

DOI: 10.24888/2500-1957-2023-3-22-38

УДК  
372.851

## О РАЗЛИЧЕНИИ ШКОЛЬНИКАМИ ПОНЯТИЙ ЦИФРЫ И ЧИСЛА

Лисицын Михаил Денисович  
аспирант  
lismihail40rus@gmail.com  
г. Москва

Московский государственный университет  
имени М.В. Ломоносова

**Аннотация.** Школьники не только младших, но и более старших классов часто не различают понятия «цифра» и «число». Эту проблему отмечают авторы десятков работ, но обычно при этом воздерживаются от методических рекомендаций для её решения. Как правило, обсуждение этого различия предлагается проводить в самом начале курса арифметики, хотя на самом деле различие указанных понятий становится функциональным гораздо позже – при переходе к десятичной системе счисления с операциями «в столбик». На практике отсутствие различия «цифры» и «числа» у учеников может проявляться, с одной стороны, в употреблении в их речи и письме некорректных фраз, а с другой – в неспособности справиться с заданиями, выполнение которых невозможно без различия этих понятий по сути. Автором проведена диагностика указанной проблемы в классах, в которых он работает как учитель (6-й и два 8-х). Эта диагностика подтвердила отсутствие должного различия. В рамках методической работы по исправлению ситуации планировалось вовлечение учеников в деятельность по типу «найди цифры/числа в тексте» и в обсуждение её результатов, предполагающее дискуссию между учащимися и освоение ими различия понятий цифры и числа в качестве средства для разрешения спора. В реальности, исходя из способностей школьников, замысел пришлось скорректировать в сторону обсуждения проблемного вопроса «Зачем в формулировке задания было использовано это слово?» и в применении «Ага-эффекта», связанного с актом дифференциации (в нашем случае – различия понятий). Проведённая впоследствии диагностика показала, что ученики стали лучше разграничивать понятия «цифра» и «число» по сути. Лучший результат показали шестиклассники, которые из трёх классов проявили себя наиболее активно в ходе описанной выше дискуссии, а худший – ученики того класса, который был наименее активен. Полученные результаты позволяют поставить вопросы о том, имеется ли зависимость результата от возраста опрашиваемых и какие дефекты в методике нужно преодолеть, чтобы у обучающихся требуемое различие понятий формировалось своевременно.

**Ключевые слова:** цифры и числа, различение понятий, смена представлений.

**Благодарности:** Автор выражает благодарность своему научному руководителю доц. А.В. Бегунцу за постоянное внимание к работе, а также проф. А.В. Боровских за чрезвычайно полезные консультации.

### Введение

Цифры и числа появляются в школьной математике, начиная с первого класса как знаковые средства, обеспечивающие сначала просто счёт, а потом и более сложные операции

с количествами. Однако поначалу различия понятий «число» и «цифра» не существует. Запись «8» есть знак соответствующего количества.

С переходом к счёту и к операциям в пределах 1000 для возникновения различия цифры и числа также нет принципиальных оснований: хотя дву- и трёхзначные числа и воспринимаются как набор количеств разных масштабов, но эти масштабы ассоциируются со специальными названиями: «237» означает 2 единицы «больших кучек» (сотен), 3 – «средних» (десятков) и 7 – «штук» (единиц), и фактически мы остаемся в рамках счёта именованных единиц, с той только разницей, что эти единицы называются не «птички», «кролики» и т. п., а абстрактно – «единицы», «десятки» и «сотни». Главным элементом развития здесь является формирование правил пересчёта одних квазиименованных количеств в другие. Это нормальный шаг в развитии навыков счёта, он подкрепляется визуальными опорами в виде «треугольных групп» (треугольник из 10 точек – это десяток, треугольник из 10 таких треугольников – сотня) или «связок» из палочек, и эти представления вполне обеспечивают как операции сложения и вычитания, так и простейшие операции умножения и деления.

Различение цифры и числа становится существенным на следующем этапе – при переходе к позиционной системе счисления. Здесь учащиеся осваивают уже оперирование со *сложным знаком*, поскольку число в позиционной записи представляет собой уже не набор, а *структуру*, в которой определённое значение имеет не только цифра как таковая (как знак определённого количества), но и то *место*, в котором она находится.

Именно это двойное значение – значение цифры как знака количества и значение того места, на котором она находится в числе – определяет возможность построения универсальной системы счисления, построенной на операциях «в столбик» и позволяющей, в отличие от предыдущего этапа, работать с количествами, которые ни увидеть, ни вообразить невозможно. Гарантированно не ошибаться при выполнении этих операций позволяет только понимание этой двойственности, и, как следствие, понимание различия между цифрой (как элементарным знаком) и числом (как сложным знаком, структурой из элементарных знаков).

К сожалению, зачастую в начальной школе ни то, ни другое понимание не формируются. Вместо этого осваиваются довольно сложные алгоритмы действий со значками, которые потом достаточно быстро забываются (или, в худшем случае, превращаются в ошибочные). В результате уже в средней школе вычисления представляют собой совершенно излишние затруднения, серьёзно отвлекающие внимание школьников от содержания решаемых задач и тем самым становящиеся тормозом для дальнейшего обучения и интеллектуального развития.

### Обзор литературы

Хотя к теме цифры и числа обращались многие авторы – за последние 10 лет этого вопроса так или иначе касались порядка 170 работ, представленных в РИНЦ, лишь немногие затрагивали вопрос о различении этих понятий. Так, почти в 40% работ авторы просто не обсуждают вопрос о различении: как правило, они рассматривают другие проблемы и обращаются к числам и цифрам лишь для достижения своих целей.

Примерно в четверти всех работ содержатся практические примеры обучения счёту. В основном, это описание занятий для дошкольников и учеников начальных классов, связанных с изучением чисел и цифр, или подборка заданий и упражнений на данную тему. Чаще всего, когда речь заходит про отношение цифр и чисел, в работах лишь сказано, что числа записываются при помощи десяти знаков: 0, 1, ..., 9.

Отдельные авторы, бывает, демонстрируют, что и сами не владеют различением обсуждаемых понятий и пишут что-то типа «карточка с цифрой 10». Вряд ли можно говорить о различении понятий и в тех случаях, когда указывается, что учитель или воспитатель сообщает детям, что при подсчёте некоторых предметов (например, морковок) в пределах девяти числом является их количество, а цифрой – знак для его обозначения, поскольку, как мы уже говорили, различение цифры и числа становится функциональным и начинает играть существенную роль только при изучении многозначных чисел.

