based on the dialogue of cultures: katege. Dees. dock. ped. Science: 13.00.02] Eletc, 2012. 48 p.
3. Dvoriatkina S.N., Rosanova S.A. (2016) Razrabotka integrativny`kh kursov na osnove sinergeticheskogo podhoda pri reshenii professional'ny`kh i prikladny`kh zadach [Development of integrative courses based on the synergistic approach for dealing with professional applications] Iaroslavskii` pedagogicheskii` vestneyk. Seriia «Psihologo-pedagogicheskie nauki». №6, pp. 128-133.
4. Lopuhin A.M., Orlov S.Iu. (2016) K voprosu o tcelesoobraznosti primeneniia matematicheskikh metodov v iuridicheskikh naukakh v kontekste sinergeticheskogo podhoda [To the question of whether to apply mathematical methods in legal science in the context of the synergistic approach] Voprosy` Rossii`skogo i mezhdunarodnogo prava. №9, pp. 63-74.
5. Normativny`e pravovy`e akty`, priniaty`e v tseliakh realizatsii Federal'nogo zakona ot 5 apreliia 2013 g. № 44-FZ «O kontraktnoi` sisteme v sfere zakupok tovarov, rabot, uslug dlia obespecheniia gosudarstvenny`kh i munitcipal'ny`kh nuzhd». [Electronic resource] [Regulatory legal acts adopted for the implementation of the Federal law of April 5, 2013 No. 44-F3 "about the contract system in the area of procurement of goods, works and services for public and municipal needs.]. URL: <http://base.garant.ru/57742222/#friends#ixzz4QwsdkzLx> (Accessed: 06.04.2017)
6. Ob utverzhdenii i vvedenii v dei'stvie federal'nogo gosudarstvennogo standarta vy'sshego obrazovaniia: prikaz Minobrnauki Rossii ot 01.12.2016 N 1511 po napravleniiu podgotovki 40.03.01. Iurisprudentciia (uroven` bakalavriata) [Electronic resource] [6. approving and enacting federal standard of higher education: the order of the Ministry of education and science of Russia from 01.12.2016 N 1511 on the DART drug preparation 40.03.01. Law (undergraduate level)]. URL: <http://rulaws.ru/acts/Prikaz-Minobrnauki-Rossii-ot-01.12.2016-N-1511/> (Accessed: 06.04.2017)
7. Orlov S.Iu., Lopuhin A.M. (2017) Optimizatsiia sistemy` gosudarstvenny`kh zakupok (matematicheskoe reshenie) [Optimization of the public procurement system (mathematical decision)] Voprosy` Rossii`skogo i mezhdunarodnogo prava. №4. T. 7, pp. 76-88.
8. Skorobogatova N.V. (2006) Nagliadnoe modelirovanie professional'no-orientirovanny`kh zadach v obuchenii matematike studentov inzhenerny`kh napravlenii` tekhnicheskikh vuzov : dis. ... kand. ped. nauk [Visual simulation of professionally-oriented tasks in learning mathematics undergraduate engineering directions of technical universities: DIS. ... Cand. ped. Sciences] Iaroslavl`, 2006. 183 p.
9. Smirnov E.I. (2012) Fundirovanie opy`ta v professional'noi` podgotovke i innovatsionnoi` deiatel'nosti pedagoga [Founded experience in training and innovation of teacher] Iaroslavl`, Izd-vo «Kantcler», 2012. 654 p.

УДК
372.8**НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ****Мардонов Эшим Муратович**к.п.н., доцент
г. Самарканддоцент кафедры теории вероятностей и
математической статистики Самаркандского
государственного университета**Останов Курбон**к.п.н., старший преподаватель
ostonovk@mail.ru
г. Самаркандстарший преподаватель кафедры теории
вероятностей и математической статистики
Самаркандского государственного
университета**Ачилов Уткир**преподаватель математики
г. Самаркандпреподаватель математики Самаркандского
профессионального колледжа искусства**Эргашев Аслиддин**преподаватель математики
г. Самаркандпреподаватель математики Самаркандского
профессионального колледжа искусства

Аннотация. Данная статья посвящена использованию информационных технологий в процессе обучения математике. В ней даны конкретные указания и рекомендации по применению информационных технологий с целью реализации новых педагогических технологий. Рассматриваются особенности применения информационных технологий для реализации целей некоторых современных педагогических технологий. В технологии «Обучение в сотрудничестве» в большей степени может быть реализована организация обучения при групповой работе с использованием компьютера и других технических средств. При этом основную роль играют обучающие программы и компьютерные модели, виртуальные лабораторные работы, мультимедийные презентации, которые способствует созданию оптимальных условий для совместной работы пар или групп учащихся. Дифференцированный подход к обучению также может быть реализован с использованием современных информационных технологий и мультимедийных проектов. При формулировке темы проекта учитель должен учитывать индивидуальные интересы и склонности учащегося, механизмы привлечения его к творческому учебному труду. При использовании метода проектов полностью реализуется раскрытие материала в мультимедийных презентациях и других компьютерных проектах. Исследовательский метод обучения с применением компьютерных технологий обеспечивает самостоятельную творческую деятельность обучаемых в процессе проведения научно-технических исследований в рамках определенной тематики. При использовании этого метода обучение является результатом активного исследования, открытия и игры, вследствие чего, как правило, бывает более приятным и успешным, чем при использовании других методов. При компетентностном подходе большое внимание должно уделяться развитию интеллектуальных возможностей учащихся, формированию у них современного стиля научного мышления.

Ключевые слова: технология, информационная технология, технология обучения в сотрудничестве, дифференцированный подход к обучению, обучающие программы, компьютерное тестирование, метод проектов, исследовательский метод.

Обучение математике – образно говоря это искусство, направленное вовсе не на весь класс одновременно, а на каждого ученика в отдельности, тогда как урок – как музыкальное произведение, которое рождается со звоном и закончится со звоном, пролетает для тридцати пар глаз одновременно, но в душе и в уме каждого школьника оставляет свой собственный след, рождает тропинку, по которой еще предстоит продираться через дебри и овраги к пониманию, к истине.

Система уроков математики в школе призвана прежде всего для того, чтобы ученики совместно с учителем «творили» уроки, работали бы с полной отдачей сил.

На уроках математики необходимо привлечь все новые и оригинальные формы, методы и подходы к изложению учебного материала, с целью увлечения учащихся предметом, повышения эффективности освоения учебного материала, а современные информационные технологии позволяют учителю достичь более высокого уровня в обучении.

В настоящее время, время вхождения в нашу жизнь информационных и коммуникационных технологий, просто необходимо применение новых технологий в обучении, ориентированных на развитие творческих способностей учащихся. В современном уроке компьютер играет большую роль, позволяя сделать сложную науку математику более доступной.

Рассмотрим особенности применения информационных технологий для реализации целей некоторых современных педагогических технологий.

1. Технология обучения в сотрудничестве. В этой технологии в большей степени может быть реализована организация обучения при групповой работе с использованием компьютера и других технических средств. При этом основную роль играют обучающие программы и компьютерные модели, виртуальные лабораторные работы, мультимедийные презентации, которые способствует созданию оптимальных условий для совместной работы пар или групп учащихся. Тогда участники процесса могут выполнять как однотипные задания, взаимно контролируя или заменяя друг друга, а также отдельные этапы совместной работы.

Здесь важно отметить, что в процессе выполнения заданий в парах или группах не требуется одинакового уровня владения техническими средствами, в процессе взаимодействия участников происходит и совершенствование практических навыков более “слабых” в этом отношении учащихся.

Кроме того, общая заинтересованность рабочей группы в общем результате способствует качественному обучению учащихся в коллективе, а также овладению предметом проекта, глубокому изучению проблем эффективного использования вычислительной техники и соответствующих информационных технологий.

Обучение в сотрудничестве с использованием информационных и коммуникационных технологий не требует непосредственного присутствия участников группы, позволяет провести работу дистанционно, с подачей учебных материалов и взаимным общением с помощью услуг Интернета. Все это помогает развивать их творческую деятельность на качественно новом уровне, а также привлекать к совместной учебной деятельности и тех, кто не имеет возможностей непосредственного участия в работе группы.

2. Дифференцированный подход к обучению. Этот подход также может быть реализован с использованием современных информационных технологий и мультимедийных проектов. При формулировке темы проекта учитель должен учитывать индивидуальные интересы и склонности учащегося, механизмы привлечения его к творческому учебному труду. При этом школьник будет иметь возможность реализовать свой творческий потенциал, самостоятельность мышления, творчески подойти к выбору формы подачи материала, способа и последовательности его изложения. На практике встречаются случаи, когда ученик, имеющий посредственные знания, самостоятельно и уверенно представлял на уроке самостоятельно подготовленный материал высокого уровня. Здесь ему помогло уверенное владение компью-

тером, позволившее ему повысить свою самооценку, расширить кругозор и овладеть новыми для себя знаниями.

Тестирование с помощью компьютера также гораздо более привлекательно для ученика, нежели традиционная контрольная работа или тест. Во-первых, ученик не связан напрямую с учителем, он общается в первую очередь с машиной. Во-вторых, тесты также могут быть представлены в игровой форме. При неправильном ответе школьник может услышать смешной звук или увидеть неодобрительное покачивание головы какого-нибудь забавного героя. А если тест успешно пройден – ученику вручат виртуальный лавровый венок, в его честь зазвучат фанфары и в небе вспыхнет салют. Естественно, что такое тестирование не вызовет у ученика стресса или отрицательных эмоций.

Компьютерное моделирование на уроках позволяет каждому ученику выполнять задание в удобном для него ритме, по-своему менять условия эксперимента, исследовать процесс независимо от других учащихся, в свою очередь это способствует формированию исследовательских навыков, побуждает к творческому поиску закономерностей в изучаемом процессе или явлении.

Обучающие программы предоставляют как учителю, так и ученику практически безграничные возможности, так как включают в себя хорошо организованную информацию. Множество иллюстраций, анимаций и видеофрагментов, гипертекстовое изложение материала, звуковое сопровождение, возможность проверки знаний в форме тестирования, проблемных вопросов и задач дают возможность ученику самостоятельно выбирать не только удобный темп и форму восприятия материала, но и позволяют расширить кругозор и углубить свои знания.

В чем преимущество использования обучающих программ при отработке умений и навыков? Каждый ученик работает в своем темпе, и только освоив одно задание, перейдет к другому. Форма организации обучения представляет собой индивидуальную работу с варьируемой степенью самостоятельности. При необходимости он может проверить ответ или прочитать теорию, посмотреть график или решение.

Обучающие программы позволяют дать ученикам уникальную возможность самим, независимо от преподавателя, узнать новое понятие, подметить закономерность, повторить забытое, выдвинуть собственную гипотезу и т.д.

