

УДК
378.147**МЕТОДЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ ПРИ РЕШЕНИИ
ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРИИ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ****Тырымов Александр Александрович**

к. ф.-м. н., доцент

Шведов Евгений Геннадьевич

к. ф.-м. н., доцент

Волгоградский государственный

технический университет

Волгоградский государственный

технический университет

Аннотация. В статье на основе существующей школьной программы и форме, доступной для эффективного восприятия учащимися, приведены методы аналитической геометрии, способствующие более глубокому изучению методов решения задач стереометрии. На решении конкретных задач показано применение метода координат для построения сечений геометрических фигур, для определения углов между плоскостями, прямыми, а также вычисления расстояний между плоскостями, параллельными или скрещивающимися прямыми. Основное внимание уделено построению алгоритмов, помогающих в решении типичных задач школьного курса стереометрии. Приведены формулы, определяющие взаимное расположение основных объектов линейной аналитической геометрии. Главная их цель — способствовать строгому построению соответствующего раздела стереометрии, использующего современный математический язык и подготовить ученика к восприятию мощного аппарата векторной алгебры.

Ключевые слова: метод координат, плоскость, прямая в пространстве, углы, расстояния

Для цитирования: Тырымов А.А., Шведов Е.Г. Методы аналитической геометрии при решении задач стереометрии ЕГЭ по математике // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2025. № 4 (40). С. 57–72. doi.org/10.24888/2500-1957-2025-4-57-72

Права: © А.А. Тырымов, Е.Г. Шведов (2025). Опубликовано Елецким государственным университетом им. И.А. Бунина. Открытый доступ на условиях лицензии CC BY 4.0

Введение

Предметом аналитической геометрии является исследование свойств геометрических фигур при помощи исчисления, т.е. алгебраическими методами. Это исследование проводится на основе метода координат, сущность которого заключается в том, что геометрическим объектам некоторым стандартным способом сопоставляются числа, уравнения или системы уравнений. В результате метрические соотношения геометрических объектов будут представлены посредством совокупности алгебраических уравнений, описывающих этот объект.

В свою очередь алгебраические зависимости (уравнения, неравенства, системы уравнений) можно интерпретировать как геометрические объекты, получая наглядное представление чисто алгебраических задач.

При этом широкое использование векторной алгебры позволяет достичь единства аналитического и геометрического методов исследования. Только тогда, как отмечал Ж.Л. Лагранж, «когда эти науки (алгебра и геометрия) объединились, они

энергично поддерживали друг друга и быстро зашагали к совершенству» (Moritz, 1958, 81).

Основы метода аналитической геометрии заложил Р. Декарт. Введение координат стало второй после «Начал» Евклида фундаментальной формулировкой геометрии. Это позволило выразить геометрические задачи алгебраически, а также открыть путь к изучению геометрических объектов с помощью аппарата математического анализа. Ввиду своей универсальности, метод аналитической геометрии стал весьма мощным орудием математических исследований и широко используется в механике, физике и других областях естествознания.

В статье рассматриваются методы решения стереометрических задач, основанные на применении элементов аналитической геометрии. Задачи, в которых можно успешно использовать этот метод, в настоящее время постоянно встречаются в вариантах Единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике и на олимпиадах различного уровня.

Ввиду ограничения времени на экзамене чисто геометрическое решение может вызвать значительные затруднения. Такой метод решения обычно требует дополнительных построений, подробных обоснований, а также хорошо развитого пространственного воображения, которое позволяет проводить исследование трёхмерных фигур на плоском чертеже.

Но на экзамене важен результат. В то же время использование алгоритмов аналитической геометрии позволяет весьма эффективно решать достаточно трудные задачи.

Работа преследует следующую основную цель: обучить учащихся общим методам приложения анализа к геометрии и добиться прочных навыков в практическом использовании векторной алгебры. В статье рассматриваются основные типы задач стереометрии. Они связаны с построением сечений, вычислением углов между прямыми, плоскостями, определением расстояний от точки до плоскости и прямой, а также между параллельными и скрещивающимися прямыми. Все представленные в работе задачи адаптированы под структуру ЕГЭ. Но прежде чем приступить к решению конкретных задач, целесообразно привести некоторые формулы и соотношения, которые используются в дальнейшем.

Рассмотрим задачу о делении отрезка в заданном отношении и приведём вывод уравнения прямой в пространстве. Сведения о них в школьном курсе геометрии практически не встречаются, но знать их очень полезно.

Задача о делении отрезка в заданном отношении

Даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Требуется определить координаты точки, лежащей на отрезке M_1M_2 и делящей длину этого отрезка в отношении $m:n$.

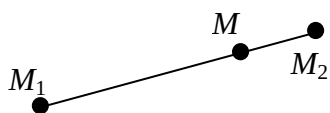


Рис. 1. К отысканию координат точки деления отрезка

Решение. Пусть точка $M(x, y, z)$ – искомая. Векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$ коллинеарны и одинаково направлены (рис. 1). Поэтому они отличаются только длиной.

По условию $|\overrightarrow{M_1M}| : |\overrightarrow{MM_2}| = m:n$.

Следовательно, $n|\overrightarrow{M_1M}| = m|\overrightarrow{MM_2}|$.

Из равенства векторов следует равенство их координат. Так как $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$, $\overrightarrow{MM_2} = \{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\}$,

то

$n(x - x_1) = m(x_2 - x), n(y - y_1) = m(y_2 - y), n(z - z_1) = m(z_2 - z)$, откуда

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m}, y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m}, z = \frac{nz_1 + mz_2}{n + m}.$$

Полагая $\lambda = m:n$, получим

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \quad (1)$$

В частности, если M – середина отрезка M_1M_2 , то $\lambda = 1$, и координаты точки M будут

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, y = \frac{y_1 + y_2}{2}, z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Уравнение прямой в пространстве

Прямую линию можно задать двумя лежащими на ней точками или, что фактически то же самое, точкой, лежащей на прямой и вектором, коллинеарным прямой (Тырымов, 2009).