Только десятая часть всех работ обращается к рассматриваемому различению по существу: отличие цифры от числа не просто упоминается, на нём делается акцент. Правда, при этом чётких методических рекомендаций не даётся, или они носят достаточно сомнительный характер.

Например, один автор отмечает, что «проблема различения понятий число и цифра стоит довольно остро: их путают не только дети, но и воспитатели», и поэтому «во избежание путаницы понятий число и цифра в последующем обучении» предлагает исключать некорректные формулировки (такие, как «чётные цифры») (Ломаева, 2019, 37). Безусловно, такие рекомендации действительно могут помочь не усугублять путаницу в понятиях, но они ничего не говорят о том, что нужно делать, чтобы у детей появилось чёткое различение.

В другой работе (Тонких, 2023) также обращено внимание на корректность использования слов «цифра» и «число» в соответствующих формулировках, с замечанием, что лишь в некоторых случаях для удобства допускаются не совсем корректные, но более короткие фразы. Однако, на наш взгляд, искать вслед за автором причину отсутствия различения понятий в неправильном их употреблении в СМИ представляется не совсем правильным. Когда понятия в математике сформированы корректно, дети прекрасно различают, где математические понятия, а где житейские. Так, складывать вместе мы можем совершенно разные вещи, но от этого операция сложения чисел у детей хуже не становится. С этой точки зрения тезис «даже школьники младших классов знают, что и 46, и 200 – это не цифры, а числа» (Тонких, 2023, 64), если его понимать в смысле «каждый школьник знает», требует проверки.

Итак, мы можем наблюдать, что методических рекомендаций, позволяющих учить школьников так, чтобы у них возникло чёткое различение цифры и числа, в этом блоке статей не обнаруживается.

Также их нет в работах, посвящённых историческому аспекту понятий числа и цифры или затрагивающих его (в них обсуждается то, как менялись знаковые средства, используемые для обозначения чисел, каковы индо-арабские истоки современных цифр и т. п.). Таких работ также примерно 10% от всех рассмотренных материалов.

Такова же доля работ, находящихся на пересечении нашей темы с информатикой: системы счисления, позиционная запись числа и т. д. Следует отметить, что в информатике, когда речь заходит про соответствующее представление числа и отношение числа и цифры, используется более формальный подход: одно конкретное число записывается в виде линейной комбинации степеней десяти, цифры – это множители перед степенями. В большинстве работ различение цифры и числа на этом заканчивается, но иногда авторы подходят к данной проблеме более методично.

Например, в одной статье (Еремин, Поляков, 2020) помимо рассмотрения различных систем счисления, демонстрирующих связь основания системы счисления, её базиса и количества используемых цифр, также присутствует и пример того, как можно изложить устройство десятичной системы счисления для учеников. В основе предложенного подхода лежит использование «жетонов» разного вида: «при добавлении каждого более крупного жетона будем убирать со стола 10 жетонов меньшего размера» (Еремин, Поляков, 2020, 15).

Преимущество этого подхода заключается в его наглядности, но хотелось бы отметить, что поскольку все виды жетонов различны по внешнему виду, то оснований устанавливать строгий порядок на самом деле нет. Такой подход приводит фактически к формированию непозиционной системы счисления, использованию систем знаковых средств предыдущего типа (штуки-кучки-кучи, штуки-коробки-упаковки и т. п., единицы-десятки-сотни здесь лишь один из видов таких систем, отличающийся от других только наименованиями и отношением единиц). Такие системы широко используются на практике – это разные архаичные системы мер, однако для них необходимости в различении цифры и числа фактически нет: в рамках одной меры счёт идёт в пределах десятка (где цифра и число не различаются), а наличие именовании приписывает этим числам-цифрам разный смысл.

Поэтому, когда авторы предлагают «мы также можем дополнительно договориться, что, чем меньше размер жетонов, тем правее мы будем записывать их количество» (Еремин, Поляков, 2020, 15), это оказывается искусственным и внешним по отношению к логике происходящего приёмом. Почему договорились именно так? И зачем вообще договариваться? Здесь в упорядочении нет необходимости.

Ещё раз подчеркнём, что различие цифры и числа существенно именно в позиционной системе счисления, а эта система становится необходимой не тогда, когда мы ограничиваемся счётом в пределах тысячи, а тогда, когда мы считаем миллионы и миллиарды – такие количества, которые невозможно ни увидеть, ни вообразить, и когда счёт посредством материальных знаковых средств (типа жетонов) будет невозможен. Именно тогда возникает потребность введения упорядоченности разрядов вместо наименований разных мер (пусть даже абстрактных), а также появляется универсальная функция цифр, превращающих их в знак особого рода, а число – в структуру, в которой значение цифры определяется не только её собственной формой, но и её местом в структуре. Именно здесь находится то место в курсе математики, в котором возникает необходимость в различении цифры и числа, и в котором можно понять суть этого различения.

Представлены ли в методических работах какие-то способы введения этого различия по существу, а не на уровне констатации «цифра – не число», «число – не цифра»?

Этим вопросом фактически задавались лишь несколько авторов (Белозерова, 2018; Лапутина, 2017; Плотников, 2018; Саркисян, Муртазина, 2023; Чекин, 2018; Шмакова, Сидорова, 2020). Оставляя в стороне общие фиксации того, что понятия не различаются не только школьниками младших классов, но и в средней и старшей школе, а также взрослыми и порой учителями, мы остановимся только на идеях и ходах, претендующих на продуктивность.

Тезис 1: использовать специальные методики для введения различий с самого начала обучения:

а) интерактивные игры (например, от детей требуется из появляющихся и исчезающих на экране цифр составить разные трёхзначные числа, при этом «педагог в ходе игры должен обратить внимание на то, что при одних и тех же цифрах получаются разные числа, которые и читаются по-разному и т. д.») (Саркисян, Муртазина, 2023, 334);

б) упражнения, выполняя которые ученики различают «письменный знак» от «устного названия» количества предметов и/или их изображений (Шмакова, Сидорова, 2020) (также это различие можно встроить в задание, раскрывающее «количественную сущность числа 3» (Чекин, 2018, 41));

в) задания, в которых от учеников потребуется работа с цифрами, а не числами (например, «Запишите все возможные числа из цифр 3, 5, 7» (Шмакова, Сидорова, 2020, 19) или «Назови и запиши все двузначные числа, в записи которых использованы одинаковые цифры, расположи их в порядке возрастания» (Белозерова, 2018)), а также задания на поместное значение цифр (например, «Что обозначает цифра 5 в записи чисел: 5, 125, 54, 505?» (Лапутина, 2017));

г) формулировки тем, в которых подчёркивается не синонимичность понятий «цифра» и «число» («Число и цифра 1» и т. п.) (Чекин, 2018, 41);

е) проведение аналогий («Чем больше число, слово, чем длиннее музыкальная фраза, тем больше значков для записи нужно») (Белозерова, 2018);

ж) знакомство школьников с разными способами записи чисел (включая искусственно созданные) на начальных этапах и выполнение соответствующих заданий (Белозерова, 2018);

з) задания на правильное употребление слов «цифра» и «число» («Исправь ошибки в высказываниях: а) запиши цифру 27; б) цифру 5 нельзя разделить на 2 без остатка...») (Лапутина, 2017).