Мультимедийные учебные пособия – это не только тематический сборник задач, хороший демонстрационный лекционный материал, который используется на уроках и во внеурочное время для объяснения, тренировки, закрепления и отработки ЗУН, но это и огромный справочный материал по математике с большим объемом дополнительной информации.

В результате работы с обучающими программами у школьников возрастает активизация мыслительной деятельности, повышается мотивация учебной деятельности, повышается качество усвоения знаний.

В обучающих программах изначально реализована идея **игры**. Звуковое и графическое оформление большинства программ (интерфейс) позволяет ребенку воспринимать их как “игры”. Множество игровых ситуаций и заданий делают процесс обучения максимально увлекательным.

3.Метод проектов. Этот метод полностью реализуется в мультимедийных презентациях и других компьютерных проектах. Как уже упоминалось выше, подобные проекты могут быть выполнены с помощью информационных технологий (здесь, кстати, неоценимую помощь может предоставить Интернет). Быстрый доступ к разнообразной информации, использование всех мультимедийных возможностей позволяют реализовать самые смелые и неожиданные идеи. Если же ученик владеет не только основными средствами работы с информацией, но и более сложными программами, то в этом случае возможно создание поистине уникальных проектов.

Большие возможности для использования метода проектов предоставляет и компьютерное моделирование. Здесь речь уже идет о том, что разработка компьютерной модели того или иного процесса или явления уже сама по себе является видом проективной деятельности. Если учащийся владеет приемами программирования, то в этом случае он имеет возможность глубоко проникнуть не только в самую суть явления, но и в его математическую модель, которую затем необходимо воплотить в зрительный образ.

Работа над проектом побуждает ученика не только к глубокому изучению какой-либо темы курса, но и к освоению новых программ и программных продуктов, использованию новейших информационных и коммуникационных технологий. Несомненно, что здесь решаются многие задачи личностно ориентированного обучения.

4. Исследовательский метод обучения с применением компьютерных технологий обеспечивает самостоятельную творческую деятельность обучаемых в процессе проведения научно-технических исследований в рамках определенной тематики. При использовании этого метода обучение является результатом активного исследования, открытия и игры, вследствие чего, как правило, бывает более приятным и успешным, чем при использовании других методов. Исследовательский метод обучения предполагает изучение методов объектов и ситуаций в процессе воздействия на них. Для достижения успеха необходимо наличие среды, реагирующей на воздействия. В этом плане незаменимым средством является моделирование, т. е. имитационное представление реального объекта, ситуации или среды в динамике.

Моделирование является одним из способов познания окружающей действительности. Процесс моделирования является средством формирования у учащихся математической культуры, способствует реализации различных форм представления знаний.

Например, при изучении темы «Функции, свойства и графики» при отработке свойств графиков можно провести исследовательскую практическую работу. С помощью программы MS EXCEL учащиеся строят графики и описывают их свойства. Например: «Постройте график функции и прочитайте его $y = (x^2 - 9)/(x^2 + 5)$ ». Ученик составляет программу и по графику, который он видит на экране монитора, записывает свойства функции в тетрадь.

Примеры творческих заданий:

1.Тема «Многогранники». Собрать информацию о правильных многогранниках и составить мультимедийную презентацию. Созданная презентация – это творческая работа, в которой сочетается текстовая информация и графические изображения. Для создания презентации были использованы программы PowerPoint, CorelDraw.

2.Тема «Простые и составные числа». Составить презентацию о различных системах счисления, истории их возникновения, применение. Создать свою систему счисления, придумать несколько интересных заданий.

3.Тема «Методы решения квадратных уравнений». Составить презентацию, в которой описать различные методы решения квадратных уравнений.

5. Компетентностный подход. С внедрением этого подхода в учебный процесс большое внимание должно уделяться развитию интеллектуальных возможностей учащихся, формированию у них современного стиля научного мышления. Обеспечить положительную динамику интеллектуального развития обучаемых в полной мере может когнитивная технология обучения, которая ориентируется на развитие умственных способностей человека, его воображения и ассоциативного мышления.

Когнитивное развитие – это развитие мышления и организующих систем мозга, таких как восприятие, память, язык, аргументация, навыки решения проблем, формирование понятий, воображение и логика.

Внедрение компьютерных технологий в обучение математике разрешает проблему активного и пассивного «математического видения», позволяет сочетать наглядные, практиче-

ские и словесно-логические методы. Одним из достоинств когнитивно-визуального подхода является то, что он учитывает индивидуальные особенности учащихся и, в частности, особенности работы левого и правого полушарий головного мозга. Сегодня вопрос о функциональной асимметрии полушарий головного мозга и особенно учёт этой асимметрии в практике обучения математике становится ещё более актуальным.

При использовании когнитивного подхода в обучении математике необходимо правильно построить процесс обучения, учителя всегда должны помнить, что человеческое мышление изначально двустороннее: логическая и эмоционально-образная стороны существуют как равноправные части. Психологи утверждают: для того, чтобы системность работы двух полушарий человеческого мозга была обеспечена, т.е. чтобы мы имели всесторонне развитую личность, нужен баланс между знаково-цифровой (математика, физика и т.п.) и образной (литература, музыка, живопись и т.п.) информацией. Поэтому в процессе обучения математике целесообразно вносить стихи в правила (возможно, для многих учеников — это лучший способ их запоминать), давать задачи и упражнения в стихах, создавать проблемную ситуацию на уроке. Все это позволяет повышению интереса, познавательной активности учащихся к предмету и к процессу учебной деятельности.

Кроме того, хорошие результаты дают использования методик, применяемых в когнитивной технологии, таких как установление сходства, поиск закономерности, установление аналогии, «вставьте нужное слово», задания с применением кругов Эйлера, работа над ошибками, умение увидеть ошибку, указать её причины и исправить, задания на преодоление инертности мышления, задания на перекодирование информации, умение трансформировать информацию, заданную в одной форме, в другие возможные формы представления (графическую, вербальную, образную, символическую, знаковую).

Такие методики позволяют школьникам быть успешными в учебе. Комфортная психологическая атмосфера на уроке создаётся при помощи посильных заданий, доступного для каждого участника изложения материала и индивидуального подхода. Обучение школьников с учётом уровня развития всех структурных компонентов их интеллекта делает этот процесс личностно-ориентированным, а поэтому эффективным. Учащиеся становятся более успешными, толерантными, ответственными, склонными к сотрудничеству и совместной деятельности. Школьники с удовольствием вовлекаются в дополнительную деятельность по предмету, к участию в разных конкурсах, проектах и занятиях в кружках.

Список использованной литературы

1. Белов А.Н. Об организации учебно-исследовательской деятельности в области математики // Внешкольник. 1997. С.7-8.
2. Беспалько В.П. Слагаемые педагогической технологии. М.: Педагогика, 1989.
3. Гельман В.Я. Решение математических задач средствами Excel: Практикум. Питер, 2003.
4. Гузеев В.В. Инновационные идеи в современном образовании // Школьные технологии. №1. 1997.
5. Языкова Н.В. Инновационные технологии в образовании. Сб. статей. У.-У., 2003.

SOME PECULIARITIES OF USING INFORMATION TECHNOLOGIES IN THE PROCESS OF TEACHING MATHEMATICS

Mardonov Eshim Muratovich
Cand. Sci. (Pedagogy), associate professor
Samarkand

Ostanov Kurbon
Cand. Sci. (Pedagogy), Senior Lecturer
ostonovk@mail.ru
Samarkand

Achilov Utkir
teacher, Samarkand
Ergashev Asliddin
teacher, Samarkand

Department of Probability and Statistics of
Samarkand State University

Department of Probability and Statistics of
Samarkand State University

Samarkand professional college of Art

Samarkand professional college of Art

Summary. This article is devoted to the use of information technology in the process of teaching mathematics and gives specific guidance and recommendations on the use of information technology for the implementation of new pedagogical technologies. Consider the specifics of the use of information technology for the implementation of the goals of some modern pedagogical technologies. In the technology of learning in cooperation, the organization of training in group work using computers and other technical means can be realized to a greater extent. In this case, the main role is played by training programs and computer models, virtual laboratory work, multimedia presentations, which contributes to creating optimal conditions for joint work of pairs or groups of students. With a differentiated approach to learning, it can also be implemented using modern information technologies and multimedia projects. When formulating the theme of the project, the teacher must take into account the individual interests and inclinations of the student, the mechanism to attract him to creative educational work. When using the project method, material disclosure in multimedia presentations and other computer projects is fully realized. The research method of teaching with the use of computer technologies provides independent creative activity of trainees in the process of carrying out scientific and technical research within a certain topic. Using this method, training is the result of active research, discovery and play, which is why, as a rule, it is more pleasant and successful than using other methods. With a competent approach, much attention should be paid to the development of intellectual abilities of students, the formation of a modern style of scientific thinking.

Keywords: technology, information technology, technology of training in cooperation, differentiated approach to training, training programs, computer testing, project method, research method.

References

1. Belov A.N. (1997) Ob organizatsii uchebno-issledovatel'skoi` deiatel`nosti v oblasti matematiki [On the Organization of teaching and research activities in the field of mathematics] Vneshkol`nik, pp. 7-8.
2. Bespal`ko V.P. (1989) Slagaemy`e pedagogicheskoi` tekhnologii [Components of pedagogical technology] M.: Pedagogika, 1989.
3. Gel`man V.Ia. (2003) Reshenie matematicheskikh zadach sredstvami Excel: Praktikum [Solving mathematical tasks Excel Tools: workshop] Piter, 2003.
4. Guzeev V.V. (1997) Innovatsionny`e idei v sovremennom obrazovanii [Innovative ideas in modern education] Shkol`ny`e tekhnologii. №1.
5. Iazy`kova N.V. (2003) Innovatsionny`e tekhnologii v obrazovanii. Sb. statei` [Innovative technologies in education. Sat. articles] U.-U., 2003.

УДК
378.018**ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЕКТНОЙ
ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ В СИСТЕМЕ
ДИСТАНЦИОННОГО ОБУЧЕНИЯ MOODLE****Малиатаки Виктория Викторовна**к.п.н., старший преподаватель
maliataki@yandex.ru
г. Ставропольстарший преподаватель кафедры
математики и информатики
Ставропольского государственного
педагогического института**Вендина Алла Анатольевна**к.ф.-м.н., доцент
roven-ka@yandex.ru
г. Ставропольдоцент кафедры
математики и информатики
Ставропольского государственного
педагогического института

Аннотация. В статье на основе практического опыта обучения бакалавров направления «Педагогическое образование» раскрываются специфические особенности организации учебного процесса с использованием метода проектов в модульной объектно-ориентированной динамической учебной среде Moodle. Эффективность использования среды Moodle при дистанционной работе над проектами обуславливается ее возможностью обеспечивать организацию и контроль различных видов как самостоятельной, так и коллективной деятельности обучающихся, форм обратной связи и взаимодействия участников проекта. В работе демонстрируются различные варианты реализации этапа планирования учебного проекта, этапа организации проектной деятельности обучающихся, этапа непосредственного выполнения проектных заданий и организации их оценивания с помощью инструментов и ресурсов Moodle. Приводятся различные варианты применения инструментов и ресурсов в зависимости от целей и задач использования и алгоритмы, которые позволят педагогам обеспечить управление как аудиторной, так и внеаудиторной самостоятельной работой студентов.

