

ПЕРСОНАЛИИ

DOI: 10.24888/2500-1957-2024-3-102-118

УДК
378.12**ИСТОРИЯ ОТЕЧЕСТВЕННЫХ ШКОЛ НЕЛИНЕЙНОГО
ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА ВТОРОЙ ТРЕТИ XX В.****Богатов Егор Михайлович**к.ф.-м.н., доцент
embogatov@inbox.ru
г. Старый ОсколФилиал Национального исследовательско-
го технологического университета
«МИСИС» в г. Губкине Белгородской
области;
Старооскольский технологический инсти-
тут им. А.А. Угарова (филиал) Националь-
ного исследовательского технологического
университета «МИСИС»

Аннотация. В работе впервые представлены отечественные школы нелинейного функционального анализа, зародившиеся в 1930-е гг. (московская школа во главе с Л.А. Люстерником, ленинградская школа во главе с Л.В. Канторовичем), в 1940-х гг. (киевско-одесская школа во главе с М.Г. Крейном), в 1950-х гг. (воронежская школа под руководством М.А. Красносельского, московская школа во главе с М.М. Вайнбергом). Определено, что воронежская школа нелинейного функционального анализа, внесшая вклад в развитие следующих его разделов: топологические методы нелинейного анализа, вариационные методы решения операторных уравнений, теория положительных операторов, теория ветвления и бифуркаций, качественные аспекты приближённых методов решения операторных уравнений, являлась наиболее крупной. Выделены основные направления работы указанных школ, уточнён качественный состав исполнителей и полученные в 1930-е-1960-е гг. результаты. Заявлен новый метод представления математических результатов – на основе таблицы мыслительных средств. Приведено схематичное изображение центров нелинейного функционального анализа в СССР с учётом перехода и ответвлений. Сделаны первые шаги сравнительного анализа достижений советской школы нелинейного функционального анализа и аналогичных школ на Западе.

Работа может быть продолжена в нескольких направлениях: а) проведение параллелей с развитием нелинейного функционального анализа в западных странах и с развитием нелинейной механики в нашей стране и за рубежом; б) исследование взаимного влияния идей, выработанных в рамках национальных математических школ; в) изучение истории научных коммуникаций, институтов, научно-образовательных систем и научно-биографических аспектов обсуждаемой области в их взаимосвязи.

Ключевые слова: нелинейный функциональный анализ, Л.А. Люстерник, Л.В. Канторович, М.Г. Крейн, М.А. Красносельский, М.М. Вайнберг, В.А. Треногин, Ю.Г. Борисович.

Благодарности: автор выражает благодарность участникам секции История математики IV конференции математических центров России, особенно

профессорам Г.И. Синкевич (СПбГАСУ) и А.И. Назарову (ПОМИ РАН), доценту Г.М. Полотовскому (Нижегородский филиал ВШЭ), а также профессору А.В. Боровских (МГУ) за полезные обсуждения.

Введение

Понятие научной школы – сообщества неформально взаимодействующих учёных, сплочённых вокруг лидера, разделяющих его основные научные идеи и реализующих обычно новаторскую, исследовательскую программу – появилось в науковедении в начале XXI в. (Мирская, 2005). Оно было взято на вооружение историками науки В.П. Визгиным и А.В. Кессенихом, которые предложили использовать научно-школьный подход для изучения истории физики (Визгин и др., 2016). Интуитивное понимание термина «научная школа», в том числе в математике, существовало и раньше, что находит своё подтверждение в статьях (Demidov, 1997), (Фаддеев и др., 1999).

Настоящая работа имеет своей целью ввести в историко-научный оборот в области математики XX в. новый материал – историю отечественных школ нелинейного функционального анализа, представленного следующими разделами:

- вариационное исчисление в целом,
- топологические методы нелинейного анализа,
- вариационные методы решения операторных уравнений,
- теория положительных операторов,
- теория ветвления и бифуркаций,
- качественные аспекты приближённых методов решения операторных уравнений,

что даёт дополнительное представление об их развитии.

Прежде, чем перейти к сути, уточним предмет исследования. Под нелинейным функциональным анализом здесь понимается совокупность теорий, с помощью которых изучаются свойства решений нелинейных операторных уравнений $Ay=0$ в наиболее общей постановке. Оператор A может быть интегральным, дифференциальным, интегродифференциальным, системой из таких операторов и т.д. В качестве примера приведём уравнение Урысона:

$$\int_D K(x, s, y(s)) ds - y(x) = 0. \quad (1)$$

Решения подобных уравнений, как правило, нельзя найти в явном виде, поэтому на первый план выходят качественные методы.

Первые задачи нелинейного функционального анализа. Рождение московской школы

Одной из первых задач нелинейного функционального анализа была задача об оценке числа критических точек функционалов, восходящая к задаче о трёх геодезических Пуанкаре (Poincare, 1905). После М. Морса (Morse, 1925) ей стали заниматься *московские* математики Лазарь Аронович Люстерник² и Лев Генрихович Шнирельман³ (Люстерник и др., 1930). Они искали связь между числом *геометрически* различных критических точек функции F , заданной на многообразии M и топологическими свойствами M . Основным мотивом исследований Люстерника и Шнирельмана был качественный анализ задач вариационного исчисления – изучение свойств экстремалей, что, в свою очередь, является обобщением задач нахождения критических точек функции.

² Л.А. Люстерник (1899–1981) – видный представитель московской математической школы, ученик Н.Н. Лузина, член-корреспондент Академии наук СССР, лауреат Сталинской премии.

³ Л.Г. Шнирельман (1905–1938) – выпускник МГУ, ученик Н.Н. Лузина, член-корреспондент Академии наук СССР.



Л.А. Люстерник

Главным достижением Люстерника и Шнирельмана было определение специального гомотопического инварианта – *категории*⁴, как мыслительного средства, с помощью которого оценивалось число критических точек функции/функционала, заданных на некотором многообразии. В дальнейшем ряд московских учеников Люстерника (Сергей Васильевич Фролов, Лев Эрнестович Эльсгольц, Абрам Ильич Фет) предложили другие топологические инварианты и приёмы, с помощью которых оценка числа критических точек получалась более простым образом.

Опираясь на теорию категорий, Люстерник смог обобщить факт существования критических точек чётной функции на конечномерной сфере на случай однородных чётных функционалов F , действующих в гильбертовом пространстве H . Он доказал, что *на каждой сфере S из H*

такие функционалы имеют не менее, чем счётное число критических точек (Люстерник, 1939). Этот результат Люстерника в дальнейшем улучшался его учениками – Владимиром Ивановичем Соболевым (1941) и Элизбаром Семёновичем Цитландадзе (1953) (типичным приложением их результатов было интегральное уравнение типа Лихтенштейна). Впоследствии Соболев переехал в Воронеж, а Цитландадзе вернулся в Тбилиси.

Ленинградская школа нелинейного функционального анализа

Вторая (после московской) по времени возникновения школа – *Ленинградская*. Её основателем считается Леонид Витальевич Канторович⁵, который уже в 1935-м году ввёл в научный обиход полуупорядоченные пространства, как линейные многообразия Y , удовлетворяющих следующей системе аксиом относительно его элементов y (Канторович, 1935):

I Если $y > 0$, то исключено, что $y = 0$.

II Если $y_1 > 0$ и $y_2 > 0$, то $y_1 + y_2 > 0$.

III Каково бы ни было y , существует $y_1 > 0$, такое, что $y_1 - y > 0$.