Все эти приёмы достаточно интересны, и даже могут быть полезны, но, к сожалению, в большинстве случаев, как мы видим, они применяются при счёте единиц и десятков, то

есть задолго до момента перехода к позиционной системе счисления, и не связаны с методикой этого перехода; в остальных случаях (например, пункт с) действия осуществляются лишь над числами в пределах тысячи. Указанные приёмы, конечно, можно было бы рассматривать и как пропедевтические, но, к сожалению, пока школьники работают в пределах первого десятка чисел, необходимости различения цифр и чисел не возникает в принципе, а потому и осознать, к чему было то или иное замечание, ученики на этом этапе не смогут, а значит, пропедевтический эффект будет или формальным (усвоение слов без понимания их значения), либо его вообще не будет.

Тезис 2: использовать измерение отрезков и единиц измерения:

а) для лучшего усвоения нумерации ( $1 \text{ м} = 10 \text{ дм} = 100 \text{ см}$ ), при этом «изучение чисел идёт параллельно, но с рассмотрением соответствующих чисел, выраженных в дециметрах и сантиметрах» (Шмакова, 2020, 19);

б) для «создания» определения числа самими учениками в результате выполнения работы по сравнению величин только с помощью частей тела (пятей, локтей и т. п.) и унарной системы счисления (Плотников, 2018).

Такой подход, безусловно, очень полезен, но опять же на предыдущем этапе – когда формируются навыки оперирования в непозиционных (или формально-позиционных) системах счисления. Однако для демонстрации отношения цифры и числа он никакой пользы не приносит, поскольку к представлению о числе как *структуре* он сам не ведёт, связь с цифрами десятичной системы счисления не возникнет без внешнего вмешательства учителя.

Тезис 3: использовать дискуссии исторического и философско-методологического типа (что есть число, откуда взялись числа и т. п.) (Плотников, 2018).

На наш взгляд, это может принести больше вреда, чем пользы вследствие того, что даже взрослые не всегда воспринимают и адекватно понимают «средствительную» функцию знаков, а зачастую оперируют с ними как с вещами, детей же это может только запутать.

Тезис 4: использовать наглядные средства (современные и исторические, а также раздаточные или составленные самими учениками материалы-таблицы и т. п.) (Белозерова, 2018; Чекин, 2018; Шмакова, Сидорова, 2020).

И этот круг идей на самом деле в вопросе различения понятий цифры и числа бесполезен. Ещё раз подчеркнём: ситуация, в которой позиционная система счисления становится необходимой – это ситуация выхода за пределы наглядности.

Тезис 5: обсуждать вопрос, что такое «одинаковые цифры» и «различные цифры»: исходя из того, что цифра – это знак письменности, автор отвечает «Под одинаковыми цифрами мы будем понимать цифры, которые обозначают одно и то же число. Соответственно, разные цифры – это цифры, которые обозначают разные числа... Так, в записи числа 33 используются две (одинаковые) цифры, один знак письменности» (Лапутина, 2017).

Здесь, так же, как и в тезисе 3, задействуется круг вопросов, в котором и взрослые люди разбираются далеко не все. Пока в начальной школе мы имеем дело с числами, *написанными* в тетрадке или в учебнике, и цифра, и число являются письменными знаками. В последующем они могут превращаться из «вещественных», написанных знаков в знаки *мыслимые*, для этого превращения есть классическая методика П.Я. Гальперина формирования умственных действий (Гальперин, 1996; Талызина, 1984), но всё равно более глубокое обсуждение различия между написанным знаком и знаком мыслимым возможно тогда, когда были уже полностью освоены основные представления и операции.

Подводя некоторый итог, можно отметить следующее. Несмотря на то, что в ряде работ авторы указывают на существование проблемы различения понятий цифры и числа у школьников (и не только), но какого-то более детального исследования причин возникновения этой проблемы, диагностики или методики формирования различения на основе принципиальной необходимости этого различия именно с введением позиционной системы счисления нами не было обнаружено (среди рассмотренных нами работ было

несколько, в которых проводилась некая диагностика, но диагностировалось не различение учениками этих понятий, а другие аспекты). Методические рекомендации по этой проблеме в подавляющем большинстве случаев относятся к этапу допозиционного счёта и не затрагивают вопросы о том, как формировать различение именно на этапе перехода к позиционному счёту, как исправлять эту проблему на более поздних этапах обучения.

### Диагностика проблемы

В силу указанных причин авторы поставили перед собой задачу выяснить, насколько действительно распространённым является среди учащихся средней школы неразличение понятий «цифра» и «число», и разработать методику коррекции этого дефекта.

Прежде, чем переходить к изложению наших результатов, заметим, что неразличение может проявляться по-разному: как в том, что ученик в своих речи и письме путает слово «цифры» и слово «числа», так и в том, что школьник не видит разницы между этими понятиями на уровне смысла, то есть он не разграничивает их в своей деятельности, а, следовательно, не способен решать задания, правильное выполнение которых невозможно без такого разграничения. Поэтому на уровне диагностики необходимо различать «речевое неразличение» и «смысловое неразличение». Как мы увидим, они могут проявляться вполне независимо.

Для выяснения того, насколько распространено среди школьников неразличение понятий цифры и числа, нами были подготовлены задания для учащихся, такие, чтобы после самостоятельного их выполнения учениками стало ясно, есть ли у них разграничение понятий «цифра» и «число» или оно отсутствует. Для каждого из указанных в предыдущем абзаце типа неразличения была составлена своя задача. Для того, чтобы такая работа не выглядела неуместно, инородно в учебном процессе, а также для того, чтобы не концентрировать внимание школьников на том, что есть общее в задачах, помогая тем самым ученикам с правильным решением, задания были предложены в рамках повторения других тем, знакомых учащимся.