Ключевые слова: интерактивный метод, профессионально ориентированное обучение, система управления обучением moodle, метод проектов

Инновационные процессы, протекающие в современном образовании, характеризуются смещением фокуса учебной деятельности от преподавателя к обучающимся за счет активизации их учебно-познавательной деятельности в результате усиления роли самостоятельной работы студентов. В настоящее время одним из требований к условиям реализации основных профессиональных образовательных программ бакалавриата, определяемых Федеральными государственными образовательными стандартами высшего образования, является использование в учебном процессе активных и интерактивных форм проведения занятий в сочетании с внеаудиторной работой студентов [2].

На наш взгляд, при обучении бакалавров направления «Педагогическое образование» эффективными в этом случае будут такие активные и интерактивные методы, как метод проектов, кейс-метод и т.д., способные при должном уровне организации стать одним из наиболее оптимальных средств формирования обозначенных во ФГОС ВО [1] профессиональных и общекультурных компетенций студентов.

В статье рассмотрен опыт использования информационных технологий как основы для организации учебных проектов и реализации всех этапов проектной деятельности обучающихся. В контексте применения метода проектов использование информационных технологий дает возможность реализовать схемы дистанционного взаимодействия между студентом

и преподавателем, позволяющие контролировать как аудиторную, так и внеаудиторную самостоятельную работу студентов. Большие возможности для этого предоставляет система дистанционного обучения (СДО), позволяющая спланировать процесс проектной работы, обеспечить обучающихся необходимыми информационными и методическими материалами, а также осуществить мониторинг и оценку учебной деятельности [5].

Опыт использования СДО в процессе подготовки бакалавров показал, что в данном случае оптимальнее реализовывать краткосрочные проекты продолжительностью 1-3 месяца, либо среднесрочные – от 3 месяцев до 1 года. В литературе, раскрывающей особенности реализации проектной деятельности обучающихся, можно встретить различные подходы к делению такой деятельности на отдельные этапы. Но, вне зависимости от применяемых авторами названий этапов и их количества, общая направленность и содержание проектной деятельности остаются практически неизменными. Так, в содержание первоначального этапа работы над проектом, который условно можно назвать «Планирование», должно входить деление на команды, определение темы проекта, определение и обсуждение возможных проблемных вопросов проекта, распределение деятельности между участниками проекта, определение этапов такой деятельности и сроков реализации каждого из них.

Второй этап, с условным названием «Сбор данных», предполагает обсуждение участниками проекта методов исследования, поиск и сбор необходимой информации. На третьем этапе осуществляется непосредственно «Выполнение проекта» – анализ собранной информации, выполнение (при необходимости) самостоятельных исследований, обсуждение полученных результатов, оформление конечных результатов проекта. И на последнем, заключительном этапе, происходит защита проекта, подводятся итоги проектной деятельности, осуществляется внутренний (самооценка выполненной работы участниками проекта) и внешний (со стороны других студентов и преподавателя) анализ и оценка результатов проекта.

Анализ элементов и ресурсов СДО Moodle, а также опыт организации самостоятельной проектной деятельности студентов в среде дистанционного обучения Moodle, на базе которой построена часть электронной информационно-образовательной среды ГБОУ ВО СГПИ [3], позволил определить инструменты, позволяющие эффективно решать задачи каждого их рассмотренных этапов.

Так, на этапе планирования проекта можно действовать двумя способами. В первом случае сначала определяются возможные темы проектных работ, а затем происходит деление студентов на группы в зависимости от их интересов. При таком способе можно использовать элемент «Hot Question», позволяющий студентам самостоятельно предложить темы проектов, а затем проголосовать за них, тем самым обозначая свой интерес к данной теме. Во втором случае сначала студентам необходимо разделиться на группы, что удобно сделать с помощью элемента «Groupself-selection», имеющего гибкие настройки, позволяющие преподавателю предварительно ограничить количество создаваемых групп и число участников в них. После разделения на группы студенты могут выбрать и уточнить тему проекта с помощью элементов «Форум» или «Чат». Эти же элементы позволяют студентам вести обсуждение хода проектной деятельности на протяжении всего проекта.

Для самостоятельного определения студентами этапов своей работы можно использовать такой элемент как «Checklist», который позволяет создать контрольный список необходимых действий с указанием времени их выполнения. Этот же элемент на последнем этапе проектной работы послужит для осуществления самооценки участниками проекта, наглядно отражая выполненные и невыполненные элементы проектной деятельности. Помимо этого, преподаватель может организовать деятельность студентов, обозначив сроки их работы с помощью элемента «Календарь», закрепив в нем даты каждого вида работ.

Поиск информации осуществляется участниками проекта вне системы дистанционного обучения, а сбор найденного материала можно организовать с помощью таких элементов как

«Studentfolder», по своей сути представляющего собой папку для сбора данных любого типа с возможностью принимать и отклонять получаемые материалы, и «LightboxGallery», позволяющего создавать и редактировать галереи изображений, или элемента «Mediacollection», предоставляющего также возможности комментирования выкладываемых изображений. На этом же этапе студентами может быть создан глоссарий терминов, используемых в проекте (элемент «Глоссарий»), или набор связанных между собой веб-страниц – модуль Вики (Wiki). На третьем этапе студенты работают преимущественно индивидуально, выполняя собственные задания. Промежуточное обсуждение результатов целесообразнее осуществлять с помощью элемента «Форум».

При организации проектной деятельности студентов необходимо предусмотреть возможность индивидуальных консультаций с преподавателем. Инструментом для этого может стать элемент «Dialogue», при должной настройке которого можно обеспечить двусторонний диалог «Студент - Преподаватель».

Несмотря на практически полную самостоятельную деятельность студентов в процессе выполнения проектов, преподавателю необходимо организовать работу студентов должным образом. Для этого можно использовать элемент «Задание» с настроенными в зависимости от выполняемой задачи шкалами оценки и сроками выполнения. В качестве типовых заданий можно предложить такие как «Лист планирования проекта», «Список информационных источников», «Результаты индивидуального исследования» и т.п. Это позволит как обеспечить подготовку студентами промежуточных результатов на каждом этапе проектной работы, так и даст возможность преподавателю оценить эти результаты и реализовать мониторинг процесса обучения.

Последний этап работы предполагает самооценку студентами проделанной работы, что, как мы уже отмечали, возможно организовать с помощью элемента «Checklist», а также с помощью созданной преподавателем анкеты с вопросами типа «Удалось ли вам в полной мере реализовать проект?», «Что вызвало наибольшие сложности на каждом из этапов проектной работы?» и т.п. Такую анкету удобно подготовить с помощью элемента «Questionnaire», предоставляющего богатый выбор вариантов вопросов и гибкие настройки. Реализовать этап оценивания можно также с использованием элемента «Опрос».

Оценивание результатов групповой работы другими студентами удобно проводить с использованием элемента «Семинар». Перед использованием этого элемента преподавателю необходимо задать критерии оценивания проекта и максимальное количество баллов отдельно за работу, отдельно за процедуру оценивания. Студенты смогут представить свою работу в виде файлов любого типа, а затем получить работу других участников для анализа и оценки. Распределение работ между оценщиками может быть задано преподавателем, а может осуществляться автоматически. Представляемые работы и рецензии при необходимости могут быть анонимными. Несмотря на достаточную простоту и удобство использования такого способа защиты проектов, при возможности представление проектных работ лучше проводить в аудитории. Наполнение курсов (дистанционных проектов) теми или иными элементами и ресурсами осуществляется с учётом целесообразности их применения в зависимости как от преподаваемой дисциплины и ее целей, так и от тематики и типологии реализуемых проектов.

При необходимости можно усилить мотивацию обучающихся и стимулировать их работу путем включения в работу над проектом элементов геймификации [4], реализовав в проекте систему поощрений и систему статистики достижений.

Таким образом, используя инструменты СДО Moodle, преподаватель может задать четкий алгоритм проектной деятельности студентов и обеспечить ее реализацию от этапа выбора темы проекта до его презентации и оценивания, автоматизировав многие рутинные операции. Вместе с тем следует учитывать, что перенос проектной деятельности в онлайн-среду

потребует от преподавателя тщательной подготовки и продумывания всех этапов деятельности студентов, а также знания особенностей работы СДО Moodle, возможностей и специфики настройки используемых инструментов этой системы.

Список литературных источников

1. Вендина А.А., Киричек К.А. Технология проектного обучения как средство формирования компетенций бакалавров направления подготовки «педагогическое образование» // Современные образовательные технологии в мировом учебно-воспитательном пространстве. №5. 2016. С.219-224.
2. Вендина А.А., Киричек К.А., Малиатаки В.В. Активные и интерактивные методы обучения как средство подготовки бакалавров педагогического образования к реализации требований ФГОС // Мир науки. №2. Т. 4. 2016. С.7.
3. Красильников В.В., Малиатаки В.В., Тоискин В.С. Электронная информационно-образовательная среда ГБОУ ВО СГПИ в контексте реализации требований федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования // Педагогическая наука и практика - региону материалы XVI региональной научно-практической конференции. ГБОУ ВО «Ставропольский государственный педагогический институт». 2016. С.147-152.
4. Малиатаки В.В., Вендина А.А. Реализация элементов геймификации в обучении с использованием системы дистанционного обучения MOODLE // Электронное обучение в непрерывном образовании. №1(3). 2016. С.287-291.
5. Малиатаки В.В., Медведева Л.М., Оленев А.А. К вопросу о построении системы оценки сформированности общепрофессиональных компетенций студентов в вузе // Актуальные вопросы инженерного образования - 2015 . 2016. С.135-139.