Рис. 2. К выводу уравнения прямой в пространстве

Пусть задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащая на прямой и $\vec{s} = \{l, m, n\}$ – вектор, коллинеарный прямой (рис. 2).

Обозначим через x, y, z координаты произвольной (текущей) точки M на прямой.

Тогда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$ коллинеарны, т.е. $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{s}$. Из этого векторного равенства получаются три скалярных уравнения

$$x - x_0 = lt, y - y_0 = mt, z - z_0 = nt$$

или

$$x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt. \quad (2)$$

Полученные уравнения называются *уравнениями прямой в параметрической форме* или *параметрическими уравнениями прямой*. Меняя значения параметра t от $-\infty$ до $+\infty$, получим любую точку прямой. Вектор $\vec{s}$ называется *направляющим вектором прямой*.

Если прямая не перпендикулярна ни одной из координатных осей, т.е. все координаты вектора $\vec{s}$ отличны от нуля, то, исключая из системы уравнений (2) параметр t , получим уравнения

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

которые называются *каноническими уравнениями прямой*, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Эта форма уравнений представляет собой способ задания прямой как линии пересечения двух плоскостей

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{z - z_0}{n} \text{ и } \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Методические рекомендации при решении задач стереометрии приёмами аналитической геометрии (метод координат)

При решении любой стереометрической задачи важно уделить внимание чертежу. Дело в том, что плоский чертёж пространственной фигуры даёт искажение и, как результат, изображение исходного тела теряет ряд свойств, присущих оригиналу. В то же время чертёж должен быть наглядным, то есть выражать пространственное представление об изображаемой геометрической фигуре. Поэтому так называемые невидимые линии следует изображать пунктиром. Чертёж должен быть достаточно крупным, поскольку первоначально нарисованный чертёж в процессе решения задачи

должен дополняться новыми построениями. При этом не следует опасаться выхода за пределы основного контура чертежа.

Применение метода координат требует введения прямоугольной декартовой системы координат. Начало координат удобно выбрать в центре основания правильного многоугольника рассматриваемой фигуры или в какой-нибудь вершине основания. Если имеется симметрия, то при выборе начала координат это следует учесть. Используя числовые (или вводя буквенные) обозначения для длин рёбер, высоты и т.д. геометрической фигуры, установить координаты тех точек, которые потребуются для составления уравнений плоскостей или прямых, необходимых для решения задачи. Формулы, определяющие основные объекты линейной аналитической геометрии и их взаимное расположение, приведены в Таблице 1 (Тырымов, 2009).

Методические рекомендации к решению задач на построение сечения. С задачами на построение сечений ученик встречается как в школьном курсе стереометрии, так и в заданиях ЕГЭ по математике. В некоторых случаях построение сечений оказывается затруднительным. В то же время имеется возможность решения этой задачи посредством нахождения уравнения плоскости. Она может проходить через точки, координаты которых могут быть найдены из условия задачи. Например, плоскость может проходить через точку, делящую ребро в заданном отношении или точку пересечения медиан боковой грани пирамиды. Координаты таких точек можно легко определить, используя координаты концов отрезка или вершин треугольника. Если по условию задачи плоскость проходит через известную точку параллельно или перпендикулярно некоторому ребру фигуры, то при выборе вектора нормали плоскости следует использовать критерий, устанавливающий взаимное расположение прямой и плоскости. Имея уравнение плоскости, появляется возможность определить точки пересечения плоскости с оставшимися рёбрами пирамиды или призмы. Этого обычно достаточно, чтобы сечение было полностью определено.

Задача 1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром длины 1. Точка P – середина ребра $A_1 D_1$, точка Q делит отрезок AB_1 в отношении $2:1$, считая от вершины A , R – точка пересечения отрезков BC_1 и $B_1 C$.

А) Построить сечение куба плоскостью PQR .

Б) Найти периметр сечения и отношение, в котором плоскость сечения делит диагональ куба AC_1 . (Калинин, 1996).

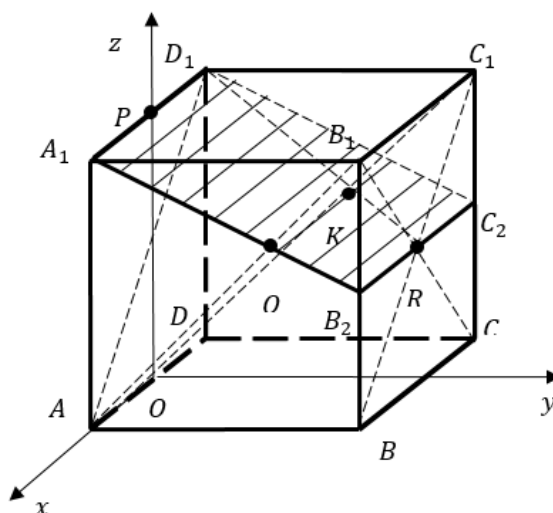


Рис. 3. Чертёж к задаче 1

Решение.

А) Введём прямоугольную систему координат так, как показано на рис. 3. Координаты точек P и R легко определяются из условия задачи: $P(0; 0; 1)$, $R\left(0; 1; \frac{1}{2}\right)$.

Координаты точки Q , делящей отрезок AB_1 в отношении $\lambda = 2$, находятся по формулам (1) через координаты точек $A(0,5; 0; 0)$ и $B_1(0,5; 1; 1)$. В результате получим точку $Q\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Составим теперь уравнение плоскости, проходящей через точки P , Q , R . После несложных стандартных расчётов уравнение плоскости PQR будет представлено в виде

$$y + 2z - 2 = 0 \quad (3)$$

Теперь определим точки пересечения этой плоскости с рёбрами куба:

- С ребром AA_1 . Пусть $A_2(0,5; 0; z_{A_2})$ – точка пересечения плоскости сечения с ребром AA_1 . Тогда координаты точки A_2 удовлетворяют уравнению (3). В результате получим $2z_{A_2} - 2 = 0$, откуда $z_{A_2} = 1$, т.е. точка A_2 совпадает с точкой A_1 .
- С ребром BB_1 . Пусть $B_2(0,5; 1; z_{B_2})$ – точка пересечения плоскости сечения с ребром BB_1 . Аппликату точки B_2 найдём из уравнения $1 + 2z_{B_2} - 2 = 0$. Получим $z_{B_2} = 0,5$. Таким образом, B_2 – середина ребра BB_1 .