Диагностика проводилась в трёх классах – один 6-й класс и два 8-х (А и Б).

В 6-м классе в рамках работы на повторение делимости чисел были предложены следующие задания:

«1. Делится ли число 21032023 на 3 и почему?» (аналогичная задача в другом варианте)

«2. Из одинаковых упаковок достали все карандаши, их оказалось 84. Найдите все цифры, каждая из которых могла бы обозначать количество карандашей в одной упаковке» (аналогичная задача в другом варианте).

При ответе на первую из приведённых задач предполагалось, что, применяя признак делимости на 3 для числа в условии, часть учеников используют словосочетание *сумма цифр*, в то время как другая часть учеников использует словосочетание *сумма чисел*. Использование последнего словосочетания указывает на то, что у данных школьников недостаточно разграничены понятия цифры и числа как слов: в своей речи и на письме такие ученики могут путать данные термины.

Для выяснения того, смогут ли учащиеся при этом решить задачу, опирающуюся на существенные различия в этих понятиях, использовалась вторая из приведённых задач. Только если учащийся разграничивает в своей деятельности указанные понятия, он сможет привести решение: либо перебрать все делители и оставить только те, что обозначаются ровно одной цифрой, либо рассмотреть все случаи деления на однозначные натуральные числа.

В диагностике, проведённой в 6-м классе, приняли участие 22 ученика. При ответе на первую задачу 8 школьников использовали выражение «сумма цифр», 7 школьников использовали выражение «сумма чисел» и 7 школьников не использовали в решении слова «цифры» и «числа» (рис. 1), вместо этого они в большинстве случаев выписывали саму сумму, после чего указывали разными способами, делится ли результат на 3 (один ученик

стал неправильно применять признак делимости на 3, спутав его с признаком деления на 2, но в его решении также не было слов «цифры» и «числа»).

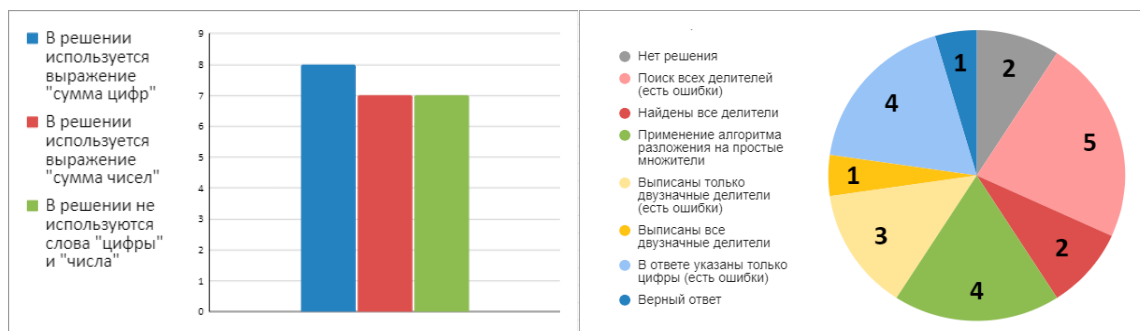


Рис. 1. Задача на различение понятий «цифры» и «числа» как слов, 6 класс (слева);

Рис. 2. Задача на различение понятий «цифры» и «числа» по сути, 6 класс (справа)

При проверке решений второй задачи выяснилось, что два школьника к ней не приступали. 7 учеников продемонстрировали, что они не видят в данном случае отличие цифры от числа. Они попытались выписать все делители числа, у двух это получилось с учётом того, что почти все школьники не рассматривали пару 1 и само данное число (видимо, потому, что не могли представить упаковку, содержащую ровно один карандаш, фломастер или ручку).

4 ученика попытались применить знакомый им алгоритм: видимо, эти учащиеся думали, что если в предыдущих заданиях (про нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного) требовалось в столбик разложить число на простые множители, то и здесь нужно поступить так же. После чего кто-то из них выписывал числа из столбца с простыми делителями, кто-то – из столбца с делимыми, целиком или частично.

4 ученика в качестве ответа указали только двузначные делители, у одного из них получилось выписать все такие делители правильно. Можно было бы сказать, что такой результат свидетельствует о том, что некоторое разграничение наших понятий присутствует у данных детей, но в явно недостаточном виде, поскольку оно не позволило им решить задачу верно.

5 учеников правильно различают понятия числа и цифры по смыслу, поскольку в качестве ответа указывали именно последние, у одного школьника получилось выписать все требуемые цифры (рис. 2).

В 8-х классах аналогичный опрос осуществлялся в рамках темы на повторение квадратного корня и действий с числами. Ученикам были предложены следующие задания:

«1. Напишите, что означают скобки в записи 6,4(464). Сравните 6,4(464) и 6,(4464464464464464)» (аналогичные задачи в других вариантах).

«2. Из одинаковых упаковок достали все карандаши, их оказалось 84. Найдите все цифры, каждая из которых могла бы обозначать количество карандашей в одной упаковке» (аналогичные задачи в других вариантах).

Так же, как в случае 6-го класса, первая из приведённых задач призвана проверить, разграничивают ли школьники слова «цифры» и «числа» в своей речи и на письме. Предполагалось, что учащиеся или словами опишут запись данного конкретного числа, или дадут определение периода (во время работы школьников попросили не ограничиваться одним только этим словом, а дать его определение в случае использования), при любом исходе часть учеников будет использовать словосочетание типа «повторяющиеся цифры», а другая часть будет использовать словосочетание типа «повторяющиеся числа». Вторая из приведённых задач повторяет задачу для 6-го класса и также призвана проверить наличие разграничения понятий «цифры» и «числа» по смыслу.

В диагностике 8-х классов было задействовано 37 учеников. При ответе на первую задачу 3 школьника, давая определение периода, использовали выражение «бесконечно

повторяющиеся цифры», 15 школьников использовали выражения «бесконечно повторяющиеся числа», «числа будут повторяться» и т. п., 17 школьников не использовали в решении слова «цифры» и «числа», причём это могли быть как школьники, которые проигнорировали данное им указание и ограничились фразой «это период», так и ученики, которые вместо этих слов использовали другие: «элементы», «последовательность»; могло быть указано, что бесконечно повторяется то, что непосредственно записано в скобках в данном числе, или только отмечено, что это «бесконечная дробь». Проводить границы между этими случаями не представляется нужным, исходя из целей, которые мы преследуем. Единственное, что, возможно, здесь стоит отметить, так это то, что 1 ученик не дал никакого решения данной задачи. Также 1 школьник использовал фразу «определённые цифры или числа продолжают до бесконечности». Такой ответ, с одной стороны, может указывать на неполное разграничение понятий «цифры» и «числа» как слов у данного ученика, но с другой стороны, всё же выделяется на фоне других учащихся (рис. 3).