IV Если $\lambda > 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$ и $y > 0$, то $\lambda y > 0$.

V Всякое подмножество Y , ограниченное сверху, имеет точную верхнюю грань.

В соответствии с эвристическим принципом Канторовича, *каждое из K -пространств является аналогом вещественной полупрямой* (его элементы сравнимы, как обычные числа, из них можно составлять сходящиеся последовательности, задавать операторы со значениями в Y и т.п.). Это, в частности, дало возможность распространить *принцип мажорант*, восходящий к Коши (1842), на элементы абстрактной природы. Несколько позднее (1948) с помощью K -пространств и их обобщения (пространств Банаха-Канторовича) на нелинейные операторные уравнения был распространён метод касательных (Канторович, 1948).

Ленинградская школа приближённых методов, заложенная Канторовичем, получила в военные и послевоенные годы бесценный опыт участия в Атомном проекте СССР (Богатов и др., 2022). К началу 1960-х гг. эта школа включала в себя Глеба Павловича Акилова, Марка



Л.В. Канторович

⁴ Категория замкнутого множества A относительно пространства $M \supset A$ – это минимальное число замкнутых множеств, в сумме покрывающих A , каждое из которых стягиваемо в точку.

⁵ Л. В. Канторович (1912-1986), выпускник ЛГУ, ученик Г.М. Фихтенгольца и В.И. Смирнова, академик АН СССР, лауреат Нобелевской премии по экономике, почётный доктор наук 12 университетов мира.

Константиновича Гавурина, Ивана Петровича Мысовских, Бориса Андреевича Самокиша, Эрну Борисовну Карпиловскую и др. Ядро школы полуупорядоченных пространств составили Борис Захарович Вулих и Арон Григорьевич Пинскер.

Отметим, что в 1960-м г. Канторович переехал в Новосибирск, создал и возглавил кафедру вычислительной математики Новосибирского государственного университета и воспитал новое поколение учеников.

Киевско-одесская школа нелинейного функционального анализа



М.Г. Крейн

Время появления киевско-одесской школы нелинейного функционального анализа (руководитель – Марк Григорьевич Крейн⁶) совпадает с годом выхода статьи Крейна с его учеником Витольдом Львовичем Шмудьяном (1940), в которой они доказали ряд *теорем о неподвижной точке для нелинейных слабо непрерывных операторов* в развитие принципа Шаудера (Krein et al., 1940). В основе доказательства лежала теория регулярно выпуклых множеств, построенная авторами по примеру теории Банаха регулярно замкнутых подпространств E^* .

Подчеркнём, что в 1939 г. в состав СССР вошла Львовская область, что дало возможность усилить коллектив НИИ математики Академии наук Украинской ССР (г. Киев) Стефаном Банахом и его учениками (Юлиушем Шаудером, Станиславом Мазуром и Владиславом Орlichem)

(Митропольский, 1988). Такое усиление сразу вывело киевскую школу нелинейного функционального анализа на передовые позиции, но закреплению успеха помешала война.

Наиболее значительный вклад Крейна в нелинейный функциональный анализ относится к области *теории положительных операторов* (Крейн и др., 1948), где его основным мотивом был переход от дискретных задач теории осцилляций к их непрерывным аналогам (Гантмахер и др., 1941). Нелинейную часть указанной теории разрабатывали два его ученика: сначала Моисей Аронович Рутман (1939–1948), а затем, в гораздо более общем виде – Марк Александрович Красносельский⁷ (1950– 1960).

Воронежская школа нелинейного функционального анализа

В 1952 г. Красносельский переехал из Киева в Воронеж и стал работать в Воронежском государственном университете (ВГУ), создавая свою школу. Отправными пунктами исследований М.А. Красносельского в области теории конусов стали результат Урысона о положительной разрешимости уравнения (1) и задача об определении форм потери устойчивости шарнирно-опёртого стержня переменной жёсткости (см. рис. 1), сводящаяся к уравнению Урысона.

Вместе со своими учениками Львом Александровичем Ладыженским и Иваном Алексеевичем Бахтиным (а позднее Владиславом Яковлевичем Стеценко, Юлием Витальевичем Покорным и др.) Красносельский стал развивать теорию конусов с целью изучения качественных свойств решений уравнения

$$Ax = \lambda x \quad (2)$$

с нелинейными операторами A (1950-1965).

⁶ М.Г. Крейн (1907–1989) - выдающийся советский математик, ученик Н.Г. Чеботарёва, член-корреспондент Академии наук УССР, лауреат премии Н.М. Крылова.

⁷ Красносельский М. А. (1920-1997) – доктор физико-математических наук, профессор, видный представитель киевской математической школы, лауреат премий Андропова и Гумбольта.

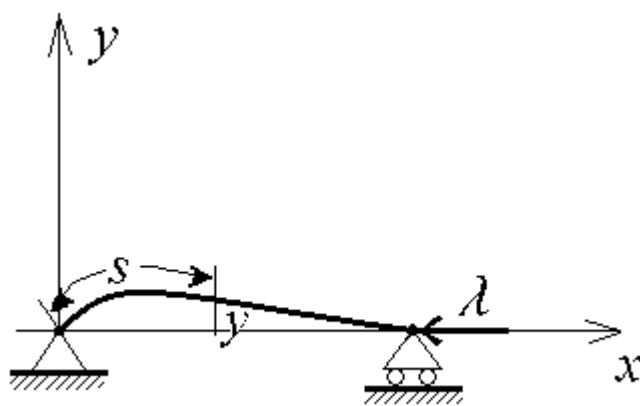


Рис. 1. Шарнирно-опёртый стержень переменной жёсткости

Среди большого количества конусных теорем о неподвижной точке, доказанных в школе Красносельского, наибольшую ценность и известность приобрела теорема, обобщающая теорему Шаудера на класс положительных операторов, не обладающих свойством оставлять инвариантным замкнутое выпуклое ограниченное подмножество банахова пространства E . А именно, если *вполне непрерывный оператор A сжимает или растягивает конус K* (см. рис. 2-3), *тогда A имеет в конусе K по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку*.

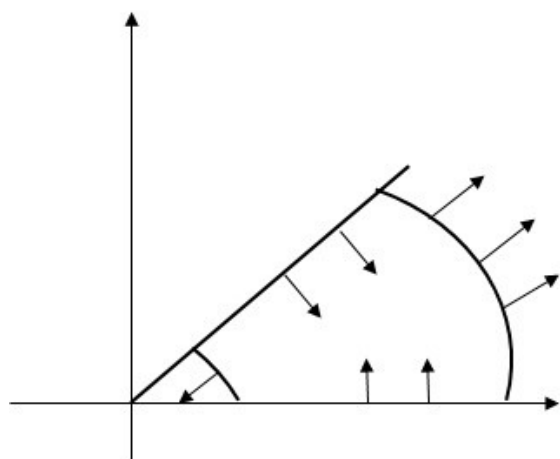


Рис. 2. Растяжение конуса в $\mathbb{R}^2$.

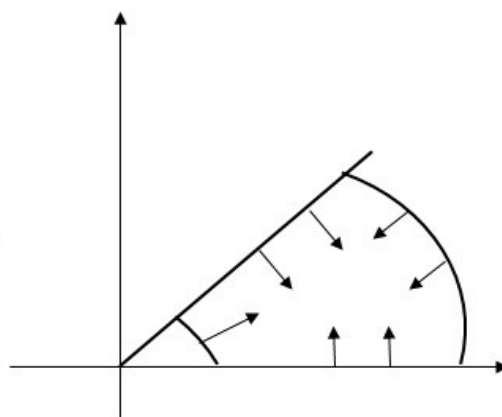


Рис. 3 Сжатие конуса в $\mathbb{R}^2$.