Аналогично рассуждая, находим координаты точки пересечения секущей плоскости с рёбрами CC_1 и DD_1 . Получим, что точкой пересечения с ребром CC_1 будет точка $C_2(-0,5; 1; 0,5)$ – середина этого ребра, с ребром DD_1 – точка $D_2(-0,5; 0; 1)$, которая совпадает с точкой D_1 . Таким образом, искомое сечение полностью определено: это прямоугольник $A_1B_2C_2D_1$ со сторонами $A_1B_2 = \sqrt{1 + 0,25} = 0,5\sqrt{5}$ и $B_2C_2 = 1$. Периметр сечения $P = 2(A_1B_2 + B_2C_2) = 2(1 + 0,5\sqrt{5}) = 2 + \sqrt{5}$.

Б) Отношение, в котором плоскость сечения делит диагональ AC_1 , также найдем методом координат. Обозначим через $K(x_K, y_K, z_K)$ точку пересечения диагонали AC_1 и плоскости (3). Пусть $\lambda = \frac{AK}{KC_1}$ – искомое отношение. Координаты точки K выразим через координаты точек $A(0,5; 0; 0)$ и $C_1(-0,5; 1; 1)$. Используя формулы (1), получим

$$x_K = \frac{0,5 - 0,5\lambda}{1 + \lambda}, y_K = \frac{0 + \lambda}{1 + \lambda}, z_K = \frac{0 + \lambda}{1 + \lambda}.$$

Подставляя выражения для координат точки K в уравнение (3), имеем

$$\frac{\lambda}{1+\lambda} + 2 \frac{\lambda}{1+\lambda} - 2 = 0, \text{ откуда } \lambda = 2.$$

Итак, $AK:KC_1 = 2$.

Геометрический способ решения этой задачи приведён в (Калинин, 1996): при построении сечения авторы используют метод параллельного проектирования, а отношение, в котором плоскость сечения делит диагональ AC_1 , находят из подобия треугольников AD_1K и C_1RK .

Вариант решения. Составим уравнение прямой, на которой лежит диагональ куба AC_1 . Используя координаты точек A и C_1 , получим направляющий вектор этой прямой $\vec{s} = \{-1; 1; 1\}$. Канонические уравнения прямой, проходящей через точку $A(0,5; 0; 0)$ принимают вид

$$\frac{x - 0,5}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1},$$

откуда можем получить параметрические уравнения прямой AC_1 :

$$x = 0,5 - t; y = t; z = t. \quad (4)$$

Для нахождения точки пересечения этой прямой и плоскости $y + 2z - 2 = 0$, подставим полученные соотношения в уравнение плоскости. Получим $t + 2t - 2 = 0$, откуда $t = 2/3$. Подставив найденное значение параметра в уравнения (4), найдём координаты точки $K: x_K = -\frac{1}{6}; y_K = \frac{2}{3}; z_K = \frac{2}{3}$, т.е. $K\left(-\frac{1}{6}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Тогда $\overrightarrow{AK} = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right\}, \overrightarrow{KC_1} = \left\{-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$, откуда $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{KC_1}$ и $|\overrightarrow{AK}|:|\overrightarrow{KC_1}| = 2$.

Ответ: Б) $2 + \sqrt{5}; 2$.

Методические рекомендации к решению задач на вычисление углов между прямыми, прямой и плоскостью, плоскостями

Задачи на вычисление углов в вариантах ЕГЭ встречаются достаточно часто. Они присутствуют как в задачах на доказательство того или иного расположения элементов геометрических фигур, так и в расчётной части задания. При геометрическом способе доказательства приходится опираться на признаки параллельности прямых, прямой и плоскости, перпендикулярности прямых, плоскостей, прямой и плоскости, теорему о трёх перпендикулярах и т.д. В расчётной части задания часто помогут теорема косинусов, метрические соотношения в прямоугольном треугольнике и т.д. Но для вычисления углов в стереометрии и доказательства параллельности или перпендикулярности прямых, а также прямой и плоскости можно применить векторную алгебру. Используется скалярное произведение направляющих векторов прямых и нормальных векторов плоскостей. В результате можно получить все необходимые формулы, определяющие взаимное расположение объектов линейной аналитической геометрии. Они представлены в таблице как в векторной, так и в координатной форме.

Задача 2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с рёбрами $AB = 10, AD = 4, AA_1 = 3,25$. На рёбрах BB_1 и CC_1 выбраны точки P и Q так, что $BP = 1, CQ = 0,5$. Через эти точки проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

А) Докажите, что $A_1 K:KB_1 = 2:3$, где K — точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$;

Б) Найдите угол между плоскостью основания ABC и плоскостью α .

Решение. А) Для построения плоскости, проходящей через точки P и Q параллельно диагонали параллелепипеда BD_1 :

1) в плоскости BDD_1 через точку P проведём прямую, параллельную BD_1 ; обозначим через O и M точки пересечения этой прямой с отрезком $B_1 D_1$ и осью Oz соответственно;

2) через точки M и Q в плоскости CDD_1 проведём прямую, пересекающую ребро $D_1 C_1$ в точке T ;

3) через точки T и O в плоскости верхней грани параллелепипеда $A_1 B_1 C_1$ проведём прямую, пересекающую ребро $A_1 B_1$ в точке K .

Построение плоскости сечения α завершаем, соединяя точку P с точками K и Q . Сечением является трапеция с основаниями KP и TQ (рис. 4).

Введём прямоугольную систему координат, взяв за её начало вершину D и направив оси Dx, Dy и Dz по лучам DA, DC и DD_1 соответственно (рис. 4).

Для получения уравнения плоскости α выпишем координаты следующих точек: $P(4; 10; 1), Q(0; 10; 0,5), B(4; 10; 0), D_1(0; 0; 3,25)$. Тогда вектор $\overrightarrow{D_1 B} = \{4; 10; -3,25\}$. Пусть $\vec{N} = \{A; B; C\}$ — вектор нормали плоскости α . Из условия параллельности плоскости α и прямой BD_1 следует $\vec{N} \perp \overrightarrow{D_1 B}$.