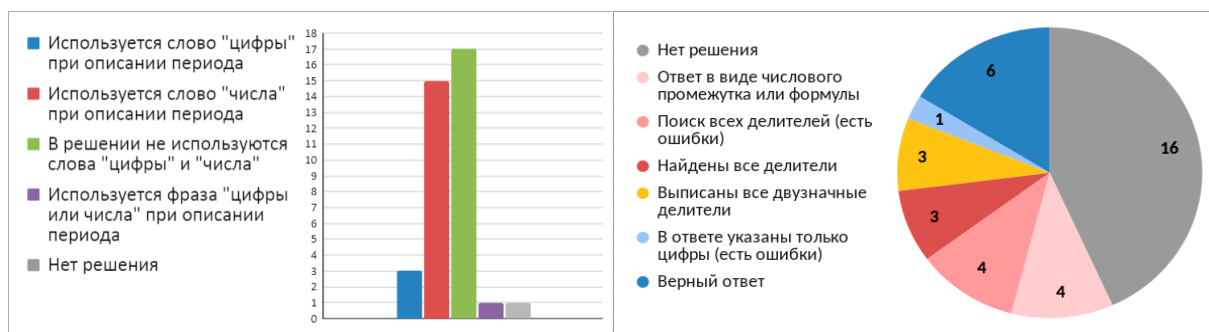


Рис. 3. Задача на различение понятий «цифры» и «числа» как слов, 8-е классы (слева)

Рис. 4. Задача на различение понятий «цифры» и «числа» по сути, 8-е классы (справа)

Вторая задача в работе для 6-го класса, которая содержала 10 заданий, находилась посередине, а в работе для 8-х классов, состоящей из 5 заданий, – на последней позиции. Можно попытаться усмотреть в этом причину, почему 16 человек не дали никакого решения этой задачи, но, вероятно, причина кроется всё-таки в том, что ученики просто не поняли, что нужно сделать, а это, в частности, следует из отсутствия у учащихся чёткого разграничения между цифрами и числами.

То же самое можно сказать ещё про 11 школьников, из которых четверо вообще дали ответ в виде формулы: исходное число поделить на что-то, или в виде числового промежутка от 1 до исходного числа. Видимо, этих учеников не смущает, что в упаковке у них получается нецелое число карандашей, фломастеров, ручек, более того, они отождествляют весь числовой промежуток только с целыми числами на нём. Оставшиеся ученики из этих 11 стали перебирать делители данного числа, трём удалось выписать их все. Три ученика указали в качестве ответа все двузначные делители, из их решения ясно, что они рассматривали все случаи деления на однозначные числа, но в ответе указали не делители, а каждое целое частное. Здесь стоит отметить, что эти три ученика при написании работы сидели близко друг к другу, из-за чего нельзя исключать возможность некоторого элемента «коллективного решения».

Семь школьников правильно стали указывать в ответе только цифры, способ, которым они пользовались, такой же – перебрать деление на однозначные числа. Один школьник остановился в этом переборе раньше необходимого, поэтому пропустил в ответе одну цифру (рис. 4).

#### Выводы диагностики проблемы

Итак, если рассмотреть полученные результаты, то можно сформулировать следующие выводы:

1) Во всех классах только около 20% опрошенных учеников имеют разграничение понятий «цифры» и «числа» по смыслу, позволяющее подойти максимально близко к

решению соответствующей задачи (в 6-м классе – около 23%, в 8-х – около 19%), при этом процент тех, кому удалось правильно её решить ещё меньше (около 12%).

2) Если рассмотреть соотношение тех, кто в задаче на речевое различение понятий неуместно употребил слово «числа» к тем, кто использовал слово «цифры» правильно по смыслу, то в 6-м классе их примерно поровну (9 к 8), а в 8-х классах первых в 5 раз больше, чем вторых. То есть в своих речи и письме школьники говорят то так, то эдак (хотя в 8-х классах некорректное употребление терминов более распространено).

3) При этом обнаружено отсутствие связи между различением понятий в речи и по смыслу. Это означает принципиальный дефект уже не столько в освоении математических понятий, сколько в том, что речевые средства не являются для школьников средством управления их действиями (как это должно было бы быть, если умственные действия формируются по методике П.Я. Гальперина), они существуют отдельно друг от друга. В результате действия учеников не могут быть не спонтанными, а их результат – случайным.

В рамках диагностики не было выявлено учеников, которые одновременно и правильно употребили бы слово «цифры» в одной задаче и продемонстрировали бы разграничение понятий, необходимое для решения другой. 10 школьников справились со вторым, но при этом применили неуместно слово «цифры» в первом задании. 5 учеников, наоборот, применили более подходящее слово «цифры» в первой задаче, но при выполнении второго задания различения не продемонстрировали. Одна восьмиклассница из этих учеников, которая хорошо занимается по алгебре и геометрии, после выполнения работы подошла узнать про решение второй задачи, и оказалось, что она никак не различала числа и цифры, для неё было открытием, что, например, 28 является числом, но не цифрой. И при этом в описании периода она употребила фразу «группа цифр, бесконечно повторяющихся». То есть «речевое различение» оказалось не осознанным, а просто заученным.

### **Методическая работа**

Чтобы исправить сложившуюся ситуацию отсутствия у школьников необходимого различения цифр и чисел для решения задач подобного типа, во всех классах была проведена следующая работа. На основе разных заданий олимпиад для учащихся был составлен текст, где периодически встречается символ «2». Задание для учеников заключалось не в том, чтобы решать или даже вникать в смысл задач, а, просмотрев этот текст, ответить на вопрос: «Сколько раз здесь встречается число 2?»

Идея этого, на первый взгляд несложного задания заключалась в следующем. Ученики, которые различают цифры и числа, не станут учитывать при подсчёте двойки, выступающие в роли цифр в многозначном числе, а не чисел. Ученики, у которых такого различения нет, подсчитают все двойки. Когда учащиеся начнут озвучивать свои ответы, у них возникнут разногласия. Спор должен разрешиться тем, что либо учитель обратит внимание учеников на слово «число» в условии, либо ученики сами придадут ему должное значение. В любом случае ученики осознают, что в формулировке вопроса не зря написано слово «число», потому что именно благодаря ему удастся разрешить противоречия.