В работах воронежской школы нелинейного функционального анализа идея мажорирования операторов, высказанная Канторовичем, стала средством решения разнообразных задач как в рамках самой математики, так и её приложений (Красносельский, 1962).

Второе направление школы Красносельского относилось к области вариационных методов. Эта линия исследований шла от М. Голomba (1935), представившего схему доказательства разрешимости уравнения

$$AGy=y \quad (3)$$

для расщепляемых (линейных) операторов A в гильбертовом пространстве (Golomb, 1935). При этом оператор G (оператор Немыцкого) должен быть градиентом некоторого функционала F .

В зависимости от вида нелинейности (степенная, экспоненциальная и т.п.) оператора Немыцкого $G: E_1 \rightarrow E_2$, в качестве пространства E_i оказалось целесообразно выбирать пространства Лебега L^p или пространства Орлича $L_{M_i}^*$. Этот шаг был сделан М.А. Красносельским, причём результаты, относящиеся к пространству Орлича, были по

большей части получены совместно с его учеником Яковом Брониславовичем Рутицким (1958).



М.А. Красносельский

В частности, ими были распространены результаты Голomba о существовании континуума собственных функций оператора AG на случай существенно нестепенных нелинейностей. Ряд результатов в области существования критических точек потенциальных операторов был получен Красносельским вместе с его учеником из Ленинграда Абрамом Исаковичем Поволоцким.

Наиболее плодотворной была работа воронежской школы нелинейного функционального анализа в области топологических методов, к которым я буду относить принцип неподвижной точки и теорию степени отображения (Богатов, 2018).

Первая линия исследований шла от Шаудера (Schauder, 1927) и Андрея Николаевича Тихонова (Tychonoff, 1935), который доказал теорему о неподвижной точке для локально-выпуклых пространств. Дополненное принципом сжимающих отображений С. Банаха (Banach, 1922) оно привело Красносельского к теореме о неподвижной точке для операторов вида (вполне непрерывный)+(сжимающий) (1955). Через 10 лет данный результат был развит в нескольких направлениях, в том числе в Воронеже. Одним из наиболее интересных её обобщений является, на наш взгляд, принцип неподвижной точки Бориса Николаевича Садовского (1967), в котором фигурировал новый класс операторов U – *уплотняющих* операторов, уменьшающих меру некомпактности любого множества с некомпактным замыканием (Садовский, 1967). Примером такого оператора является указанная Красносельским сумма $U=B+C$.

Вторая линия – это нелокальный вариант геометрического развития теории степени отображения Лере-Шаудера (1934), начало которому было положено в работе немецкого математика Эриха Роте (Rothe, 1938). Красносельский связал степень отображения вполне непрерывного оператора A с *вращением* соответствующего *векторного поля* Φ на границе области G банахова пространства и получил на этом пути ряд достаточных признаков существования неподвижной точки A . Кроме того, в рамках этой теории Красносельским с учениками (Петром Петровичем Забрейко, Вадимом Васильевичем Стрыгиным и др.) был решён целый спектр задач качественного характера (Красносельский и др., 1975):

- исследована структура и свойства спектра нелинейного оператора A ;
- изучено множество собственных векторов нелинейного оператора A ;
- обоснована сходимостъ приближённых решений уравнений вида (2);
- получены условия законности линеаризации в задаче о точках бифуркации;
- исследованы свойства точек бифуркации и ветвления оператора A .

К середине 1960-х гг. теория вращения вполне непрерывных векторных полей была дополнена исследованиями Юрия Григорьевича Борисовича⁸, который дал определение *относительного вращения* (вращения поля относительно выпуклого замкнутого подмножества $Q \subset E$). Этот шаг позволил распространить теорию степени отображения на слабо непрерывные, положительные и



Ю.Г. Борисович

⁸ Борисович Ю.Г. (1930–2007), выпускник Казанского госуниверситета, ученик профессора Б.М. Гагаева и профессора М.А. Красносельского, заслуженный деятель науки РФ.

уплотняющие векторные поля (Борисович, 1964). Последний случай был изучен Борисовичем со своим учеником Юрием Ивановичем Сапроновым (1968). В конце 1960-х гг. внимание воронежских математиков группы Борисовича (Борис Данилович Гельман, Эргашбой Мирзоевич Мухамадиев, Валерий Владимирович Обуховский и др.) переключилось на исследования многозначных векторных полей в банаховом пространстве.

Для вполне непрерывных мультиполей на этом пути было определено обычное и относительное вращение и выведены основные принципы неподвижной точки, имеющие приложение в теории игр и теории динамических систем (Борисович и др., 1969).

Московская школа вариационных методов решения нелинейных операторных уравнения и теории ветвления



М.М. Вайнберг

Параллельно с воронежской школой существенную роль в исследованиях потенциальных операторов играл представитель *московской* математической школы, Мордухай Моисеевич Вайнберг⁹. Достижения М.М. Вайнберга, учеником которого в области вариационных методов был рижский математик Яков Леопольдович Энгельсон, можно проследить по таблице 1, в которой ключевую роль играет понятие *мыслительного средства* (Боровских, 2024) – *того, что позволяет мыслить идеализированные объекты и отношения между ними* (действовать с ними мысленно). Немаловажным также являются *методы использования мыслительных средств* (Боровских, 2022), проявляющие себя как в рамках самой математики, так и её приложениях (физике, механике, экономике и т.п.).

Таблица 1.

Основные результаты М.М. Вайнберга в области вариационных методов исследования нелинейных операторных уравнений (1952-1956)

Мыслительное средство / метод использования средства (результат)	ФИО, период	Мыслительное средство / метод использования (источник)
Понятие потенциала оператора в банаховом пространстве/ Признаки потенциальности дифференцируемых и негладких операторов	М.К. Гавурин (1950)	Понятие дифференцируемости операторов в банаховом пространстве E
	М. Кернер (1933)	Критерий существования потенциала в банаховом пространстве E
Понятие слабой полунепрерывности снизу функционала / обобщение теоремы Вейерштрасса на функционалы	Л. Тонелли (1911)	Понятие полунепрерывности функционала
	К. Вейерштрасс (1817)	Критерий достижимости своих границ для функции
Понятие потенциального оператора/ доказательство разрешимости потенциальных	Л. Тонелли (1923)	Необходимое условие наличия точки минимума функционала

⁹ Вайнберг М.М. (1908 – 1980) – выпускник Саратовского государственного университета, ученик В.В. Немыцкого, доктор физико-математических наук, профессор.

операторных уравнений в банаховом пространстве	В.Р. Гантмахер, В.Л. Шмульян (1937)	Достаточное условие слабой компактности сферы в банаховом пространстве
	У.Ф. Эберлейн (1947)	Необходимое условие слабой компактности сферы в банаховом пространстве
Понятие второго дифференциала Гато функционала F / Критерий наличия точки минимума функционала F	Л. Тонелли (1923)	Критерий наличия точки минимума гладкого интегрального функционала

Большим подспорьем в работах Красносельского, Вайнберга и их учеников сыграли результаты Марка Константиновича Гавурина (1939), аспиранта Канторовича, осуществившего построение абстрактного дифференциального исчисления в духе Гато и Фреше (Гавурин, 1939).