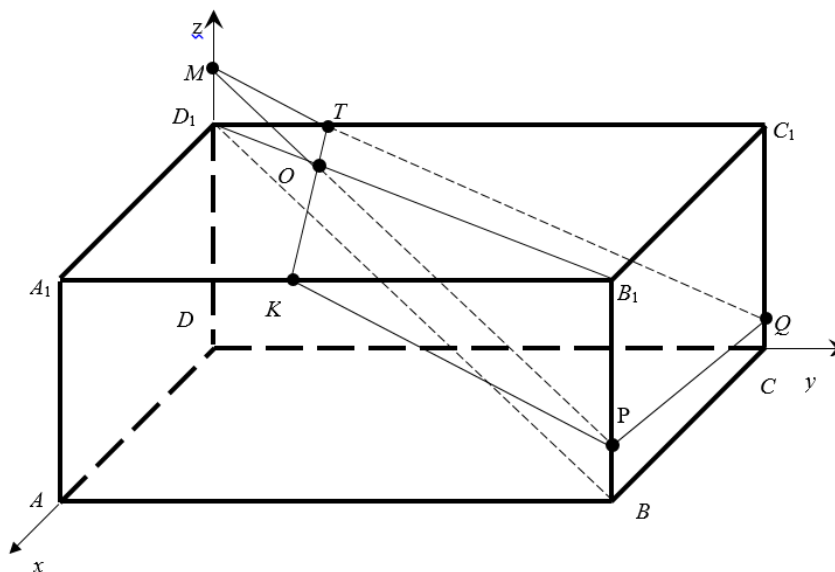


Рис. 4. Чертёж к задаче 2

Используя общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, условие принадлежности точек P и Q этой плоскости, а также равенства нулю скалярного произведения вектора нормали $\vec{N}$ и направляющего вектора прямой $\overrightarrow{D_1B}$, получим

$$\begin{cases} 4A + 10B + C + D = 0, \\ 10B + 0,5C + D = 0, \\ 4A + 10B + 3,25C + D = 0, \end{cases}$$

и, решая эту систему уравнений, выразим коэффициенты A, B, C через D :

$$A = \frac{1}{34}D, B = -\frac{3}{34}D, C = -\frac{4}{17}D.$$

В результате уравнение плоскости α имеет вид $x - 3y - 8z + 34 = 0$.

Найдём координаты точки K – точки пересечения плоскости α с ребром A_1B_1 : поскольку $K(4, y_K, 3,25)$, то из равенства $4 - 3y_K - 8 \cdot 3,25 + 34 = 0$ находим $y_K = 4$.

Тогда $A_1K = 4, KB_1 = 6$ и

$$A_1K:KB_1 = 2:3.$$

Б) Косинус угла φ между плоскостью α и плоскостью основания параллелепипеда равен модулю косинуса угла между векторами нормалей этих плоскостей, то есть между векторами $\vec{N} = \{1; -3; -8\}$ и $\vec{k} = \{0; 0; 1\}$ – ортом оси Dz :

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{k}|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{8}{\sqrt{74}}.$$

$$\text{Итак, } \varphi = \arccos \frac{8}{\sqrt{74}}.$$

$$\text{Ответ. Б) } \varphi = \arccos \frac{8}{\sqrt{74}}$$

Таблица 1.
Взаимное расположение основных объектов линейной аналитической геометрии

Взаимное расположение двух объектов			
Виды объектов	Угол		
	условие параллельности		условие перпендикулярности
Две плоскости: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.	$\cos \varphi = \frac{ \vec{N}_1, \vec{N}_2 }{ \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 }, \text{ где}$ $\vec{N}_i = \{A_i, B_i, C_i\}, (i = 1; 2).$		$(\vec{N}_1, \vec{N}_2) = 0, \text{ т.е.}$ $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$
Две прямые на плоскости: $A_1x + B_1y + D_1 = 0 (y = k_1x + b_1)$, $A_2x + B_2y + D_2 = 0 (y = k_2x + b_2)$.	$\cos \varphi = \frac{ \vec{s}_1, \vec{s}_2 }{ \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 }, \text{ где}$ $\vec{s}_i = \{-B_i, A_i\}, (i = 1; 2) \text{ или}$ $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$		$(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0, \text{ т.е.}$ $A_1A_2 + B_1B_2 = 0, \text{ или}$ $k_1 \cdot k_2 = -1.$
Две прямые в пространстве: $\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1}$, $\frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}$.	$\cos \varphi = \frac{ \vec{s}_1, \vec{s}_2 }{ \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 }, \text{ где}$ $\vec{s}_i = \{l_i, m_i, n_i\}, (i = 1; 2).$		$(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = 0, \text{ т.е.}$ $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0.$
Плоскость и прямая в пространстве: $Ax + By + Cz + D = 0$, $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$.	$\sin \varphi = \cos(\vec{N}, \vec{s}) = \frac{ \vec{N}, \vec{s} }{ \vec{N} \cdot \vec{s} },$ где $\vec{N} = \{A, B, C\}, \vec{s} = \{l, m, n\}$.		$\vec{N} \parallel \vec{s}, \text{ т.е. } \frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$

Задача 3¹. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC , у которого $AB = BC = 1$. Ребро SC перпендикулярно плоскости основания, его длина равна 1. Через середины рёбер SA и SC проведена плоскость α , которая пересекает ребро SB и образует с ним угол 60° .

- А) Докажите, что плоскость α делит ребро SB в отношении $2:1$, считая от вершины B .
 Б) Найдите отношение, в котором эта плоскость делит объём пирамиды.