PECULIARITIES OF REALIZATION OF PROJECT-BASED TRAINING OF STUDENTS IN THE DISTANCE LEARNING SYSTEM OF MOODLE

V.V. Maliataki Cand. Sci. (Pedagogy), Senior Lecturer maliataki@yandex.ru Stavropol	Stavropol State Pedagogical Institute
A.A. Vendina Cand. Sci. (Phys.–Math.), associate professor roven-ka@yandex.ru Stavropol	Stavropol State Pedagogical Institute

Summary. In the article, based on the practical experience of teaching bachelors in the direction of "Pedagogical Education", specific features of the organization of the educational process are revealed with the use of the project method in the modular object-oriented dynamic learning environment Moodle. The effectiveness of using the Moodle environment for remote work on projects is conditioned by its ability to organize and control various types of both independent and collective activities of students, feedback forms and interaction between project participants. The work demonstrates various options for implementing the planning stage of the training project,

the stage of organizing the project activity of the students, the stage of direct implementation of the project assignments and the organization of their evaluation using tools and resources Moodle. Various options for the use of such tools and resources are presented, depending on the goals and objectives of the use, and algorithms that will allow teachers to manage both the classroom and out-of-class independent work of students.

Keywords: interactive method, professionally-oriented training, learning management system moodle, project-based training

References

1. Vendina A.A., Kirichek K.A. (2016) Tekhnologiya proektnogo obucheniia kak sredstvo formirovaniia kompetentcii` bakalavrov napravleniia podgotovki «pedagogicheskoe obrazovanie» [Technology project-based learning as a means of creating competencies Bachelors training areas "pedagogical education»] *Sovremennyye obrazovatel'ny'e tekhnologii v mirovom uchebno-vospitatel'nom prostranstve*. №5, pp. 219-224.
2. Vendina A.A., Kirichek K.A., Maliataki V.V. (2016) Aktivny`e i interaktivny`e metody` obucheniia kak sredstvo podgotovki bakalavrov pedagogicheskogo obrazovaniia k realizatsii trebovaniy` FGOS [Active and interactive teaching methods as a means of Education Bachelor to the implementation of the requirements of the GEF] *Mir nauki*. №2. T. 4, pp. 7.
3. Krasil'nikov V.V., Maliataki V.V., Toiskin V.S. (2016) E`lektronnaia informatsionno-obrazovatel'naia sreda GBOU VO SGPI v kontekste realizatsii trebovaniy` federal'ny`kh gosudarstvenny`kh obrazovatel'ny`kh standartov vy`sshego obrazovaniia [Electronic information and education Wednesday GBOU in SSPI in the context of the implementation of the requirements of the Federal State educational standards for higher education] *Pedagogicheskaya nauka i praktika - regionu materialy` XVI regional'noi` nauchno-prakticheskoi` konferentsii. GBOU VO «Stavropol'skii` gosudarstvenny`i` pedagogicheskii` institut»*, pp. 147-152.
4. Maliataki V.V., Vendina A.A. (2016) Realizatsiia e`lementov gei`mifikatsii v obuchenii s ispol`zovaniem sistemy` distantsionnogo obucheniia MOODLE [Implementation of elements geimifikatsii in training using distance learning system MOODLE] *E`lektronnnoe obuchenie v nepreryvnom obrazovanii*. №1(3), pp. 287-291.
5. Maliataki V.V., Medvedeva L.M., Olenov A.A. (2016) K voprosu o postroenii sistemy` ochenki sformirovannosti obshcheprofessional'ny`kh kompetentcii` studentov v vuze [To the question about building the system of evaluating professional competencies students in higher school] *Aktual'ny`e voprosy` inzhenernogo obrazovaniia - 2015*, pp. 135-139.

УДК
378.018

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ РАБОТАХ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Кирилина Юлия Павловна
преподаватель математики и информатики
serene06@mail.ru
г. Астрахань

преподаватель Астраханского
колледжа культуры и искусств

Аннотация. В данной статье приводится пример достижения метапредметных результатов обучения математике и информатике в Астраханском колледже культуры и искусств. Подробно описан исследовательский проект по математике, выполненный с использованием информационных технологий студентами 1 курса специальности 51.02.03 «Библиотековедение» (квалификация – библиотекарь, специалист по информационным ресурсам) по дисциплине «Алгебра, начала математического анализа, геометрия» на тему «Логарифмическая функция». В результате данного проекта было создано электронное учебное пособие по математике средствами HTML на тему «Логарифмическая функция» с помощью языка гипертекстовой разметки документов. Была подтверждена гипотеза исследования: использование электронного учебного пособия с использованием HTML способствует хорошей успеваемости студентов в процессе изучения раздела «Логарифмическая функция».

Ключевые слова: ФГОС, математика, информационные технологии, исследовательская работа, исследовательский проект, проектная работа, HTML.

На уроках математики использование компьютеров позволяет обучающимся заниматься исследовательской работой при решении задач.

В данной статье приведу пример достижения метапредметных результатов обучения в рамках изучения дисциплин математики и информатики из опыта работы в Астраханском колледже культуры и искусств.

Проектная работа студентов является одним из методов развивающего обучения, направленных на выработку самостоятельных исследовательских умений. Она способствует развитию творческих способностей и логического мышления, объединяет знания, полученные в ходе учебного процесса, и приобщает к конкретным жизненно важным и профессиональным проблемам [1].

Студентами 1 курса 2015-2016 года обучения специальности 51.02.03 «Библиотековедение» (квалификация – библиотекарь, специалист по информационным ресурсам) Исалиевой Мариной, Платоновым Юрием, Григорьевой Екатериной по дисциплине «Алгебра, начала математического анализа, геометрия» была выбрана тема исследовательской работы «Логарифмическая функция». В результате данного проекта было создано электронное учебное пособие по математике средствами HTML.

Актуальность исследования. Создание электронного учебного пособия на тему «Логарифмическая функция» в формате HTML – весьма новое явление в изучении темы, которое позволит лучше сформировать знания о логарифмической функции и применить их на практике.

Цель исследования: создание электронного учебного пособия с помощью языка гипертекстовой разметки документов HTML на тему «Логарифмическая функция».

Объект исследования: разработка электронного учебного пособия с использованием HTML «Логарифмическая функция».

Предмет исследования: возможности HTML в создании электронного учебного пособия «Логарифмическая функция».

Для достижения поставленной цели необходимо выполнить ряд задач:

1. Провести анализ литературы по выбранной теме исследования.
2. Использовать возможности конструкции языка HTML в разработке электронного учебного пособия «Логарифмическая функция».

Гипотеза исследования: использование электронного учебного пособия с использованием HTML способствует хорошей успеваемости студентов по изучению раздела «Логарифмическая функция».

Объектом исследования выступают студенты 1 курса ГБПОУ АО «Астраханский колледж культуры и искусств» специальностей «Социально-культурная деятельность», «Библиотечковедение» и «Инструментальное исполнительство». В опросе приняли участие 30 человек.

Методологической основой исследования являются учебники по математике для 10-11 классов авторов Ш.А.Алимова, Ю.М.Колягина, информатике для 10-11 классов авторов И.Г.Семакина, Е.К.Хеннер.

Практическая значимость исследования: обоснована и экспериментально проверена взаимосвязь между использованием электронного учебного пособия на тему «Логарифмическая функция» и успеваемостью студентов Астраханского колледжа культуры и искусств.

Рассмотрим подробнее практическую часть исследовательского проекта.

Главная страница электронного учебного пособия на тему «Логарифмическая функция» содержит 6 гиперссылок (см. рис. 1):

- Логарифмы;
- Свойства логарифмов;
- Десятичные и натуральные логарифмы;
- Логарифмическая функция, её свойства и график;
- Логарифмические уравнения;
- Логарифмические неравенства.

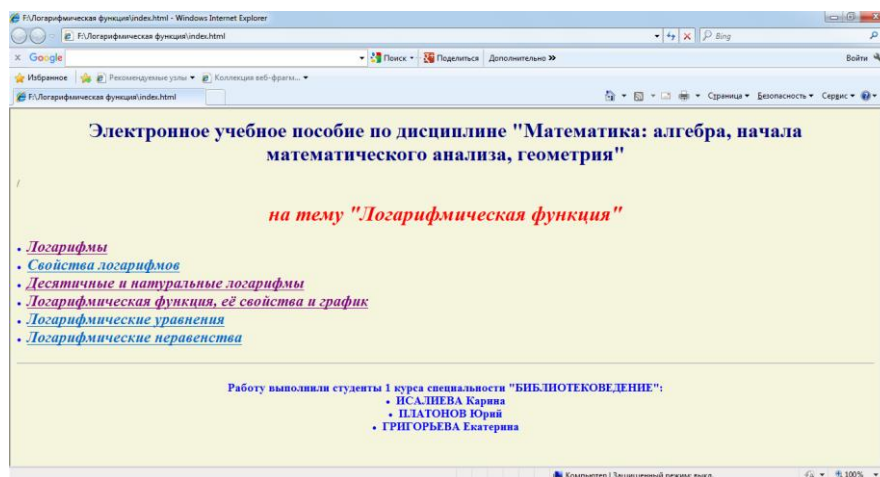


Рис.1. Главная страница

При нажатии на гиперссылку «Логарифмы» открывается следующая страница (см. рис. 2):

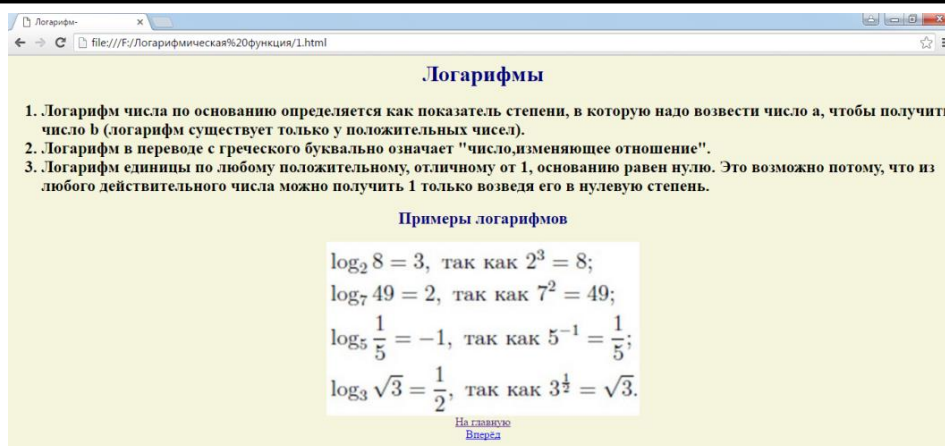


Рис.2. Логарифмы

Внизу, под картинкой, находятся две ссылки: «На главную» и «Вперёд».