Обратимся к следующей области нелинейного функционального анализа – теории ветвления. После выхода работ Александра Михайловича Ляпунова (Liapounoff, 1905) и Эрхарда Шмидта (Schmidt, 1908) основным инструментом обсуждаемой теории была редукция нелинейного интегрального уравнения к скалярному уравнению/системе (редукция Ляпунова-Шмидта). Для исследования уравнения Гаммерштейна и Урысона в нашей стране в начале 1940-х гг. использовалось разложение в ряд по дробным степеням малого параметра (Назаров, 1945). В 1950-е гг., в связи с развитием аналитической теории операторов, опирающейся на результаты М.К. Гавурина и др., оказалось возможным распространить метод Назарова на абстрактные нелинейные уравнения вида

$$u = \lambda F(u), \text{ где } \lambda \in \mathbb{C},$$

$F: X \rightarrow X$ – аналитический оператор; X – комплексное банахово пространство. Эта работа была выполнена азербайджанским математиком Кошкараром Теймур оглы Ахмедовым в под руководством Люстерника и Немыцкого во время обучения Ахмедова в докторантуре МГУ.

Новым словом в развитии теории ветвления стало использование диаграммы Ньютона для определения дробных степеней разложения искомого решения в ряд по параметру:

$$x(\lambda) = c\lambda^\varepsilon + c_1\lambda^{\varepsilon_1} + c_2\lambda^{\varepsilon_2} + \dots, \quad \varepsilon < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots.$$

Применительно к уравнению Гаммерштейна этот шаг был сделан латвийским математиком Артуром Эдвиновичем Стапаном (Стапан, 1951); переход к абстрактному случаю был осуществлён московскими математиками Владилеом Александровичем Треногиным¹⁰ и М.М. Вайнбергом (начало 1960-х гг.), а также учеником Вайнберга, псковским математиком П.Г. Айзенгендлером, которые опирались на результаты Роберта Бартла (США). Предметом исследования отечественных учёных был операторный аналог уравнения Ляпунова-Шмидта вида

$$L(x) + F(x, y) = 0,$$

рассматриваемый в банаховом пространстве E , линейная часть которого (L) являлась оператором типа Фредгольма или Нётера, а нелинейная (F) – представляла собой оператор, удовлетворяющий условиям теоремы о неявной функции Хильдебрандта-Грейвса (Hildebrandt et al., 1927).

В середине 1960-х гг. к обсуждаемой теме подключились бывшие¹¹ воронежские математики – Красносельский и Забрёйко. Они продемонстрировали отличие подходов

¹⁰ Ученик Л.А. Люстерника.

¹¹ К этому времени М.А. Красносельский переехал в г. Москву, а П.П. Забрёйко – в г. Ярославль (Забрёйко, 2000).

Ляпунова и Шмидта в получении уравнений разветвления и предложили вариант асимптотического приближения к этим уравнениям. Дальнейшее совершенствование теории ветвления было связано, по большей части, с использованием аппарата теории операторов (линейной и нелинейной) и методов исследования конечных систем алгебраических уравнений (Вайнберг и др., 1969), (Красносельский и др., 1969). Свои коррективы вносили также потребности новых прикладных задач (теория нелинейной теплопроводности, задача об изгибании упругих континуумов, теория сверхпроводимости и др. (Келлер и др., 1974)).

Близкой к теории ветвления является *теория бифуркаций*, приоритет в разработке которой в 1950-е-1960-е гг. принадлежал школе Красносельского. Здесь достаточно упомянуть два результата:

1. Бифуркационная теорема Красносельского (1951)

Пусть A – вполне непрерывный, дифференцируемый в нуле оператор, $A(\theta)=\theta$, имеющий в нуле вполне непрерывную производную Фреше – оператор B . Тогда каждое собственное значение нечётной кратности линейного оператора B является точкой бифуркации оператора A .

2. Принцип смены индекса (1956).

Пусть при переходе через λ_0 индекс $\gamma(\lambda)$ векторного поля $\Phi_\lambda \varphi = \varphi - A(\lambda, \varphi)$ в нуле θ меняет свою величину, где θ – изолированная особая точка векторного поля Φ_λ , тогда λ_0 – точка бифуркации уравнения $\varphi = A(\lambda, \varphi)$.

Каждый из этих результатов нашёл своё продолжение как в работах отечественных математиков (П.П. Забрёйко, М.М. Вайнберг, Владимир Борисович Меламед, Алексей Вадимович Покровский и др.), так и в статьях их зарубежных коллег (Дж. Шварц, П. Рабинович и др.) – см. (Богатов, 2023).

Качественные аспекты приближённых методов решения нелинейных операторных уравнений: школы Канторовича и Красносельского

Как уже упоминалось выше, концептуальной основой для использования K -пространств Y в обосновании приближённых методов была возможность абстрактной трактовки метода мажорант. В простейшем случае нелинейное операторное уравнение

$$y = F(y) + y_0, \quad y, y_0 \in Y \quad (4)$$

с непрерывным оператором $F:Y \rightarrow Y$, мажорируется в Y положительно разрешимым уравнением

$$y = \hat{F}(y) + \hat{y}_0$$

с непрерывным оператором $\hat{F}:Y \rightarrow Y$, где $|F| \leq \hat{F}$, $|y_0| \leq \hat{y}_0$, $|y| = \sup(y, -y)$.

При этом последовательность $\{y_n\}$, построенная по правилу

$$y_n = F(y_{n-1}) + y_0$$

будет сходиться к решению уравнения (4) (Канторович, 1937, § 9).

Уже в такой постановке принцип мажорирования Канторовича позволяет доказывать сходимость итерационной последовательности для уравнений с операторами, *не удовлетворяющими условию сжимаемости*.

Для гладких операторов F Канторович смог провести обоснование сходимости итерационного процесса

$$x_{k+1} = x_k - [F'(x_k)]^{-1}F(x_k), \quad (5)$$

соответствующего методу Ньютона (Канторович, 1951). Идея заключалась в сравнении процесса (5) с процессом скалярных итераций, для которых сходимость уже была известна (Канторович, 1951). Дальнейшее исследование сходимости методов решения различных вычислительных задач укрепили Канторовича в его убеждённости в том, что наиболее

подходящей «системой координат» в этом вопросе является функциональный анализ (Канторович, 1948). К подобному умозаключению пришёл также немецкий математик Лотар Коллатц, только на 5-8 лет позже (Collatz, 1953).

Наличие хорошего начального приближения позволяло сделать заключение о существовании, единственности и области расположения решения уравнения $F(x)=0$ методом Ньютона. Преодоление локальности последнего было осуществлено в рамках развития градиентных методов. Наиболее естественным представлялось рассматривать подобные методы для операторов, заданных в гильбертовом пространстве H , поскольку для них решение уравнения $F(x)=0$ эквивалентно нахождению минимума функционала

$$\Phi(x) = (Fx, x),$$

если таковой существует. Для линейных операторов в H метод наискорейшего спуска был предложен и развит Л.В. Канторовичем (1945–1948). В середине 1950-х гг. он был применён для решения нелинейных операторных уравнений в гильбертовом пространстве в работах эстонского математика Юло Гориевича Лумисте (Лумисте, 1955) и в начале 1960-х гг. обобщён на банаховы пространства М.М. Вайнбергом (Вайнберг, 1961).