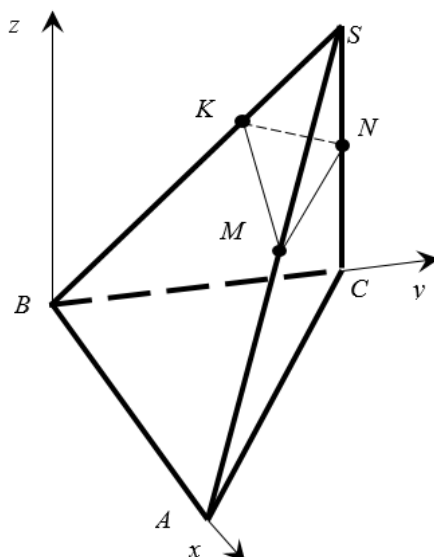


Рис. 5. Чертёж к задаче 3

Решение. А) Введём прямоугольную систему координат, совместив её начало с вершиной B и направляя оси x и y вдоль катетов BA и BC соответственно. Пусть M и N – середины рёбер SA и SC (рис. 5). Найдём координаты следующих точек:

$$A(1; 0; 0), B(0; 0; 0), C(0; 1; 0), S(0; 1; 1), M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), N\left(0; 1; \frac{1}{2}\right).$$

Пусть K – точка пересечения ребра SB и искомой плоскости α . Введём $\lambda = BK:KS$. Используя координаты точек B, S и формулы деления отрезка в данном отношении (1), получим $K\left(0; \frac{\lambda}{1+\lambda}; \frac{\lambda}{1+\lambda}\right)$. Составим уравнение плоскости, проходящей через точки M, N и K . Общее уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$. Подставив в это уравнение координаты точек M, N и K , получим систему уравнений

$$\begin{cases} 0,5A + 0,5B + 0,5C + D = 0, \\ B + 0,5C + D = 0, \\ \frac{\lambda}{1+\lambda}B + \frac{\lambda}{1+\lambda}C + D = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём выражения коэффициентов A, B, C через D :

$$A = B = \frac{1-\lambda}{\lambda}D, C = -\frac{2}{\lambda}D.$$

В результате уравнение плоскости α получит вид

$$(1-\lambda)x + (1-\lambda)y - 2z + \lambda = 0,$$

¹ Постановка задачи аналогична варианту 4, предлагавшегося в 1989 году на механико-математическом факультете НГУ (Белоносов, 2000, с. 52) и отличается тем, что плоскость проведена не через прямую AC , а через середины рёбер SA и SC . Кроме того, в задании нами добавлен пункт Б.

где $\vec{N} = \{1 - \lambda, 1 - \lambda, -2\}$ – вектор нормали этой плоскости.

По условию задачи плоскость α составляет с ребром BS угол 60° . Ребро BS лежит на прямой с направляющим вектором $\vec{BS} = \{0; 1; 1\}$. Синус угла между прямой и плоскостью равен модулю косинуса между вектором нормали $\vec{N} = \{1 - \lambda, 1 - \lambda, -2\}$ плоскости MNK и вектором $\vec{BS} = \{0; 1; 1\}$, т.е.

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{N} \cdot \vec{BS}|}{|\vec{N}| \cdot |\vec{BS}|} = \frac{|\lambda + 1|}{2\sqrt{(1 - \lambda)^2 + 2}}.$$

Так как $\varphi = 60^\circ$, получаем $|\lambda + 1| = \sqrt{3} \sqrt{(1 - \lambda)^2 + 2}$, откуда $\lambda = 2$.

Итак, $BK:KS = 2$.

Б) Найдём объёмы пирамид $SABC$ и $SKMN$. Имеем $V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot SC = \frac{1}{6}$, $V_{SKMN} = \frac{1}{3} S_{MSN} \cdot d$, где $S_{MSN} = \frac{1}{2} MN \cdot NS = \frac{\sqrt{2}}{8}$, а d , высота пирамиды – расстояние от вершины K до плоскости основания MSN этой пирамиды.

Найдём это расстояние. Так как точка K делит отрезок BS в отношении $2:1$, то $K(0; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$. Плоскость ASC , в которой лежит треугольник MSN , параллелен оси z ; её уравнение имеет вид $x + y - 1 = 0$ и расстояние от точки K до основания MSN $d = \frac{|\frac{2}{3} - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$.

Тогда $V_{SKMN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{72}$, объём многогранника $ABCMKN$ $V_{ABCMKN} = \frac{11}{72}$ и искомое отношение объёмов

$$\frac{V_{SKMN}}{V_{ABCMKN}} = \frac{1}{72} : \frac{11}{72} = \frac{1}{11}.$$

Замечание. Отношение объёмов треугольных пирамид $SKMN$ и $SABC$ с равным трёхгранным углом при вершине S можно найти как произведение отношений длин соответствующих рёбер этих пирамид (Шабунин, 2020):

$$\frac{V_{SKMN}}{V_{SABC}} = \frac{SK}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} \cdot \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12},$$

тогда

$$V_{SKMN} = \frac{1}{12} \cdot V_{ABC} = \frac{1}{72}.$$

Ответ. Б) $1/11$.

Методические рекомендации к решению задач по определению расстояния от точки до прямой

Для этого можно воспользоваться одним из следующих способов:

1) на прямой выбрать две точки и в плоскости треугольника, образованного ими и заданной точкой опустить перпендикуляр на прямую. Длина этого перпендикуляра и есть расстояние между точкой и прямой;

2) составить уравнение плоскости, проходящей через заданную точку и перпендикулярную другой прямой, затем найти точку пересечения прямой и плоскости и, наконец, расстояние между точками.

Такой же подход применяется и для определения расстояния между параллельными прямыми.

Задача 4². В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все рёбра равны 2. Точки M, N и K лежат на рёбрах $AA_1, D_1 C_1$ и CC_1 соответственно, причем $A_1 M = \sqrt{3}, D_1 N = \sqrt{2}, CK = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Через точку K проходит прямая ℓ , параллельная прямой MN .

А) докажите, что длина отрезка прямой ℓ , заключённая внутри куба, равна длине ребра куба;

Б) найдите расстояние между прямыми MN и ℓ .

Решение. А) Введём прямоугольную систему координат, взяв за её начало вершину D и направив координатные оси x, y, z по лучам DA, DC, DD_1 соответственно (рис. 6).