При нажатии ссылки «На главную» происходит переход на главную страницу, при нажатии ссылки «Вперёд» – на следующую страницу (см. рис. 3):

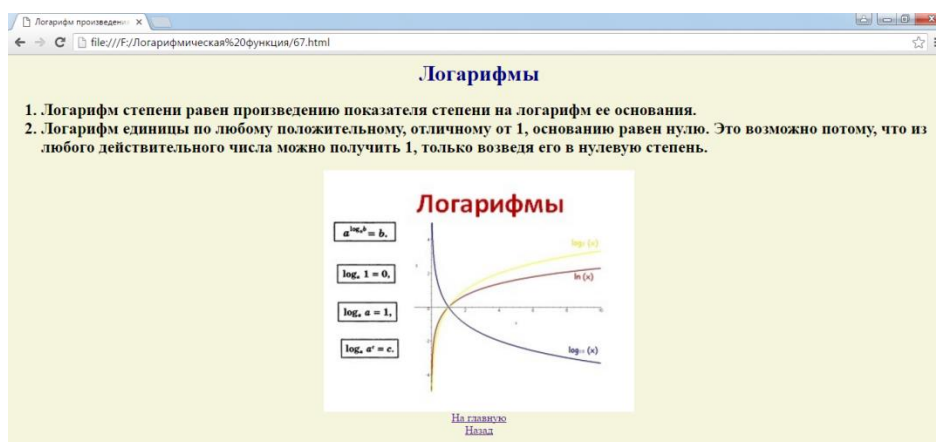


Рис.3. Логарифмы

Внизу, под картинкой, находятся две ссылки: «На главную» и «Назад».

При нажатии ссылки «На главную» происходит переход на главную страницу, при нажатии ссылки «Назад» – на предыдущую страницу.

При нажатии гиперссылки на главной странице «Свойства логарифмов» открывается следующее окно (см. рис. 4):

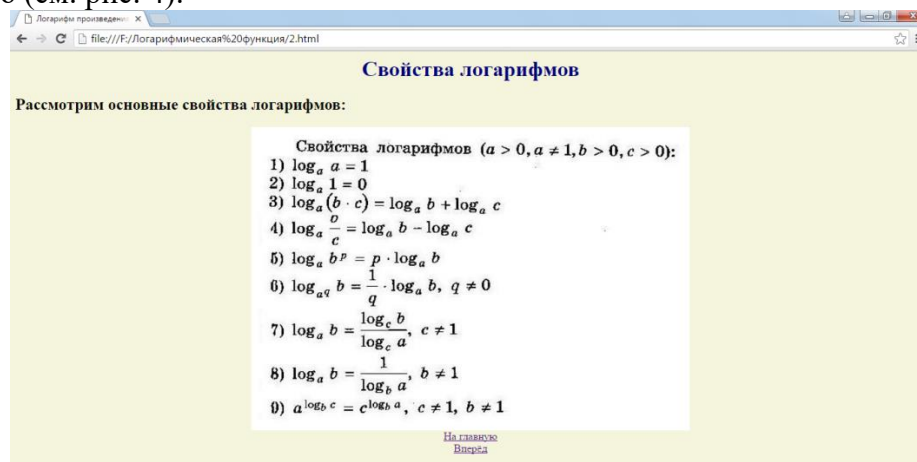


Рис.4. Свойства логарифмов

При нажатии гиперссылки «Вперёд» открывается страница «Примеры нахождения логарифмов» (см. рис. 5):

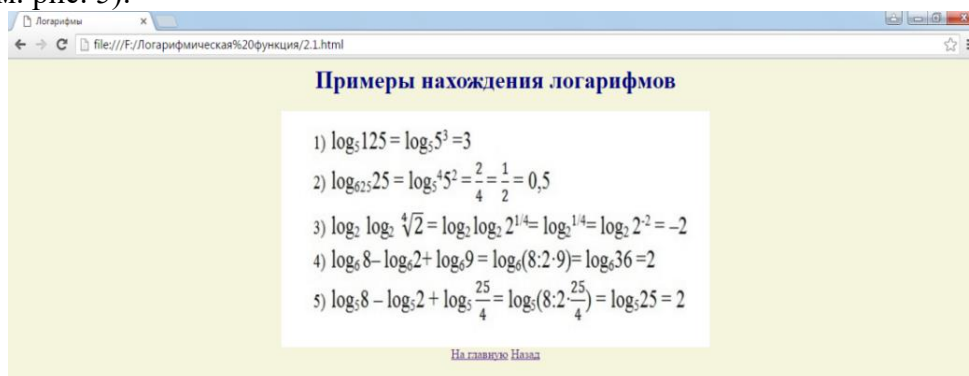


Рис.5. Примеры решения логарифмов

При нажатии на гиперссылку «Десятичные и натуральные логарифмы» на главной странице открывается следующая страница (см. рис. 6):

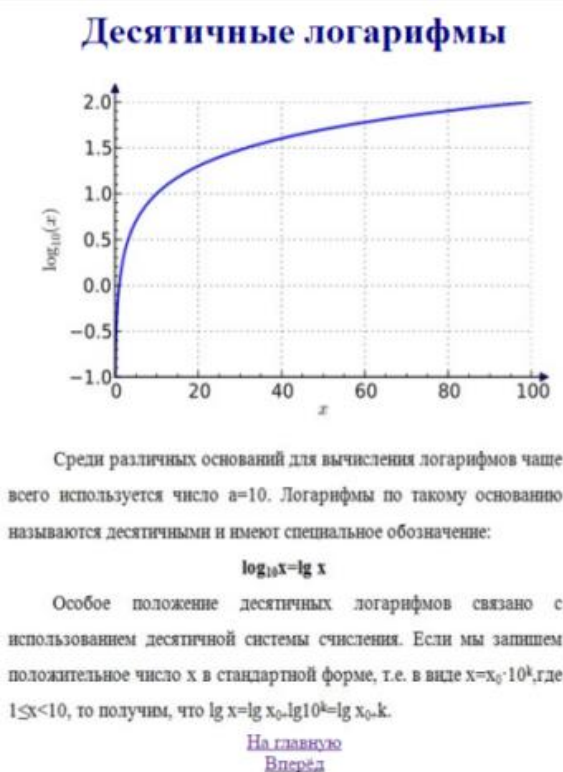


Рис. 6. Десятичные логарифмы

При нажатии на ссылку «Вперёд» открывается окно «Натуральные логарифмы» (см. рис. 7):

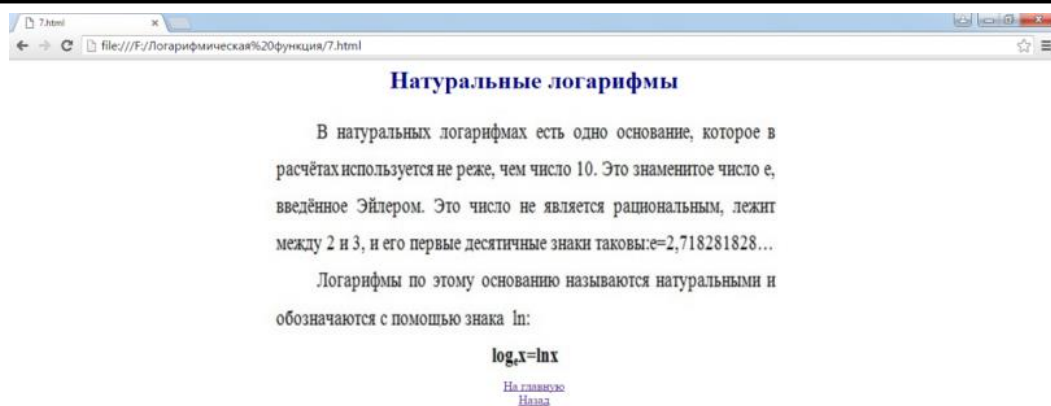


Рис. 7. «Натуральные логарифмы»

При нажатии на гиперссылку «Логарифмическая функция, её свойства и график» на главной странице открывается окно (см. рис. 8).

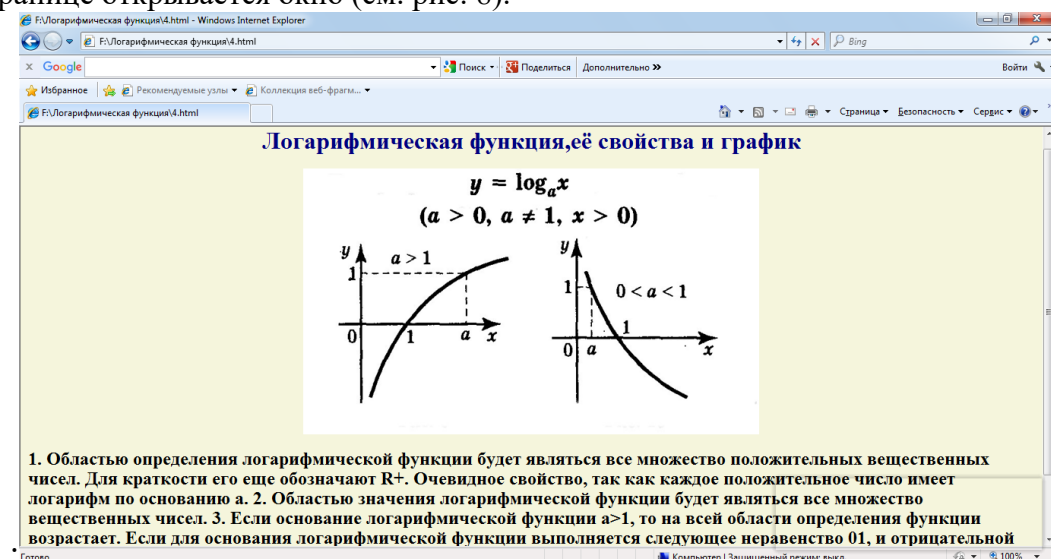


Рис. 8. Логарифмическая функция, её свойства и график.