Перейдём к идее использования *топологического* инструментария в обосновании приближённых методов, восходящей к М.А. Красносельскому (Красносельский, 1956).

Находясь в рамках теории индекса, берущей начало от работы Ж. Лере и Ю. Шаудера (Leray et al., 1934), Красносельский осуществил переход от уравнения

$$Ax = x,$$

где A – вполне непрерывный нелинейный оператор, к приближённому уравнению

$$A_1x \equiv P_n Ax = x,$$

где P_n – проекционный оператор, с сохранением свойств оператора A . Этот шаг позволил доказать сходимости решений (произвольной) проекционной задачи, оценить её скорость и получить условие устойчивости метода Петрова-Галёркина для гладкого оператора A (Красносельский и др., 1969). Метод оказался действенным и в более общей ситуации – при анализе сходимости приближенных методов решения уравнений вида

$$Au = Bu,$$

где A – линейный непрерывный оператор, B – нелинейный непрерывный оператор, действующие из банахова пространства E в банахово пространство F . Соответствующий результат был получен эстонским докторантом Красносельского Геннадием Михайловичем Вайникко¹². В своей диссертации он предложил безоценочное определение близости операторов – *принцип компактной аппроксимации*, который нашёл своё применение в обосновании проекционных алгоритмов решения нелинейных операторных уравнений и задач на собственные значения (Вайникко, 1967).

Интересные утверждения были получены М.А. Красносельским вместе с его учеником И.А. Бахтиным в рамках теории конусов (Бахтин и др., 1961). Оказалось, что итерационная последовательность $x_n = Ax_{n-1}$ будет сходиться к ненулевому решению уравнения $x = Ax$ в конусе *при любом выборе начального приближения* в том случае, когда оператор A удовлетворяет условию *u_0 -вогнутости*. Это условие заключается в том, что оператор A должен быть вогнутым¹³, непрерывным, монотонным и переводить все элементы конуса K внутрь конусного отрезка $[\alpha u_0; \beta u_0]$.

¹² В настоящее время - академик эстонской Академии наук.

¹³ Для любого t из интервала $(0;1)$ существует положительная функция η , такая, что $A(tu) \geq (1 + \eta)tu$,

причём неравенство $x \geq y$ означает, что $(x - y) \in K$.

Заключение

Научные школы нелинейного функционального анализа, функционирующие в СССР в период с 1940 г. по 1970 г., удобно представить схемой (рис. 4). Если проводить их сравнение по широте охвата разделов и по числу изданных монографий с середины 1950-х до конца 1960-х гг., то станет ясно, что и по первому (топологические методы, вариационные методы, теория положительных операторов, теория ветвления и бифуркаций, приближённые методы), и по второму (семь монографий, см. (Красносельский, 2000; с. 176-178) пункту воронежская математическая школа превосходила все остальные школы СССР и других ведущих научных держав.

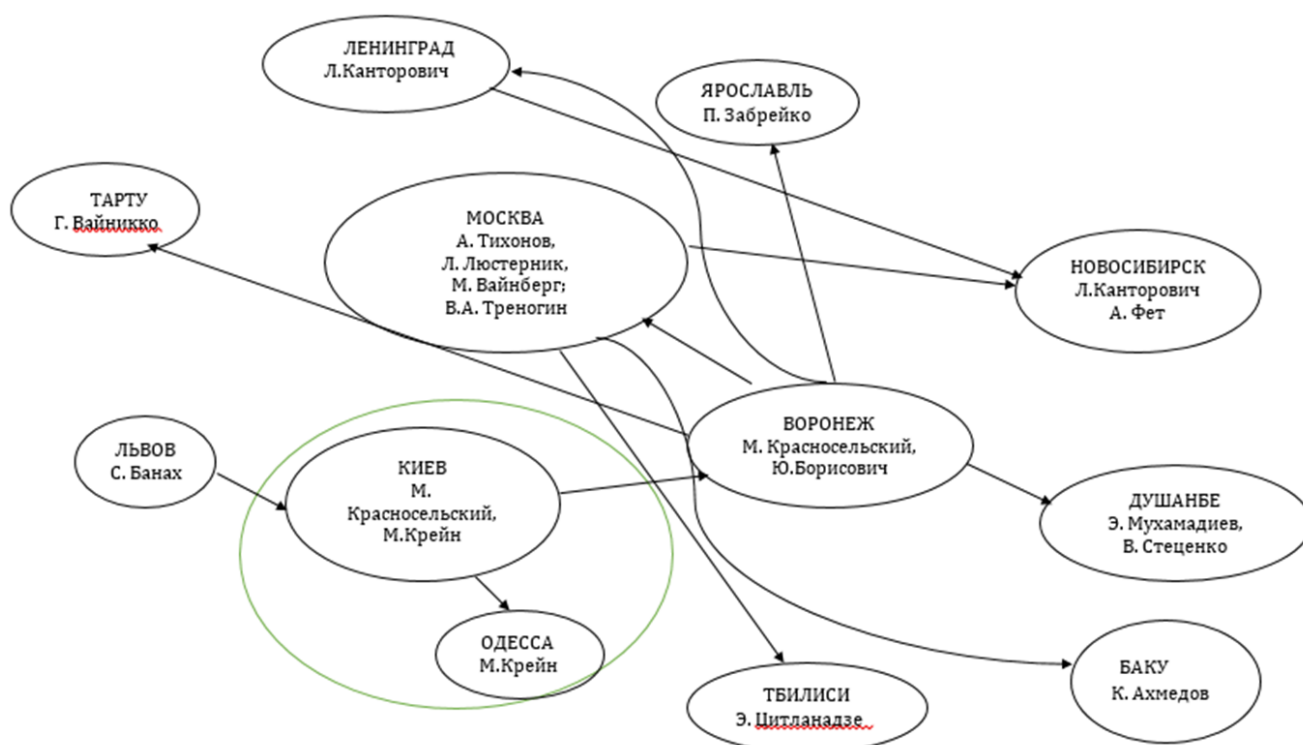


Рис. 4. Отечественные центры нелинейного функционального анализа со схемой перехода / ответвления

Следует также отметить, что в силу обширности своего кругозора и специфики предмета М.А. Красносельский и многие его ученики развивали как линейный, так и нелинейный функциональный анализ. После защиты докторских диссертаций значительная часть его учеников (Б.Н. Садовский, В.Я. Стеценко, Э.М. Мухамадиев, И.А. Бахтин, Ю.В. Покорный, В.В. Стрыгин и др.) создала свои научные коллективы (см. генеалогическое древо математиков в (Ну, 2008), (Ну, 2006)), которые обогащают математику новыми мыслительными средствами и по настоящее время.

Обратим внимание на то, что наряду с отечественной школой нелинейного функционального анализа значительный вес имели:

- итальянская математическая школа (В. Вольтерра, Ч. Арцела, Л. Тонелли, Р. Каччиополи и др.);
- французская математическая школа (М. Фреше, Р. Гато, Ж. Адамар, Ж. Лере, Ж. Дьедонне);
- польская математическая школа (С. Банах, Ю. Шаудер, В. Орлич, С. Мазур, С. Улам, К. Борсук, М. Альтман и др.);
- японская математическая школа (С. Какутани, Т. Симидзу, М. Нагумо, Х. Накано, С. Сасаки);

- немецкая математическая школа (Д. Гильберт, Э. Шмидт, Л. Лихтенштейн, В. Ритц, Р. Курант, Х. Хопф, А. Гаммерштейн, М. Голомб, Э. Роте, Л. Коллатц, Й. Шрёдер и др.);
- американская математическая школа (Э. Мур, О. Келлог, Дж. Биркгоф, К. Лэмсон, Т. Хильденбрандт, Л. Грейвс, М. Морс, Дж. фон Нейман, Д. Кронин, Р. Бартл, С. Ленг, Р. Пале, С. Смейл, П. Рабинович и др.).