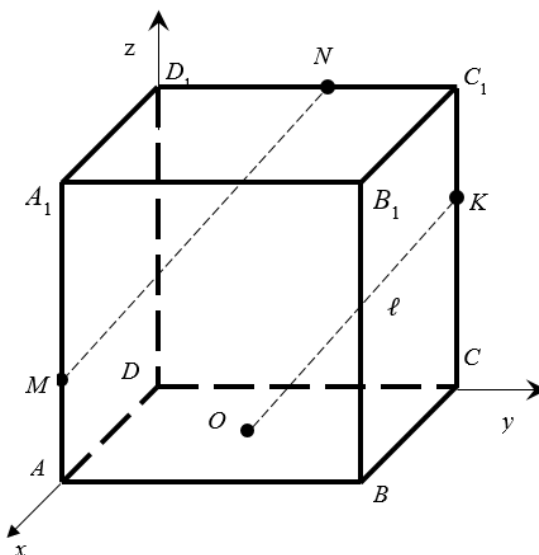


Рис. 6. Чертёж к задаче 4

Выпишем координаты нужных нам точек: $M(2; 0; 2 - \sqrt{3})$, $N(0; \sqrt{2}; 2)$, $K(0; 2; 2/\sqrt{3})$. Тогда вектор $\overrightarrow{MN} = \{-2; \sqrt{2}; \sqrt{3}\}$ и уравнение прямой, проходящей через точку K , параллельно прямой MN с направляющим вектором $\overrightarrow{MN}$ запишется в виде

$$\frac{x}{-2} = \frac{y-2}{\sqrt{2}} = \frac{z - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}. \quad (5)$$

Пусть O — точка пересечения этой прямой с плоскостью основания куба; уравнение этой плоскости $z = 0$. Пусть $O(x_0, y_0, 0)$. Поскольку координаты этой точки удовлетворяют уравнению (5), то последовательно находим

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{4}{3}, y_0 = \frac{2(3 - \sqrt{2})}{3}; \\ O &\left(\frac{4}{3}; \frac{2(3 - \sqrt{2})}{3}; 0 \right); \\ \overrightarrow{OK} &= \left\{ -\frac{4}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3}; \frac{2}{\sqrt{3}} \right\}. \end{aligned}$$

Следовательно, длина части прямой ℓ , заключенной внутри куба будет

² Задача аналогична варианту №1 вступительного экзамена на факультет естественных наук НГУ в 1979 году. Отличается добавлением пункта Б. (Белоносов, 2000, с. 99).

$$|\overrightarrow{OK}| = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{8}{9} + \frac{4}{3}} = 2,$$

что совпадает с длиной ребра куба.

Б) Составим уравнение плоскости, проходящей через точку O перпендикулярно прямой MN . В качестве вектора нормали этой плоскости возьмём вектор $\overrightarrow{MN}$. В результате уравнение плоскости можно записать в виде

$$2x - \sqrt{2}y - \sqrt{3}z + 2\sqrt{2} - 4 = 0 \quad (6)$$

Найдём точку пересечения F этой плоскости и прямой MN , заданной уравнением (5). Для этого запишем уравнения прямой MN в параметрическом виде:

$$x = -2t, y = \sqrt{2}t + \sqrt{2}, z = \sqrt{3}t + 2,$$

подставляем полученные выражения для x, y, z в уравнение плоскости (6) и находим значение параметра t , отвечающее точке F : $t = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 6$. Далее, подставив это значение t в параметрические уравнения прямой MN , находим координаты точки F :

$$F\left(\frac{4(3 + \sqrt{3} - \sqrt{2})}{9}; \frac{4 - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{6}}{9}; \frac{12 - 6\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{9}\right).$$

Расстояние между прямыми ℓ и MN найдём как длину вектора

$$\overrightarrow{OF} = \left\{ \frac{4(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{9}; \frac{9\sqrt{2} - 2\sqrt{6} - 14}{9}; \frac{12 - 6\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}{9} \right\}.$$

$$\text{Тогда } |\overrightarrow{OF}| = \frac{1}{3} \sqrt{82 + 8\sqrt{6} - 24\sqrt{3} - 36\sqrt{2}}.$$

Вариант решения пункта Б).

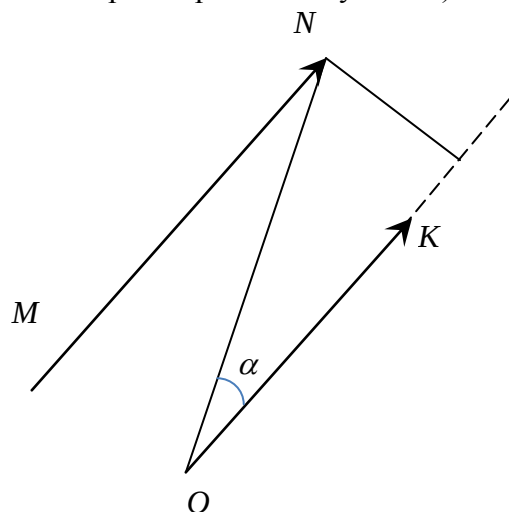


Рис. 7. К расчёту расстояния между параллельными прямыми

Имеем

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{ON}|}{|\overrightarrow{OK}| \cdot |\overrightarrow{ON}|} = \frac{2(3 - \sqrt{2} + \sqrt{3})}{\sqrt{138 - 60\sqrt{2}}},$$

и, определив $\sin \alpha$, получим

$$d = |\overrightarrow{ON}| \cdot \sin \alpha = \frac{1}{3} \sqrt{82 + 8\sqrt{6} - 24\sqrt{3} - 36\sqrt{2}}.$$

Параллельные прямые MN и OK лежат в одной плоскости. Опустим перпендикуляр из точки N на прямую OK (рис. 7). Его длина d и есть искомое расстояние между двумя прямыми MN и OK . Найдём угол между векторами $\overrightarrow{OK}$ и $\overrightarrow{ON}$:

$$\overrightarrow{OK} = \left\{ -\frac{4}{3}; \frac{2\sqrt{2}}{3}; \frac{2}{\sqrt{3}} \right\}, |\overrightarrow{OK}| = 2;$$

$$\overrightarrow{ON} = \left\{ -\frac{4}{3}; \frac{5\sqrt{2} - 6}{3}; 2 \right\},$$

$$|\overrightarrow{ON}| = \frac{1}{3} \sqrt{138 - 60\sqrt{2}}.$$

Ответ: Б) $\frac{1}{3}\sqrt{82 + 8\sqrt{6} - 24\sqrt{3} - 36\sqrt{2}}$.