В подготовленном файле символ «2» встречается 45 раз, 23 раза в качестве самого числа (обозначает количество чего-то, участвует в арифметических действиях). В оставшихся случаях «2» выступает либо в роли цифры (участвует в представлении числа, но не совпадает с ним), либо выступает в роли нумератора однотипных объектов (геометрических точек, задач в задании и т. п.).

Сначала данная работа была проделана с учениками 8А класса в качестве разминки в начале урока. Подготовленный файл был выведен на доску, чтобы весь класс мог посмотреть на него. Увидев перед собой текст, ученики удивились, причём дважды. Сначала – из-за несоответствия текста (напомним, это был текст олимпиадных задач) с тем, что они проходят, а затем – из-за непонимания того, что нужно сделать.

Кто-то так и остался в этом состоянии и не продвинулся дальше, кто-то всё же стал считать. В целом класс работал не очень активно: высказались три-четыре ученика, а остальные не торопились с ответами. Пришлось втягивать школьников в работу уже

индивидуальными вопросами: «Сколько у Вас получилось?», «А у Вас?», «Получилось подсчитать, что просили в условии?» и т. п.

В результате были даны следующие ответы: 42, 43, 34, 20, 46, причём последний был самым популярным. Ответ «20» дал один ученик, и, судя по его поведению, наугад. По работе со школьниками становилось понятно, что оживлённую дискуссию вызвать не получится. К тому же, исходя из полученных ответов, можно убедиться, что класс не видел различия и пытался подсчитать все символы (с большим или меньшим количеством ошибок). Поэтому внимание на слово «число» в условии пришлось обратить уже учителю, и прямо указать, что двойка выступает в этом тексте в трёх ипостасях – число, цифра и нумератор. После этого учитель вместе со школьниками разобрал задание: учитель на доске продвигался по тексту и, когда сталкивался с символом «2», спрашивал учеников, чем он является в данном случае. В результате таких совместных усилий был получен верный ответ на изначальный вопрос.

Не вполне удачный опыт по возбуждению дискуссии позволил модифицировать замысел, конкретизировав предмет обсуждения. С учениками 6 и 8Б классов дискуссию по поводу того, какой символ «2» учитывать при подсчёте, а какой – нет, нужно было строить не на результатах общего подсчёта, а на конкретном вхождении двойки в текст задания. Тогда понимание разницы между цифрой и числом усвоилось бы лучше, поскольку было бы связано с основанием для разрешения спора по поводу конкретной двойки. Для этого нужно было использовать ту двойку в тексте, которую кто-то из учеников подсчитал, а кто-то – нет.

Когда данное задание было предложено 6 классу, то ученики вели себя достаточно активно: с большим энтузиазмом считали, озвучивали больше ответов, чем это делали восьмиклассники. Были даны различные ответы от 40 до 49. При разборе оказалось, что расхождения возникали в случаях римской цифры II, при подсчёте слов «два», «двух» и др. То есть в случаях, не относящихся к символу «2».

После первого совместного рассмотрения текста, когда учитель продвигался по тексту и задавал вопрос: «Будем ли мы это учитывать?»; дискуссии не возникло – все ученики решили, что нужно подсчитать общее количество символов «2». Учитель обратил на это внимание и спросил, если ответ на исходный вопрос – это то же самое, что и ответ на вопрос: «Сколько раз здесь встречается 2?», то почему изначально присутствовало слово «число». После того, как школьники задумались над этим, учитель разобрался с ними в смыслах, которыми может обладать символ «2». Затем ученики принялись ещё раз выполнять задание, задавая по ходу подсчёта вопросы про то, учитывать ли «2» в том или ином конкретном случае. Учитель переадресовывал вопросы классу, а наиболее сложные разбирал сам. В результате кто-то дал ответ 23, кто-то 24, то есть, с огрехами или без, учащиеся с заданием справились. В данном случае ошибка при подсчёте уже не столь важна, поскольку у всех, давших эти ответы, явно возникло понимание важности того, в каком смысле символ «2» употребляется каждый раз в тексте.

В 8Б произошла похожая ситуация. Школьники дали ответы от 41 до 48. В процессе работы возникли вопросы по поводу римской II и слов «два», «двух» и др., но ученики разобрались с этим самостоятельно. Класс пришёл к соглашению, что нужно подсчитать все двойки, но, когда учитель уже собирался задать ученикам тот же вопрос, что уже был задан 6 классу: зачем нужно слово «число» в формулировке задания, один из учеников (с весьма скромной успеваемостью, как это ни странно) воскликнул: «А, здесь же число! Тогда я сейчас посчитаю». После этого он быстро выполнил подсчёт и получил 13. Учитель обратил внимание класса на правильность замечания этого школьника и напомнил учащимся о трёх функциях символа «2». Затем ученики вновь стали выполнять это задание, попутно спрашивая о затруднительных моментах. В результате был получен (в том числе и упомянутым школьником) правильный ответ 23.

В конце данной работы в каждом классе учитель, подводя итог, обращал внимание на то, почему не удалось выполнить задание сразу, и ещё раз указывал на разные функции символа.

### Диагностика изменения

Спустя несколько уроков в каждом классе была проведена проверка того, что школьники усвоили: ученики должны были выполнить работу по своей теме (6 класс – «Диagramмы», 8-е классы – более обобщённая тема «Элементы статистики»), в которой одно из заданий можно правильно выполнить только при наличии различения между понятиями «цифра» и «число».

В 6-м классе задание было следующее: нужно было посмотреть на текст своего варианта и построить столбчатую диаграмму, которая показывает, сколько раз в тексте встречается каждая из замеченных цифр (в первом варианте), каждое из замеченных чисел (во втором варианте). Текст был взят из пройденной главы учебника данного класса, два абзаца для каждого варианта. Текст был выбран таким образом, что в первом варианте несколько раз встречаются «3» и «8», и один раз «113», а во втором – «6» и «-5», и пару раз – «113». В первом варианте ученики должны были учесть каждый символ «1», «3» и «8», потому что он либо используется в записи числа 113, либо в записи однозначного числа (число записывается одной цифрой), и построить соответствующую диаграмму из трёх столбцов. Задание второго варианта предполагало также построение диаграммы из трёх столбцов, но каждый из которых связан с частотой появления в тексте «6», «-5» и «113».