При этом ни одна из иностранных школ нелинейного функционального анализа не могла сравниться с советской школой ни по глубине полученных результатов, ни по диапазону охвата разделов, ни по количеству защищённых диссертаций.

Интересно было бы провести параллели с развитием нелинейного функционального анализа в Германии, Франции, Италии и США и исследовать взаимное влияние идей, выработанных в рамках национальных математических школ (ориентиром здесь может служить работа (Bogatov, 2017)), а также изучить историю научных коммуникаций, институтов, научно-образовательных систем и научно-биографических аспектов обсуждаемой области в их взаимосвязи, следуя, например, (Кудрявцев, 2018).

Список литературы

- Ахмедов К.Т. Аналитический метод Некрасова–Назарова в нелинейном анализе // Успехи математических наук. 1957. Т. 12. №4 (76). С. 135–153.
- Бахтин И.А., Красносельский М.А. Метод последовательных приближений в теории уравнений с вогнутыми операторами // Сибирский математический журнал. 1961. Т. 2. № 3. С. 313–330.
- Богатов Е.М. Об истории метода неподвижной точки и вкладе советских математиков (1920-е-1950-е гг.) // Чебышевский сборник. 2018. Т. 19. Вып. 2. С. 30–55. DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-30-55
- Богатов Е.М. Об основных положениях нелинейного функционального анализа, как одного из базовых инструментов качественного исследования нелинейных систем // История педагогики и естествознания. 2023. № 3-4. С. 44–54. DOI:10.24412/2226-2296-2023-3-4-44-54
- Богатов Е.М. Об отечественных научных школах нелинейного функционального анализа в 1940-х-1960-х гг. // Сб. тезисов IV конференции математических центров России, СПб: СПбГУ. 2024. С. 111–112.
- Богатов Е.М., Богатова В.П. О вкладе математиков первой величины в Атомный проект СССР // Научные ведомости БелГУ. Серия Прикладная математика, физика. 2022. Т. 54. № 2. С. 98–113. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-98-113
- Борисович Ю.Г. Теория слабо непрерывных векторных полей и некоторые её приложения: дис. доктора физ.-мат. наук. Воронеж, 1964.
- Борисович Ю.Г., Гельман Б.Д., Мухамадиев Э.М., Обуховский В.В. О вращении многозначных векторных полей // Докл. АН СССР. 1969. Том 187. Вып. 5. С. 971–973.
- Боровских А.В. О содержании математического образования. Математика для нематематиков // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2022. № 4(28). С. 51–65. DOI: 10.24888/2500-1957-2022-4-51-65
- Боровских А.В. О содержании школьного математического образования // Вестник Московского Университета. Серия 20. Педагогическое образование 2024. № 2. С. 61–82. DOI: 10.55959/LPEJ-24-16
- Вайнберг М.М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов. М.: ГИТТЛ, 1956.
- Вайнберг М.М. О сходимости процесса наискорейшего спуска для нелинейных уравнений // Сибирский математический журнал. 1961. Т. 2. № 2. С. 201–220.
- Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.

- Вайникко Г.М. Принцип компактной аппроксимации в теории приближенных методов // Журнал вычислительной математики и математической физики 1969. Т. 9:4. С. 739–761.
- Визгин В.П., Кессених А.В. Научно-школьный подход к истории отечественной физики // История науки и техники. 2016. № 1. С. 3–23.
- Гавурин М.К. К построению дифференциального и интегрального исчисления в пространствах Банаха // ДАН СССР. 1939. Т.22. №9. С. 552–556.
- Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.-Л.: ГИТТЛ, 1941.
- Забрейко П.П. М.А. Красносельский – мой учитель и друг / В кн. Марк Александрович Красносельский. К 80-летию со дня рождения. Сб. статей. М.: ИППИ РАН. 2000. С. 28–54.
- Институт математики АН УССР. Сост. Ю.А. Митропольский, В.В. Строк. Отв ред. Митропольский Ю. А. Киев: Наукова думка, 1988.
- Канторович Л.В. Линейные полуупорядоченные пространства и их применение к теории линейных операций // ДАН СССР. 1935. Т.4. № 1-2. С.11-14.
- Канторович Л.В. О полуупорядоченных пространствах // Известия АН СССР. Сер. матем. 1937. Т.1:1. С. 91–110.
- Канторович Л.В. Функциональный анализ и прикладная математика // Успехи математических наук. 1948. Т. 3:6. № 28. С. 89–185.
- Канторович Л.В. Принцип мажорант и метод Ньютона // ДАН СССР. 1951. Т. 76. №1. С. 17–20.
- Красносельский М.А. Топологические методы в теории интегральных уравнений. М.: ГИТЛ, 1956.
- Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1962.
- Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.
- Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975.
- Крейн М.Г., Рутман М.А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха // Успехи математических наук. 1948. Т. 3:1. № 23. С. 3–95.
- Кудрявцев В.В. Научные школы в отечественной радиофизике: зарождение, развитие, творческое наследие: дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. М.: 2018.
- Лумисте Ю.Г. Метод наискорейшего спуска при нелинейных уравнениях // Учёные записки Тартуского ун-та. 1955. № 37. С. 106–113.
- Люстерник Л.А., Шнирельман Л.Г. Топологические методы в вариационных задачах. М.: Иссл. ин-т матем. и мех. при 1-м МГУ. 1930.
- Марк Александрович Красносельский. К 80-летию со дня рождения. Сб. статей. М.: ИППИ РАН, 2000.
- Мирская Е.З. Научные школы: история, проблемы и перспективы // Науковедение и новые тенденции в развитии российской науки. Под ред. А.Г. Аллахвердяна и др. М.: Логос. 2005. С.244–265.
- Назаров Н.Н. Методы решения нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна // Труды Среднеазиатского гос. ун-та. Серия 6. Физ.-мат. науки. 1945. С. 3–14.
- Садовский Б.Н. Об одном принципе неподвижной точки // Функциональный анализ и его приложения. 1967. Т.1. № 2. С. 74–76.
- Стапан А. Э. Разветвление решений нелинейных интегральных уравнений: автореферат дис. ... кандидата физ.-мат. наук. Рига, 1951.
- Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / ред. Д.Б. Келлер и С. Антман; пер. с англ. Б.В. Логинова и Л.С. Срубщика под ред. В.А. Треногина и В.И. Юдовича. М.: Мир, 1974.