При нажатии ссылки «Вперёд» откроется следующая страница (см. рис. 9):

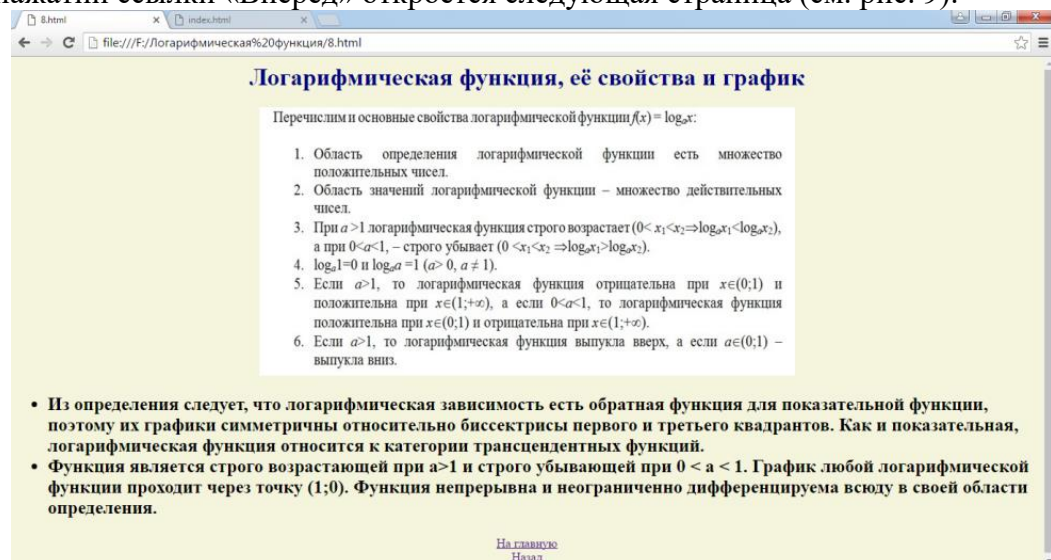


Рис. 9. Логарифмическая функция, её свойства и график

При нажатии на гиперссылку «Логарифмические уравнения» на главной странице открывается страница (см. рис. 10):

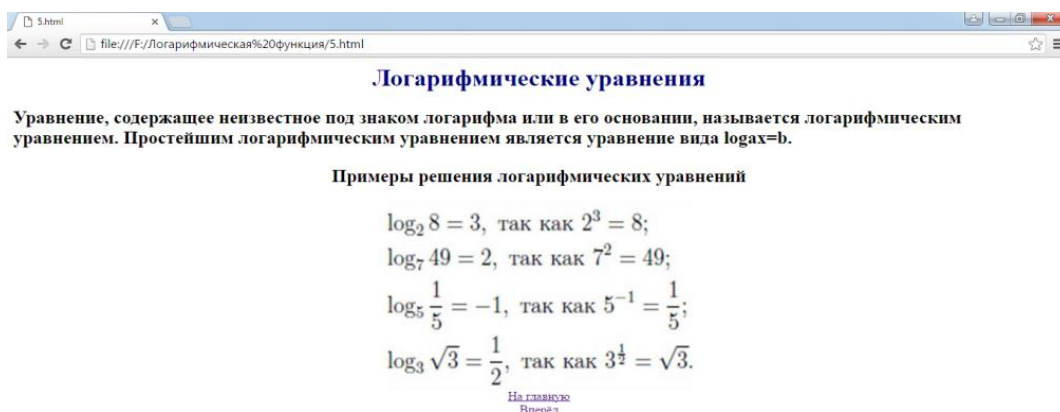


Рис. 10. Логарифмические уравнения

При нажатии на ссылку «Вперёд» откроется следующая страница (см. рис. 11):

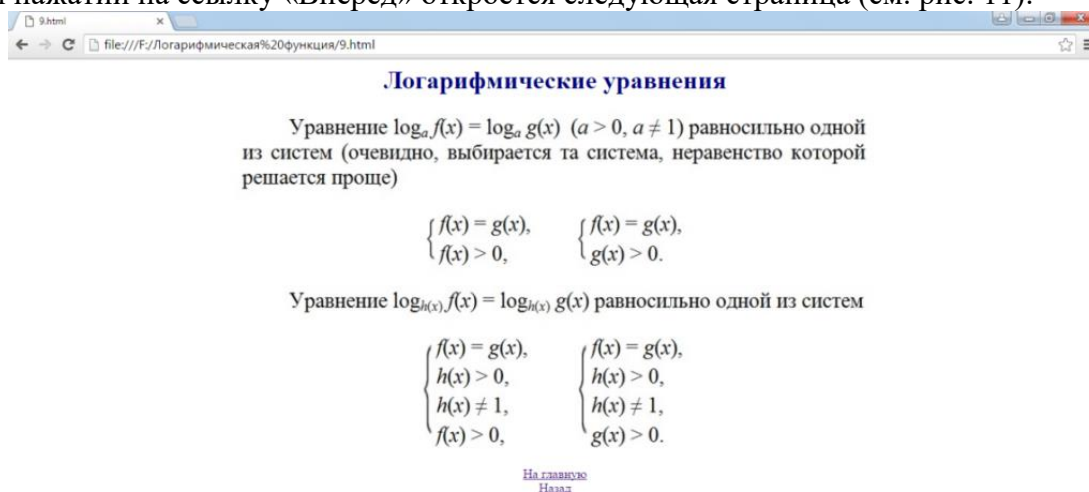
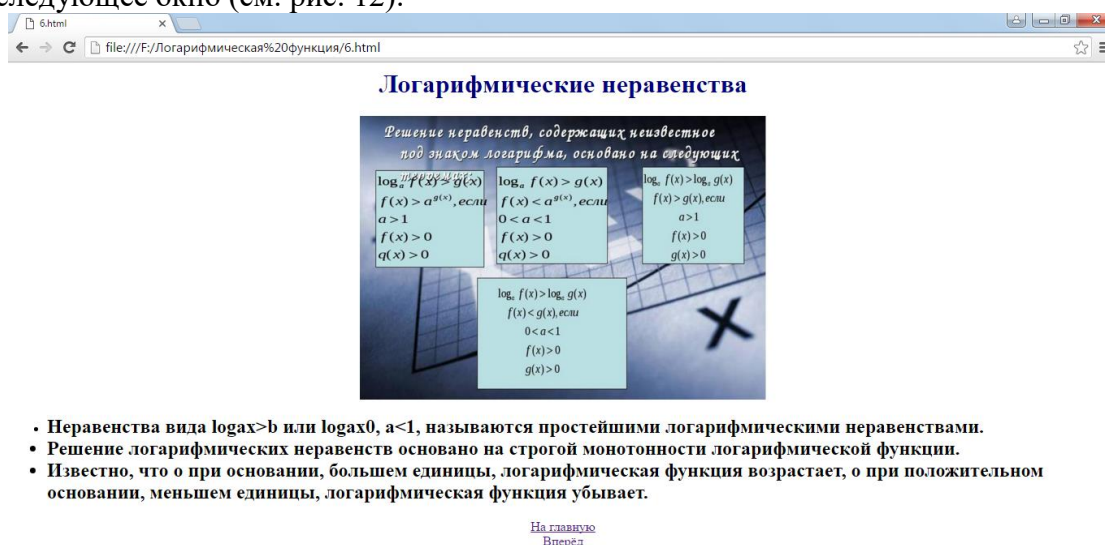


Рис. 11. Логарифмические уравнения

При нажатии на гиперссылку «Логарифмические неравенства» на главной странице откроется следующее окно (см. рис. 12):



- Неравенства вида $\log_a x > b$ или $\log_a x < b$, $a < 1$, называются простейшими логарифмическими неравенствами.
- Решение логарифмических неравенств основано на строгой монотонности логарифмической функции.
- Известно, что о при основании, большем единицы, логарифмическая функция возрастает, о при положительном основании, меньшем единицы, логарифмическая функция убывает.

Рис.12. Логарифмические неравенства

При нажатии на ссылку «Вперёд» откроется следующая страница (см. рис. 13):

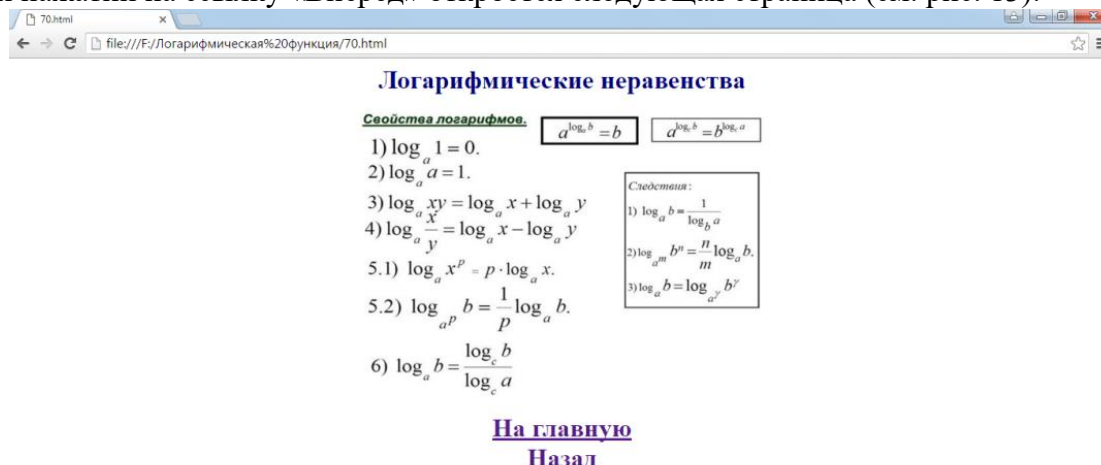


Рис. 13. Логарифмические неравенства

Обучающимися в ходе исследования успеваемости по математике были проведены опросы среди студентов 1 курса ГБПОУ АО «Астраханский колледж культуры и искусств» специальностей «Социально-культурная деятельность», «Библиотечное дело» и «Инструментальное исполнительство». Успеваемость по математике после проектной работы повысилась.

Список литературных источников

1. Положение об индивидуальных проектах по дисциплинам общеобразовательного цикла ГБПОУ АО «Астраханский колледж культуры и искусств» [Электронный ресурс]. URL: <http://astrcolcult.ru/documents/ps-ind-obs.pdf> (дата обращения: 06.04.2017)

THE USE OF INFORMATION TECHNOLOGY IN RESEARCH WORK IN THE LESSONS OF MATHEMATICS

Y.P. Kirilina
teacher of mathematics and computer science
serene06@mail.ru
Astrakhan

Astrakhan College of Culture and Arts

Abstract. This article gives an example of the use of meta-subject learning outcomes in mathematics and informatics at the Astrakhan College of Culture and Arts. A detailed research project on mathematics, carried out by means of information technology, is described in detail.

Keywords: GEF, mathematics, information technology, research work, research project, project work, HTML.

References

1. Polozhenie ob individual'nykh proektakh po distciplinam obshcheobrazovatel'nogo tcicla GBPOU AO «Astrahanskii` kolledzh kul'tury` i iskusstv» [Electronic resource] [The situation of the individual projects on subjects of general education cycle GBPOU JSC Astrakhan College of culture and arts"]. URL: <http://astrcolcult.ru/documents/ps-ind-obs.pdf> (Accessed: 06.04.2017)

УДК
372.851

**СТИМУЛИРОВАНИЕ И МОТИВАЦИЯ
УЧЕБНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В СТАРШИХ КЛАССАХ
НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ**

Редькина Любовь Андреевна
магистрант
laba_redkina@mail.ru
г. Елец

магистрант института математики,
естествознания и техники
Елецкого государственного
университета им. И. А. Бунина

Аннотация. Статья посвящена некоторым аспектам стимулирования и мотивации учебной деятельности на уроках математики. Рассмотрены: отличительные факторы, свойственные учебной мотивации; виды мотивов; методы стимулирования и мотивации учебной деятельности. Также упоминаются возрастные отличия мотивов старшеклассников от школьников другого возраста. Как известно, человек формирует и проявляет себя в деятельности. Деятельность – специфический вид активности человека, обращенный, в первую очередь, на изучение и изменение окружающей действительности, самого себя и условий своего существования. В процессе деятельности люди используют свои способности и создают объекты материальной и духовной культуры, при этом сохраняя и улучшая окружающую среду, формируют общество и то, что не могло бы существовать без их активности. На протяжении всей своей жизни человек совершает огромное множество видов деятельности. Каждая деятельность занимает в жизни разное положение, в определенные этапы одна из них бывает ведущей, доминирующей. Для школьника ведущей является учебная деятельность.