В работе приняли участие 25 шестиклассников. Полученные результаты представлены на рисунке 5:

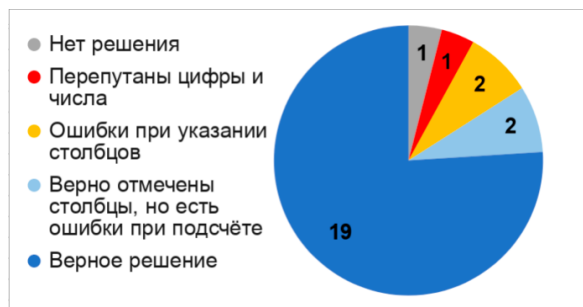


Рис. 5. Выполнение задания шестиклассниками

19 школьников дали правильный ответ. Двое верно отметили столбцы, но ошиблись при указании их высот (один ученик начертил первый столбец на 1 меньше, чем он должен быть, другой – правильно отметил высоту двух столбцов 6, но нарисовал для 7). Стоит заметить, что данные ошибки не относятся к различению чисел и цифр, поскольку при наименовании столбцов они правильно для своего варианта выбрали цифры/числа. Двое других учеников, напротив, допустили ошибки при указании столбцов. Оба этих школьника выполняли работу первого варианта и забыли учесть 113 при подсчёте цифр. Один ученик допустил ошибку в понимании задания: в его варианте нужно было работать с числами, а он построил диаграмму для цифр. Один ученик не приступал к данному заданию. Стоит отметить, что среди учеников, выполнявших второй вариант, не было обнаружено тех, подписал столбец «5» вместо «-5» (то есть работал именно с отрицательным числом, а не с цифрой).

Ученикам 8-х классов было предложено похожее задание. Было подготовлено четыре варианта. В первом варианте содержался тот же текст, что и в двух вариантах аналогичного задания для 6-го класса, требовалось выполнить следующее: «Постройте столбчатую диаграмму, которая показывает, с какой частотой в тексте встречается каждая из замеченных вами цифр». Для оставшихся вариантов также использовались разные фрагменты текста из учебника 6 класса. Формулировка заданий третьего и четвертого вариантов повторяла задание первого. В третьем варианте в качестве текста были предложены условия задач, где встречаются как целые числа, так и десятичные дроби. В четвертом варианте в качестве текста был предложен фрагмент, демонстрирующий распределительное свойство, в нём содержались только обыкновенные дроби. Правильное решение данной задачи предполагает

подсчёт каждой цифры, которое используется в записи числителей и знаменателей. Задание для второго варианта принципиально отличалось, так как в нём требовалось построить диаграмму не для цифр, а для чисел. В тексте этого варианта встречались как целые числа, так и обыкновенные дроби, и смешанные числа. Поскольку на дробь можно посмотреть, как на рациональное число, а можно как на отношение двух чисел, то ученик мог выбрать любой способ подсчёта и это не было бы ошибкой (аналогично для смешанных чисел). Но если бы он где-то при подсчёте разбил целое двузначное число на два, то это бы свидетельствовало о неполном различении понятий «цифра» и «число» и о неспособности ученика провести здесь границу.

Анализ работ показал, что среди школьников, писавших вот этот – второй вариант, таких не оказалось; его решали 8 учеников (4 из 8А и 4 из 8Б классов), с заданием полностью справились четверо из них. Трое имели правильную идею решения, но при подсчёте ошиблись (например, забыли учесть одно число, но аналогичные случаи подсчитаны верно). 1 ученик не приступал к заданию (рис. 6). Таким образом, все ученики, которые писали второй вариант и выполняли данное задание, продемонстрировали наличие различения числа и цифры.

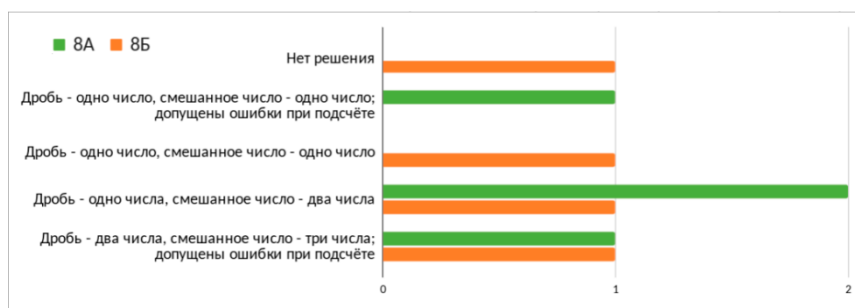


Рис. 6. Выполнение задания второго варианта восьмиклассниками

В оставшихся работах (первого, третьего и четвертого вариантов) ситуация обстояла хуже. Из 13 учеников 8А класса только один стал верно подсчитывать цифры (он выполнял работу первого варианта, сначала выписал все цифры по порядку и построил диаграмму, но забыл последний раз учесть 113). Остальные либо вели подсчёт чисел, причём некоторые допускали ошибки, кто-то не приступал к заданию, а кто-то строил диаграммы, не относящиеся к тому, что требовалось сделать (например, в третьем варианте были построены диаграммы для количества величин, про которые шла речь в условии задач, выбранных в качестве текста). Более подробно информация о том, как ученики 8А класса справились с задачами 1, 3 и 4 вариантов, представлена на рис. 7.

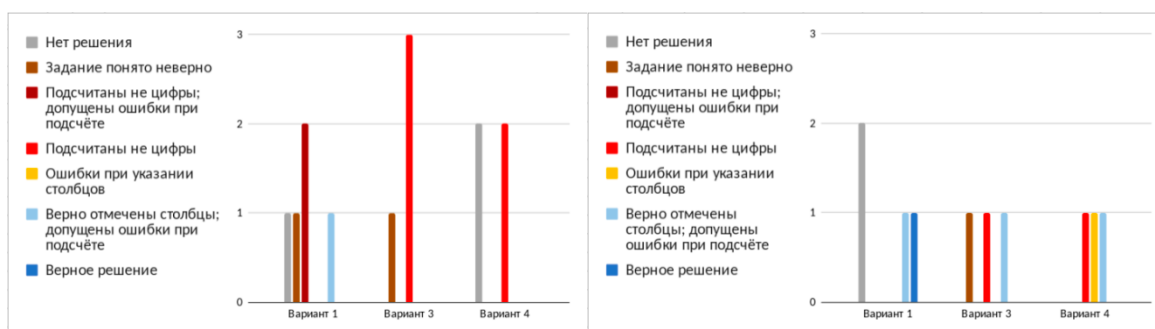


Рис. 7. Выполнение заданий вариантов 1, 3 и 4 учениками 8А класса (слева)

Рис. 8. Выполнение заданий вариантов 1, 3 и 4 учениками 8Б класса (справа)

Результаты учеников 8Б класса были несколько лучше: здесь 4 из 10 учеников продемонстрировали наличие различения между цифрами и числами (трое правильно стали строить диаграмму, но один из столбцов был на 1 или 2 ниже, чем должен быть, значит, они что-то пропустили; один ученик правильно подсчитал все цифры, но вместо «5» указал «-5»).