- Фаддеев Л.Д., Лавров И.А. Российские математические школы // Вестник Российской академии наук. 1999. Т.69. №5. С. 391–397.
- Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*. 1922. Vol. 3. Pp. 133–181.
- Bogatov E. M. Key moments of the mutual influence of the Polish and Soviet schools of nonlinear functional analysis in the 1920s – 1950s. *Antiquitates Mathematicae*. 2017. V. 11. Pp. 131–156. DOI: 10.14708/am.v14i1.6418
- Collatz L. Funktion analytische Methoden in der praktischen Analysis. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. 1953. Т.4. Pp. 327–357.
- Demidov S. L'histoire des mathématiques en Russie et l'URSS en tant qu'histoire des écoles. Историко-математические исследования. 2-я серия. Спец. Вып. 1997. С.9–21.
- Golomb M. Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Funktionalgleichungen // *Mathematische Zeitschrift*. 1935. V. 39. Pp. 45–75.
- Hildebrandt T.H., Graves L M. Implicit functions and their differentials in general analysis. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1927. Vol. 29. Iss. 1. Pp. 127–153.
- Hu Y. The largest tree in the Mathematical Genealogy Project. Total 21382 mathematicians. 2006. <https://web.cs.ucla.edu/~dt/genealogy3.pdf> (дата обращения 06.05.2024)
- Hu Y. The 4th largest tree in the Mathematical Genealogy Project. Total 2130 mathematicians. 2008 http://yifanhu.net/GALLERY/MATH_GENEALOGY/plot_comp4_p2.2_font8.pdf
- Krein M.G. and Smulian V.L. On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space. *Annals of Mathematics*. 1940. V. 41. Pp. 556–583.
- Leray J., Schauder J. Topologie et équations fonctionnelles. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*. 1934. V. 6. Pp. 45–73.
- Liapounoff A. Sur un problème de Tchebycheff. *Memoires de l'Academie Imperiale des Sciences de St. Petersburg*. 1905. Vol. 17 (8). No. 3. Pp. 1–31.
- Morse M. Relations between the critical points of a real function of n independent variables. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1925. V. 22. Pp. 84–110.
- Schauder J. Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen. *Mathematische Zeitschrift*. 1927. Vol. 26. Iss. 1. Pp. 47–65.
- Schmidt E. Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen. *Mathematische Annalen*. 1908. Vol. 65. Iss. 3. Pp. 370–399.
- Tychonoff A. Ein Fixpunktsatz. *Mathematische Annalen*. 1935. Vol. 111. Pp. 767–776.

THE HISTORY OF SOVIET SCHOOLS OF NONLINEAR FUNCTIONAL ANALYSIS IN THE SECOND THIRD OF THE 20TH CENTURY

Bogatov E. M.
PhD (Mathematics),
associate professor,
embogatov@inbox.ru
Sary Oskol

Branch of National Research University of
Science and Technology “MISIS” in Gubkin
town of Belgorod Region;
Sary Oskol Technological Institute of National
Research University of Science and Technology
“MISIS”

Abstract. This paper presents for the first time the Russian schools of nonlinear functional analysis originated in the 1930s (Moscow school led by L.A. Lyusternik, Leningrad school led by L.V. Kantorovich), in the 1940s (Kiev-Odessa school led by M.G. Krein), in the 1950s (Voronezh school led by M.A. Krasnoselskii, Moscow school led by M.M. Vainberg). It is determined that Voronezh school of nonlinear functional

analysis, which contributed to the development of its following sections: topological methods of nonlinear analysis, variational methods for solving operator equations, theory of positive operators, branching and bifurcation theory, qualitative aspects of approximate methods for solving operator equations, was the largest. The main directions of the work of the mentioned schools are singled out, the qualitative composition of the performers and the results obtained in the 1930s-1960s are specified. A new method of presenting mathematical results – based on the table of thinking tools - is stated. A schematic representation of nonlinear functional analysis centers in the USSR is given, considering the transition and branches. The first steps of comparative analysis of achievements of the Soviet school of nonlinear functional analysis and similar schools in the West are made. The work can be continued in several directions: a) drawing parallels with the development of nonlinear functional analysis in Western countries and with the development of nonlinear mechanics in our country and abroad; b) study of mutual influence of ideas developed within the framework of national mathematical schools; c) study the history of scientific communications, institutions, scientific and educational systems and scientific and biographical aspects of the discussed field in their interrelation..

Keywords: nonlinear functional analysis, L.A. Lyusternik, L.V. Kantorovich, M.G. Krein, M.A. Krasnoselski, M.M. Vainberg, V.A. Trenogin, Yu.G. Borisovich.

References

- Akhmedov, K. T. (1957). The analytic method of Nekrasov–Nazarov in non-linear analysis. *Uspekhi Mat. Nauk*, 12:4 (76), 135–153. (In Russ., abstract in Eng.)
- Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta Mathematicae*, 3, 133–181.
- Bakhtin, I. A., Krasnosel'skii, M. A. (1961). The method of successive approximations in the theory of equations with concave operators. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2:3, 313–330. (In Russ., abstract in Eng.)
- Bogatov, E. M. (2017). Key moments of the mutual influence of the Polish and Soviet schools of nonlinear functional analysis in the 1920s – 1950s. *Antiquitates Mathematicae*, 11, 131–156. DOI: 10.14708/am.v14i1.6418
- Bogatov, E. M. (2018). On the history of the fixed point method and the contribution of the soviet mathematicians (1920s–1950s.). *Chebyshevskii Sb.*, 19:2, 30–55. DOI 10.22405/2226-8383-2018-19-2-30-55. (In Russ., abstract in Eng.)
- Bogatov, E. M. (2023). On the contribution of Russian mathematicians to the development of nonlinear functional analysis (1920–1960). *History and Pedagogy of Natural Science*, 3-4, 44–54. DOI:10.24412/2226-2296-2023-3-4-44-54 (In Russ., abstract in Eng.)
- Bogatov, E. M. (2024). Ob otechestvennyh nauchnyh shkolah nelinejnogo funktsional'nogo analiza v 1940-h-1960-h gg. [On domestic scientific schools of nonlinear functional analysis in the 1940s-1960s]. *Sb. tezisov IV konferencii matematicheskikh centrov Rossii* (pp. 111–112). SPb: SpbGU (In Russ.).
- Bogatov, E. M., Bogatova, V.P. (2022). O vklade matematikov pervoj velichiny v Atomnyj proekt SSSR. *Applied Mathematics & Physics*, 54, 2, 98–113. DOI 10.52575/2687-0959-2022-54-2-98-113 (In Russ., abstract in Eng.)
- Borisovich, Yu.G. (1964). Teoriya slabo nepreryvnyh vektornykh polej i nekotorye ee prilozheniya. [Doctoral Disertation] Voronezh. (In Russ.)
- Borisovich, Yu. G., Gel'man, B. D., Muhamadiev, È., Obukhovskii, V. V. (1969). The rotation of multivalued vector fields. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 187:5, 971–973. (In Russ., abstract in Eng.)