Ключевые слова: учебная деятельность; стимулирование; мотивация; виды мотивов; методы стимулирования и мотивации учебной деятельности; адекватная и неадекватная самооценка старшеклассников.

В настоящий момент времени изучение основ математики является весомым компонентом школьного образования, вследствие чего математика обладает существенным образовательным, развивающим и воспитательным потенциалом. Достижение успеха при изучении данного учебного предмета обуславливается желанием обучающихся постигнуть основы науки. Итак, задача формирования положительных мотивов обучения становится в ряд главных в обучении математике, так как высокий уровень мотивации учебной деятельности на уроке, повышение интереса к учебному предмету – это первое обстоятельство, указывающее на эффективность урока.

Учебная мотивация представляет собой частный вид мотивации, которая включена в учебную деятельность. Под мотивом учебной деятельности обычно понимаются все факторы, определяющие проявление учебной активности (потребности, цели, установки, чувство долга, интересы и так далее).

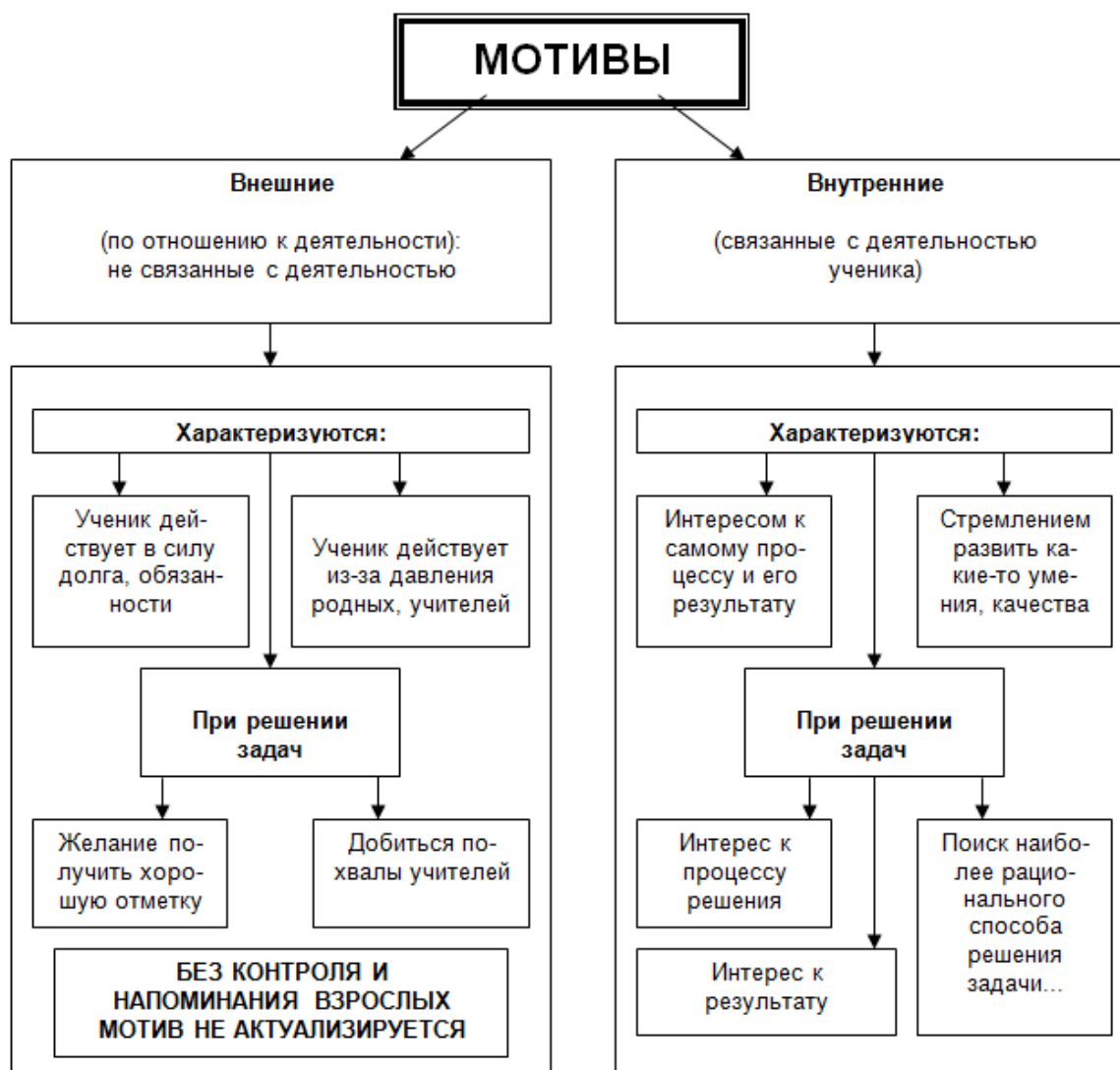
Существует несколько классификаций мотивов, но отдадим свое предпочтение варианту классификации мотивов по А. К. Марковой, характеризующей отношение к самой деятельности [2].

По той же самой классификации внешние мотивы называют социальными мотивами, а внутренние – познавательными.

Рассмотрим мотивацию учебной деятельности и поведения школьников в старших классах. Мотивом – базисом обучения старшеклассников – является подготовка к поступлению в желаемое профессиональное учебное заведение. Именно поэтому половина старшеклассников уже имеет свой заранее выработанный профессиональный план, который включает в себя как основное, так и запасное профессиональное предпочтение. Следовательно,

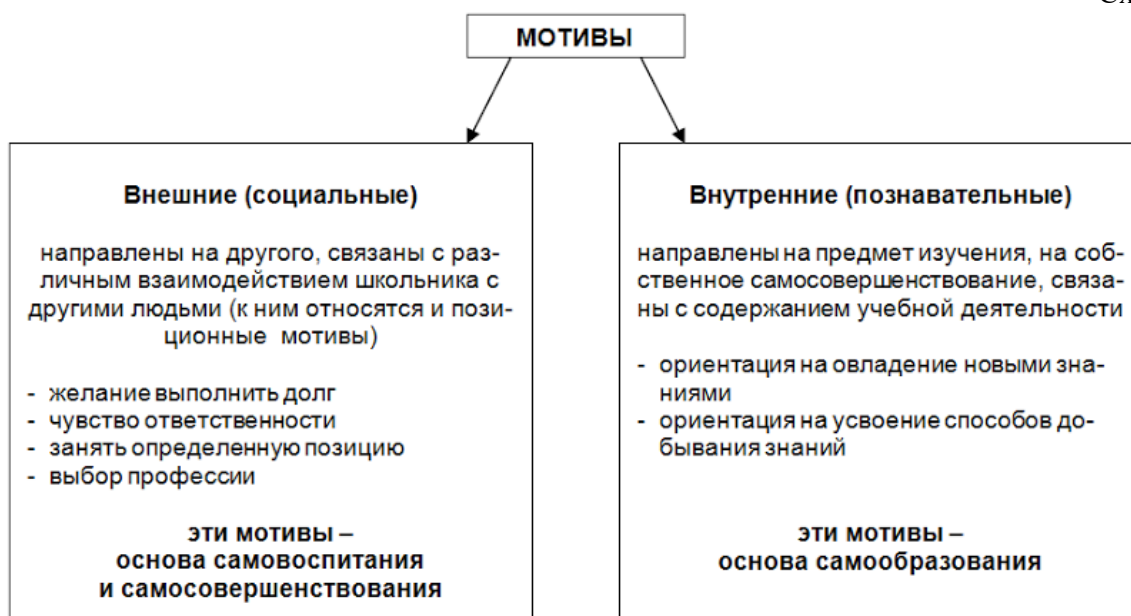
основной целью для выпускников старшей школы является получение знаний, что должно благотворно повлиять на прием в намеченные учебные учреждения.

Схема 1. Классификация мотивов по А.К. Марковой



Так, советский психолог Л. С. Выготский высказывался о том, что выбор профессии – это не только выбор профессии, а еще и выбор собственного жизненного пути, поиск своего места в обществе [1]. Хотя, выбор будущей профессии может носить и не осознанный характер (принятие решения за учащегося родителями, влияние на выбор случайно возникшего интереса или окружения). В таком случае этот выбор может быть не связанным с мотивацией обучения.

Схема 2.



Мотивы обучения у старшеклассников существенно отличаются от таковых у подростков, это объясняется намечаемой профессиональной деятельностью выпускников. Так, подростки делают выбор в сторону той профессии, которая соответствует интересующему их предмету. В то время как старшеклассники проявляют интерес к предметам, которые пригодятся в подготовке к выбранной профессии. По этому поводу Л. И. Божович говорила, что первые смотрят в будущее с позицией настоящего, а вторые – на настоящее с позицией будущего.

В старших классах отметке придают значение критерия знания, в отличие от подростков, для которых получение хороших отметок лишь цель для завоевания определенного положения в своем классе. Роль побудителя для выпускников берет на себя стремление к получению знаний. Из этого можно сделать вывод о том, что роль отметки как цели обучения с определенным возрастом изменяется.

Итак, чем старше школьники, тем больше уменьшается количество мотиваторов, которые выступают стимулами или основаниями их поведения. Возможно, это связано с влиянием генерирующейся у них системой взглядов на окружающий мир, которая уже достаточно устойчивая в этом возрасте, возникают собственные мотиваторы (личностные диспозиции, особенности личности). Возникает некая потребность выработать свои идеи, некое стремление разобраться во всем самому.

Стимулирование и мотивация учебной деятельности взаимно дополняют друг друга, их связь играет важную роль в вовлечении, стимулировании и сохранении интереса на уроке. Для получения положительного результата в данных процессах учитель пользуется методами стимулирования и мотивации обучения. Методами стимулирования и мотивации обучения обычно называют методы, устремленные на формирование и закрепление позитивного отношения к обучению. Выделяют две подгруппы таких методов:

1. Методы стимулирования и мотивации интереса к обучению (формирование эмоциональных нравственных переживаний, ситуаций новизны, внезапности, остроты; создание различных ситуаций; беседа, рассуждение о разных жизненных ситуациях; познавательные игры и тому подобное).
2. Методы стимулирования долга и ответственности (интерпретация индивидуальной и социальной значимости обучения; требования, поощрения и наказания).