Методические указания к решению задач на определение расстояния от точки до плоскости, расстояния между скрещивающимися прямыми

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Эту формулу полезно использовать при:

1. нахождении высот, необходимых, в частности, для вычисления объёмов;
2. определении расстояния между параллельными плоскостями;
3. вычислении расстояния между скрещивающимися прямыми.

Задача 5³. В основании пирамиды $SABCD$ с равными боковыми рёбрами лежит прямоугольник $ABCD$, причём $AB = 4, BC = 8$, высота пирамиды равна 8. Точки M и N – середины рёбер SB и SC соответственно. Точки P и Q лежат на прямых AB и MN так, что отрезок PQ пересекается с ребром SD в точке K и делится этой точкой на два равных отрезка.

А) докажите, что $DK:KS = 1:3$;

Б) найдите расстояние между скрещивающимися прямыми PQ и SB , а также угол между ними.

Решение. А) Пусть SO – высота пирамиды. Введём прямоугольную систему координат, приняв за её начало центр прямоугольника (точку O) и направляя оси Ox и Oy параллельно соответствующим сторонам прямоугольника, а ось Oz – по лучу OS (рис. 8).

Выпишем координаты вершин пирамиды: $S(0; 0; 8), A(4; -2; 0), B(4; 2; 0), D(-4; -2; 0)$. Координаты точек M и N , как середин отрезков BS и CS таковы: $M(2; 1; 4), N(-2; 1; 4)$. Введём координаты концов отрезков $PQ: P(4, y_P; 0), Q(x_Q; 1; 4)$. Пусть $\lambda = DK:KS$. Координаты точки K , делящей отрезок DS в отношении λ , будут $K\left(-\frac{4}{1+\lambda}; -\frac{2}{1+\lambda}; \frac{8\lambda}{1+\lambda}\right)$. С другой стороны, координаты точки K , как середины отрезка PQ , дают $K\left(\frac{4+x_Q}{2}; \frac{y_P+1}{2}; 2\right)$. Приравнявая соответствующие координаты, получим $\lambda = \frac{1}{3}; x_Q = -10, y_P = -4$. Итак, $P(4; -4; 0), Q(-10; 1; 4), K(-3; -1,5; 2)$ и $DK:KS = 1:3$.

Б) Угол φ между прямыми PQ и SB равен углу между направляющими векторами этих прямых. Так как $\overrightarrow{PQ} = \{-14; 5; 4\}, \overrightarrow{SB} = \{4; 2; -8\}$, то для косинуса угла получим

$$\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{SB}|}{|\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{SB}|} = \frac{13}{\sqrt{553}}, \varphi = \arccos \frac{13}{\sqrt{553}}.$$

Для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми PQ и SB составим уравнение плоскости, проходящей через прямую PQ параллельно прямой SB . Тогда искомое расстояние равно длине перпендикуляра, опущенного из произвольной точки прямой SB на указанную плоскость.

³ Задача составлена авторами статьи с использованием геометрической конфигурации варианта №4 вступительного экзамена на механико-математический факультет НГУ в 1990 году. Приведём текст этой задачи. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S и основанием $ABCD$ все рёбра имеют длину $2a$. Точки M и N — середины рёбер SB и SC . Отрезок PQ , концы которого лежат на прямых AB и MN , пересекаются с прямой SD в точке O и делятся этой точкой пополам. Найти длину отрезка PQ . (Белоносов, 2000, с. 54)

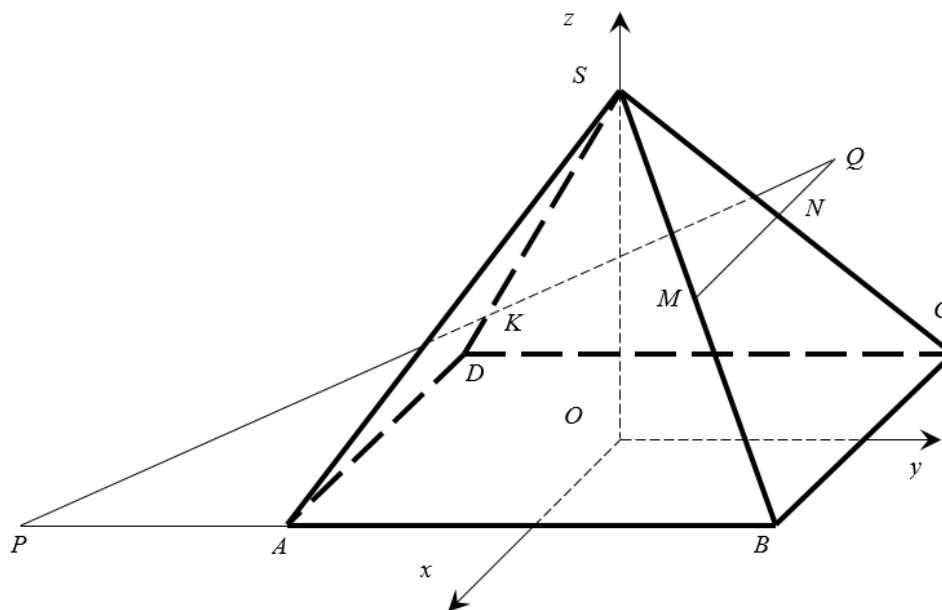


Рис. 8. Чертёж к задаче 5

Используя общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, условие принадлежности точек P и Q этой плоскости, а также равенство нулю скалярного произведения вектора нормали плоскости $\vec{N} = \{A, B, C\}$ и направляющего вектора прямой $\overrightarrow{SB}$, получим

$$\begin{cases} 4A - 4B + D = 0, \\ -10A + B + 4C + D = 0, \\ 4A + 2B - 8C = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, выразим коэффициенты A, B, C через D : $A = 0,25D$; $B = 0,5D$; $C = 0,25D$, и уравнение плоскости принимает вид

$$x + 2y + z + 4 = 0.$$

Для определения искомого расстояния в качестве произвольной точки на прямой SB проще всего взять точку $S(0; 0; 8)$. В результате, используя формулу нахождения расстояния от точки до плоскости, получим

$$d(PQ, SB) = \frac{|0 + 0 + 8 + 4|}{\sqrt{1 + 4 + 1}} = 2\sqrt{6}.$$

Ответ. Б) $\arccos(13/\sqrt{553})$; $2\sqrt{6}$.