- Borovskih, A. V. (2022). On the Contents of Mathematical Education. *Mathematics for Non-Mathematicians. Continuum. Maths. Informatics. Education* 4(28), 51-65. DOI: 10.24888/2500-1957-2022-4-51-65. (In Russ., abstarct in Eng.)
- Borovskih, A. V. (2024). On the Content of School Mathematics Education. From Contents to Content: Mathematics as a System of Mental Means. *Lomonosov Pedagogical Education Journal*, 2, 61–82. DOI: 10.55959/ LPEJ-24-16 (In Russ., abstarct in Eng.)
- Demidov, S. (1997). L'histoire des mathématiques en Russie et l'URSS en tant qu'histoire des écoles. *Istoriko-matematicheskie issledovaniya*, 2-ya seriya, Spec. Vyp., 9–21.
- Faddeev, L. D., Lavrov, I. A. (1999). Rossijskie matematicheskie shkoly. *Vestnik Rossijskoj akademii nauk*, 69, 5, 391–397. (In Russ.)
- Gavurin, M. K. (1939) K postroeniyu differencial'nogo i integral'nogo ischisleniya v prostranstvah Banaha. *Doklady AN SSSR*, 22, 9, 552-556. (In Russ.)
- Gantmaher, F. R., Krejn, M. G. (1941). *Oscillyacionnye matricy i yadra i malye kolebaniya mekhanicheskikh sistem*. Moscow-Leningrad: GITTL. (In Russ.)
- Golomb M. (1935). Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Funktionalgleichungen. *Mathematische Zeitschrift*, 39, 45–75.
- Hildebrandt, T. H., Graves, L. M. (1927). Implicit functions and their differentials in general analysis. *Transactions of the American Mathematical Society*, 29, 1, 127-153.
- Hu, Yifan. (2006). The largest tree in the Mathematical Genealogy Project. Total 21382 mathematicians. Retrieved from <https://web.cs.ucla.edu/~dt/genealogy3.pdf>
- Hu Yifan. (2008). The 4-th largest tree in the Mathematical Genealogy Project. Total 2130 mathematicians. http://yifanhu.net/GALLERY/MATH_GENEALOGY/plot_comp4_p2.2_font8.pdf
- Institut matematiki AN USSR (1988). Sost. YU. A. Mitropol'skij, V. V. Strok. Otv red. Mitropol'skij YU. A. Kiev: Nauk. dumka. (In Russ.)
- Kantorovich, L.V. (1935). Linejnye poluuporyadochennye prostranstva i ih primenenie k teorii linejnyh operacij. *Doklady AN SSSR*, 4, 1-2, 11–14. (In Russ.)
- Kantorovich, L. V. (1937). O poluuporyadochennyh prostranstvah. *Izvestiya AN SSSR. Ser. Matem.*, 1:1. 91–110. (In Russ., abstarct in French.)
- Kantorovich, L. V. (1948). Functional analysis and applied mathematics. *Uspekhi Mat. Nauk*, 3:6 (28), 89–185. (In Russ., abstarct in Eng.)
- Kantorovich, L. V. (1951). Princip mazhorant i metod N'yutona. *Doklady AN SSSR*, 76, 1, 17–20. (In Russ.)
- Collatz, L. (1953). Funktion analytische Methoden in der praktischen Analysis. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 4, 327–357.
- Krasnosel'skij, M. A. (1956). *Topologicheskie metody v teorii integral'nyh uravnenij*. Moscow: GITL. (In Russ.)
- Krasnosel'skij, M. A. (1962). *Polozhitel'nye resheniya operatornyh uravnenij*. Moscow: FIZMATGIZ. (In Russ.)
- Krasnosel'skij, M. A., Vajnikko, G. M., Zabrejko, P. P., Rutickij, YA. B., Stecenko, V. Ya. (1969). *Priblizhennoe reshenie operatornyh uravnenij*. Moscow: Nauka. (In Russ.)
- Krasnosel'skij, M. A., Zabrejko, P. P. (1975). *Geometricheskie metody nelinejnogo analiza*. Moscow: Nauka. (In Russ.)
- Krein, M. G., Rutman, M. A. (1948). Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space. *Uspekhi Mat. Nauk*, 3:1(23), 3–95. (In Russ., abstarct in Eng.)
- Krein, M. G., Smulian, V. L. (1940). On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space. *Annals of Math.*, 41, 556–583.
- Kudryavcev, V.V. (2018). Nauchnye shkoly v otechestvennoj radiofizike: zarozhdenie, razvitie, tvorcheskoe nasledie [Doctoral Dissertation]. Moscow. (In Russ.)
- Leray, J., .Schauder, J. (1934). Topologie et équations fonctionnelles *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, 6, 45–73.

- Lumiste, Yu. G. (1955). Metod naiskorejshego spuska pri nelinejnyh uravneniyah. *Uchyonye zapiski Tartusskogo universiteta*, 37, 106–113. (In Russ.)
- Liapounoff, A. (1905). Sur un problème de Tchebycheff. *Memoires de l'Academie Imperiale des Sciences de St. Petersburg*, 17 (8), 3, 1–31.
- Lyusternik, L. A., Shnirel'man, L. G. (1930). *Topologicheskie metody v variacionnyh zadachah*. Moscow: Issl. in-t matem. i mekh. pri 1-m MGU. (In Russ.)
- Mark Aleksandrovich Krasnosel'skij (2000). *K 80-letiyu so dnya rozhdeniya. Sb. statej*. Moscow: IPPI RAN. (In Russ.)
- Mirskaya, E. Z. (2005). *Nauchnye shkoly: istoriya, problemy i perspektivy. Naukovedenie i novye tendencii v razvitii rossijskoj nauki*. Pod red. A.G. Allahverdyana i dr. Moscow: Logos, 244–265. (In Russ.)
- Morse, M. (1925). Relations between the critical points of a real function of n independent variables. *Transactions of the American Mathematical Society*, 22, 84–110.
- Nazarov, N. N. (1945). Metody resheniya nelinejnyh integral'nyh uravnenij tipa Gammershtejna. *Trudy Sredneaziat. gos. un-ta. Seriya 6. Fiz.-mat. nauki*, 3–14.
- Sadovskii, B. N. (1967). A fixed-point principle. *Funct. Anal. Appl.*, 1:2, 151–153.
- Schauder, J. (1927). Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen. *Mathematische Zeitschrift*, 26, 1, 47–65.
- Schmidt, E. (1908). Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. III. Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen. *Mathematische Annalen*, 65, 3, 370–399.
- Stapan, A. E. (1951). Razvetvlenie reshenij nelinejnyh integral'nyh uravnenij. [PhD Thesis]. Riga (In Russ.)
- Teoriya vetvleniya i nelinejnye zadachi na sobstvennye znacheniya* (1974) red. D.B. Keller i S. Antman. per. s angl. B. V. Loginova i L. S. Srubshchika pod red. V.A. Trenogina i V.I. Yudovicha. Moscow: Mir. (In Russ.)
- Tychonoff, A. (1935). Ein Fixpunktsatz. *Mathematische Annalen*, 111, 767–776.
- Vajnberg, M. M. (1956). *Variacionnye metody issledovaniya nelinejnyh operatorov*. Moscow: GITTL. (In Russ.)
- Vainberg, M. M. (1961). On the convergence of the process of steepest descent for nonlinear equations. *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2:2, 201–220. (In Russ., abstarct in Eng.)
- Vainberg, M. M., Trenogin V. A. (1969). *Teoriya vetvleniya reshenij nelinejnyh uravnenij*. Moscow: Nauka. (In Russ.)
- Vainikko, G. M. (1969). The compact approximation principle in the theory of approximation methods. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 9:4, 739–761. (In Russ., abstarct in Eng.)
- Vizgin, V. P., Kessenih, A.V. (2016.) Nauchno-shkol'nyj podhod k istorii otechestvennoj fiziki. *Istoriya nauki i tekhn.* 1, 3–23. (In Russ., abstarct in Eng.)
- Zabrejko, P. P. (2000). M.A. Krasnosel'skij – moj uchitel' i drug / V kn. *Mark Aleksandrovich Krasnosel'skij. K 80-letiyu so dnya rozhdeniya. Sb. statej*. Moscow: IPPI RAN, 28–54. (In Russ.)

Статья поступила в редакцию 16.09.2024
Принята к публикации 20.09.2024