Одной из основных задач педагогов является стимулирование и мотивация учебной деятельности учащихся. Этот процесс складывается из взаимодействия учителя и учеников, обеспечивающего мотивацию учебной деятельности учащихся. Совместное применение разнообразных средств и методов формирования учебной мотивации и стимулирования позволяет получить наиболее желаемый результат. Мотивация и стимулирование познавательной деятельности на уроках математики оказывает положительное влияние на уровень обучаемости школьников и по другим предметам.

Список литературы

1. Выготский Л.С. Педагогическая психология. М.: АСТ, Астрель, Люкс, 2005. 671 с.
2. Маркова А.К. Формирование интереса к учению у школьников. М.: Педагогика, 1986.

STIMULATION AND MOTIVATION EDUCATIONAL ACTIVITY IN SENIOR CLASSES AT THE LESSONS OF MATHEMATICS

Redkina L.A. master laba_redkina@mail.ru Elets	Bunin Yelets State University
--	-------------------------------

Summary. The article is devoted to some aspects of stimulating and motivating learning activities in math lessons. Considered: the distinctive factors inherent in the training motivation; types of motives; methods of stimulating and motivating learning activities. It also mentions the age differences of the motives of high school students from schoolchildren of another age. As you know, a person forms and manifests himself in activity. Activity - a specific kind of human activity, addressed primarily to the study and change of the surrounding reality, itself and the conditions of its existence. In the process of activity people use their abilities and create objects of material and spiritual culture, while preserving and improving the environment, form a society and something that could not exist without their activity. Throughout his life, a person makes a huge variety of activities. Each activity takes a different position in life, at certain stages one of them is leading, pre-mining. For the school-boy leading is the learning activity.

Keywords: educational activity; stimulation; motivation; types of motives; methods of stimulating and motivating learning activities; adequate and inadequate self-esteem of high school students.

References

1. Vy`gotskii` L.S. (2005) Pedagogicheskaiia psihologiiia [Pedagogical Psychology] M.: AST, Astrel`, Liuks. 671 p.
2. Markova A.K. (1986) Formirovanie interesa k ucheniiu u shkol`nikov [Formation of interest to teaching students] M.: Pedagogika.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Абдурашидов Акмалжон Аблакулович	ассистент Самаркандского государственного архитектурно-строительного института (Узбекистан) abdira@mail.ru
A.A. Abdurashidov	assistent SamSIAC, Samarkand (Uzbekistan) abdira@mail.ru
Ачилов Уткир	преподаватель математики Самаркандского профессионального колледжа искусства
U. Achilov	teacher, Samarkand professional college of Art
Бегматов Акрам Хасанович	д.ф.-м.н., профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений Самаркандского государственного университета (Узбекистан) akrambegmatov@mail.ru
A.N. Begmatov	Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor, Samarkand State University (Uzbekistan) akrambegmatov@mail.ru
Буриев Толибжон Эргашевич	к.ф.-м.н., доцент кафедры алгебры и геометрии механико-математического факультета Самаркандского государственного университета tolibjonb@yahoo.com
T.E. Buriyev	Cand. Sci. (Phys.-Math.), associate professor, Samarkand State University tolibjonb@yahoo.com
Вендина Алла Анатольевна	к.ф.-м.н., доцент кафедры математики и информатики Ставропольского государственного педагогического института roven-ka@yandex.ru
A.A. Vendina	Cand. Sci. (Phys.-Math.), associate professor, Stavropol State Pedagogical Institute roven-ka@yandex.ru
Дворяткина Светлана Нико- лаевна	д.п.н., профессор кафедры математики и методики ее преподавания Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина sobdvor@yelets.lipetsk.ru
S.N. Dvoryatkina	Dr. Sci. (Pedagogy), professor, Bunin Yelets State University sobdvor@yelets.lipetsk.ru
Докучаева Александра Нико- лаевна	ассистент кафедры высшей математики Балтийского государственного технического университета «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова a.n.dokuchaeva@gmail.com
A.N. Dokuchaeva	assistant, Baltic State Technical University «VOENMEH» named after D. F. Ustinov, Saint-Petersburg, a.n.dokuchaeva@gmail.com
Емельянов Валентин Юрьевич	к.т.н., доцент, профессор кафедры систем управления и компьютерных технологий Балтийского государственного технического

	университета «ВОЕНМЕХ» им. Д.Ф. Устинова v.emelyanov@bk.ru
V.U. Emelianov	Cand. Sci. (Engineering), associate professor, Baltic State Technical University «VOENMEH» named after D. F. Ustinov, Saint-Petersburg v.emelyanov@bk.ru
Иголина Елена Викторовна	к.ф.-м.н., доцент кафедры математического моделирования и компьютерных технологий Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина elenaigonina7@mail.ru
E.V. Igonina	с. в.-м. н., senior teacher, Bunin Yelets State University elenaigonina7@mail.ru
Исмоилов Алишер Сидикович	ассистент кафедры дифференциальных уравнений Самаркандского государственного университета (Узбекистан) alisher_5869@rambler.ru
A.S. Ismoilov	assistant, Samarkand State University (Uzbekistan) alisher_5869@rambler.ru
Кирилина Юлия Павловна	преподаватель математики и информатики, Астраханский колледж культуры и искусств serene06@mail.ru
Y.P. Kirilina	teacher of mathematics and computer science, Astrakhan College of Culture and Arts serene06@mail.ru
Кузнецова Татьяна Ивановна	д.п.н., профессор института русского языка и культуры Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова kuzti45@gmail.com
T.I. Kuznetsova	Dr. Sci. (Pedagogy), professor, Lomonosov Moscow State University, Institute of Russian Language and Culture kuzti45@gmail.com
Лопухин Арсений Максимович	студент Московского государственного института международных отношений (университета) Министерства иностранных дел Российской Федерации
A.M. Lopukhin	student, Moscow state Institute of international relations (University) of the Ministry of foreign Affairs of the Russian Federation
Максимов Дмитрий Игоревич	ассистент кафедры прикладной математики и информатики Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина timonpm@mail.ru
D.I. Maximov	assistant, Bunin Yelets State University timonpm@mail.ru

Малиатаки Виктория Викторовна	к.п.н., старший преподаватель кафедры математики и информатики Ставропольского государственного педагогического института maliataki@yandex.ru
V.V. Maliataki	Cand. Sci. (Pedagogy), Senior Lecturer, Stavropol State Pedagogical Institute maliataki@yandex.ru
Мардонов Эшим Муратович	к.п.н., доцент кафедры теории вероятностей и математической статистики Самаркандского государственного университета
E.M. Mardonov	Cand. Sci. (Pedagogy), associate professor, Department of Probability and Statistics of Samarkand State University
Мухтаров Яхъё	к.ф.-м.н., доцент кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета Самаркандского государственного университета ya-muxtarov@mail.ru
Y. Mukhtarov	Cand. Sci. (Phys.-Math.), associate professor Samarkand State University, the faculty of Mechanics and Mathematics ya-muxtarov@mail.ru
Норкулов Эрали Аслон угли	старший преподаватель кафедры математики и информатики Академического лицея при Самаркандском государственном институте иностранных языков (Узбекистан) e.norqulov@mail.ru
E.A. Norkulov	Senior Lecturer, Samarkand State University e.norqulov@mail.ru
Останов Курбон	к.п.н., старший преподаватель кафедры теории вероятностей и математической статистики Самаркандского государственного университета ostonovk@mail.ru
K. Ostanov	Cand. Sci. (Pedagogy), Senior Lecturer, Department of Probability and Statistics of Samarkand State University ostonovk@mail.ru
Подаяева Наталия Георгиевна	д.п.н., профессор, кафедра прикладной математики и информатики Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина podaeva@mail.ru
N.G. Podayeva	d.p.n., professor, Bunin Yelets State University podaeva@mail.ru
Редькина Любовь Андреевна	магистр, институт математики, естествознания и техники Елецкого государственного университета им. И. А. Бунина laba_redkina@mail.ru
L.A. Redkina	Bunin Yelets State University

Солеев Ахмаджон Солеевич	д.ф.-м.н., профессор, декан механико-математического факультета Самаркандского государственного университета (Узбекистан) asoleev@yandex.ru
A.S. Soleev	Dr. Sci. (Phys.-Math.), professor, Samarkand State University, The faculty of Mechanics and Mathematics asoleev@yandex.ru
Тарова Анастасия Дмитриевна	магистрант института математики, естествознания и техники Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина tarova@bk.ru
A.D. Tarova	undergraduate, Bunin Yelets State University tarova@bk.ru
Усмонов Уктам Уткурович	магистрант кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета Самаркандского государственного университета usmonovuktam93@gmail.ru
U.U. Usmonov	master, Samarkand State University, The department of Masters usmonovuktam93@gmail.ru
Хатамов Ахтам	д.ф.-м.н., доцент, профессор кафедры математической физики и функционального анализа механико-математического факультета Самаркандского государственного университета (Узбекистан) khatamov@rambler.ru
A. Khatamov	Dr. Sci. (Phys.-Math.), associate professor, Samarkand State University khatamov@rambler.ru
Чернобровкина Ирина Ивановна	к.п.н, доцент кафедры алгебры и математических методов в экономике Орловского государственного университета имени И.С. Тургенева iichernobrovkina@yandex.ru
I.I. Chernobrovkina	Cand. Sci. (Pedagogy), associate professor, Orel State University iichernobrovkina@yandex.ru
Эргашев Аслиддин	преподаватель математики Самаркандского профессионального колледжа искусства
A. Ergashev	teacher, Samarkand professional college of Art

Научный журнал

CONTINUUM

МАТЕМАТИКА. ИНФОРМАТИКА.

ОБРАЗОВАНИЕ

Выпуск № 3(7) / 2017

Редактор – Н.П. Безногих

Компьютерная верстка и дизайн обложки – М.В. Подаев

Техническое исполнение – В.М. Гришин

Формат А-4 (111 п.л).

Гарнитура Times. Печать трафаретная

Печ.л. 6,9. Уч.-изд.л. 6,4

Тираж 1000 экз. Заказ № 96

Подписано в печать 25.09.17

Дата выхода в свет 26.09.17

Свободная цена

Адрес редакции и издателя:

399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1

E-mail: tarov1970@rambler.ru

Сайт редколлегии: <http://pmi.elsu.ru>

Подписной индекс журнала **№64987** в каталоге периодических изданий
органов научно-технической информации агентства «Роспечать»

Отпечатано с готового оригинал-макета на участке оперативной полиграфии
Елецкого государственного университета им. И.А. Бунина
399770, Липецкая область, г. Елец, ул. Коммунаров, 28,1

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина»
399770, Липецкая область, г. Елец, Коммунаров, 28,1