Заключение

В статье сделана попытка показать достаточную универсальность и эффективность методов аналитической геометрии при решении определённого круга задач школьного курса стереометрии, а также привить ученику умение составлять и реализовывать алгоритмы таких решений. Надеемся, что изучение методов аналитической геометрии на представленных выше задачах принесёт ученику пользу и тем самым подтвердятся слова философа и математика, основоположника метода координат Р. Декарта: «Каждая решённая мною задача становилась образцом, который служил впоследствии для решения других задач» (Декарт, 1950, 274). Кроме того, использование предлагаемых способов поможет обеспечить преимущество при обучении математике в средней школе и его продолжении в высшем учебном заведении.

Список литературы

- Белоносов В.С., Фокин М.В. Задачи вступительных экзаменов по математике. Учебное издание. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2000.
- Декарт Р. Рассуждения о методе. Избранные произведения. М., 1950.
- Калинин А.Ю., Терешин Д.А. Стереометрия 10. М.: Изд-во МФТИ, 1996.
- Тырымов А.А., Шведов Е.Г. Линейная аналитическая геометрия. Методические указания. Волгоград: Изд-во ВолгГТУ, 2009.
- Шабунин М.И. Математика: пособие для поступающих в вузы. 8-е изд. М.: Лаборатория знаний, 2020.
- Moritz R. E. On Mathematics and Mathematicians. New York, 1958.

Информация об авторах

Тырымов Александр Александрович; кандидат физико-математических наук; доцент; доцент кафедры «Прикладная математика»; «Волгоградский государственный технический университет» (Российская Федерация, 400005, г. Волгоград, проспект им. В.И. Ленина, д. 28); E-mail: tyrymov2010@yandex.ru; ORCID: 0009-0003-9899-5535;

Шведов Евгений Геннадьевич; кандидат физико-математических наук; доцент кафедры «Прикладная математика»; «Волгоградский государственный технический университет» (Российская Федерация, 400005, г. Волгоград, проспект им. В.И. Ленина, д. 28); E-mail: esheg@rambler.ru; ORCID: 0000-0002-7401-4320

METHODS OF ANALYTICAL GEOMETRY IN SOLVING STEREOMETRY PROBLEMS OF THE UNIFIED STATE EXAM IN MATHEMATICS

Tyrymov A. A.
PhD (Physics and Mathematics)
Associate Professor

Volgograd State Technical University

Shvedov E. G.
PhD (Physics and Mathematics)
Associate Professor

Volgograd State Technical University

Abstract. Based on the existing school curriculum and a form accessible for effective perception by students, the article presents methods of analytical geometry that contribute to a deeper study of methods for solving stereometry problems. Solving specific problems shows the use of the method of coordinates for constructing sections of geometric shapes, for determining angles between planes and straight lines, as well as calculating distances between planes parallel or intersecting straight lines. The main attention is paid to the construction of algorithms that help in solving typical tasks of a stereometry school course. Formulas defining the relative position of the main objects of linear analytical geometry are given. Their main goal is to facilitate the rigorous construction of the relevant section of stereometry using modern mathematical language and to prepare the student for the perception of the powerful apparatus of vector algebra.

Keywords: coordinate method, plane, line in space, angles, distances

For citation: Tyrymov A. A., Shvedov E. G. (2025). Methods of analytical geometry in solving stereometry problems of the unified state exam in mathematics. *Continuum*.

Copyright: © A. A. Tyrymov, E. G. Shvedov (2025). Published by Bunin Yelets State University. Open access under the Creative Commons Attribution 4.0 License

References

- Belonosov, V. S., Fokin, M. V. (2020). *Zadachi vstupitel'nykh ekzamenov po matematike. Uchebnoe izdanie*. Novosibirsk: Izd-vo Novosib. un-ta. (In Russ.)
- Dekart, R. (1950). *Rassuzhdeniya o metode. Izbrannye proizvedeniya*. Moscow. (In Russ.)
- Kalinin, A. Yu., Tereshin, D. A. (1996). *Stereometriya 10*. Moscow: Izd-vo MFTI. (In Russ.)
- Moritz, R. E. (1958). *On Mathematics and Mathematicians*. New York.
- Shabunin, M. I. (2020). *Matematika: posobie dlya postupayushchikh v vuzy*. 8-e izd. Moscow: Laboratoriya znaniy. (In Russ.)
- Tyrymov, A. A., Shvedov, E. G. (2009). *Linejnaya analiticheskaya geometriya. Metodicheskie ukazaniya*. Volgograd: Izd-vo VolGGTU. (In Russ.)

Information about the authors

Alexander A. Tyrymov; Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Associate Professor; Associate Professor of the Department of Applied Mathematics; Volgograd State Technical University (Lenin Avenue, 28, Volgograd, 400005, Russian Federation); E-mail: tyrymov2010@yandex.ru; ORCID: 0009-0003-9899-5535;

Evgeny G. Shvedov; Candidate of Physical and Mathematical Sciences; Associate Professor of the Department of Applied Mathematics; Volgograd State Technical University (Lenin Avenue, 28, Volgograd, 400005, Russian Federation); E-mail: esheg@rambler.ru; ORCID: 0000-0002-7401-4320

Статья поступила в редакцию	25.09.2025
Принята к публикации	21.10.2025
Статья опубликована	16.12.2025