Один учащийся указал только несколько столбцов, причём по ним ясно, что, например, в «11» он не учитывал два раза встречающуюся цифру «1». Остальные школьники либо вели подсчёт чисел, либо не поняли, что от них требовалось, либо не приступали к этому заданию (рис. 8).

#### Выводы диагностики изменения

Из проведённой диагностики можно сделать следующие выводы:

1) Лучший результат показали ученики 6 класса. С одной стороны, это может быть вызвано тем, что в отличие от работ 8-х классов задание для этого класса было разбито только на два варианта, условие которых не раздавались каждому, а выводились на доску. Из-за этого ученики могли видеть вопросы обоих вариантов и понять, в чём здесь разница. Но с другой стороны, они в любом случае продемонстрировали, что слово «цифра» и слово «число» для них не синонимичны. Более того, во время работы некоторые ученики с первого варианта пытались задать вопрос учителю по поводу того, нужно ли учитывать цифры в записи 113 (учитель прямого ответа не давал, а просил сделать то, что указано в условии). То, что школьники задаются такими вопросами, подтверждает наличие у них некоторого различия цифр и чисел.

Но главная причина более успешного прохождения диагностики, как нам представляется, заключается в том, что учеников 6 класса, возможно, ввиду их более юного возраста, удалось более активно вовлечь в деятельность во время работы с проблемным заданием на нахождение количества чисел 2. Этим же можно объяснить, почему ученики 8А класса показали худший результат.

2) В целом ситуация, связанная с количеством учеников, которые имеют разграничение понятий «цифры» и «числа» по смыслу, улучшилась: около 59% школьников, которые выполняли предложенные задания, продемонстрировали различие понятий «цифра» и «число» (ученики 6-го класса – около 84%, 8А – около 29%, 8Б – около 59%), причём верно справились с заданием около 43% школьников (6 – около 76%, 8А – около 12%, 8Б – около 21%).

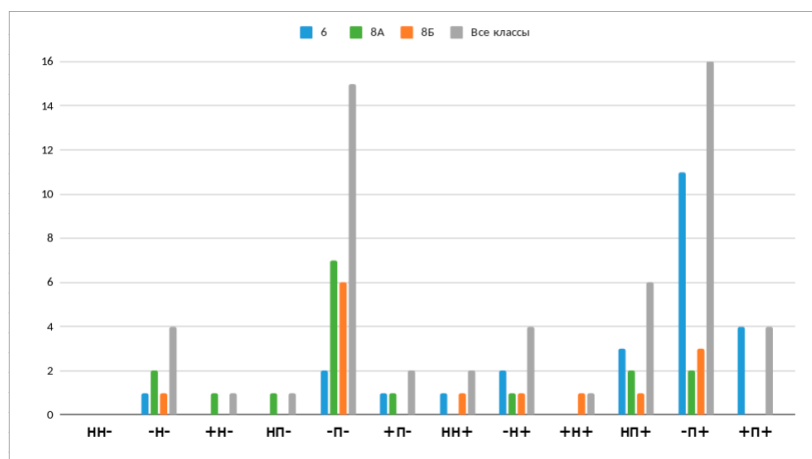


Рис. 9. Распределение изменений, связанных с различием цифры и числа

3) Можно более подробно рассмотреть распределение того, какие изменения, связанные с различием цифры и числа по сути, произошли в классах по отдельности и вместе. Для этого каждому ученику сопоставим последовательность из трёх символов. На первом месте поместим +, если ученик выполнял самое первое задание, в рамках решения которого показал наличие соответствующего различия, -, если он выполнял работу, но не продемонстрировал этого различия (в частности, не приступил к этому заданию), н, если ученика не было на занятии. На втором месте поставим п, если ученик присутствовал на занятии, на котором велась работа на подсчёт количества числа 2 в тексте, н, если он отсутствовал на этом уроке. На последнее место поставим «+», если ученик выполнял

последнее задание, в рамках решения которого показал наличие соответствующего различия, и поставим «-», если он выполнял работу, но не продемонстрировал этого различия (в частности, не приступил к этому заданию). Используя эти обозначения, проиллюстрируем полученные результаты диаграммой (рис. 9):

Эта диаграмма явно показывает, что наиболее массовыми являются позиции «-п+» (учащиеся, у которых в результате проведенной дискуссии появилось различие), в основном за счёт 6-го класса, и «-п-» (то есть несмотря на проведенное обсуждение различия не появилось), в основном за счёт 8-х классов. Позиции «+п+» и «+п-» (учащиеся, которые имели уже изначально твёрдое понимание, которое просто сохранилось) в совокупности находятся где-то на грани между массовым и единичным. В таком же положении находится и позиция «пп+», которая, на самом деле, является «скрытым ресурсом» позиций «-п+» и «+п+», так как, если бы эти учащиеся принимали участие в первой диагностике, то их можно было бы отнести к одной из этих позиций. Все остальные позиции носят явно случайный, единичный характер.

### Заключение

Завершая изложение полученных результатов, нельзя не остановиться на вопросах, которые возникают в связи с проведенным исследованием.

1) Какими факторами определяется разница в результатах у 6-х и 8-х классов? То ли это фактор общего «отупения» школьников, усиливающегося с возрастом? То ли, наоборот, это – фактор повышения трудности при запоздалой коррекции (над теми представлениями, которые корректируются, уже «надстроено» целое здание)? То ли это вообще случайность, а фундаментальным фактором является то, что речь так и не стала средством управления действиями школьников?

2) Какие дефекты в методике определяют сохранение неразличия понятий цифры и числа, которое должно было бы быть преодолено ещё в 3-4 классах?

3) Как оперативно выявлять и исправлять такие дефекты не «потом», в 8-м классе, а на этапе перехода из начальной школы в среднюю?

В целом, на наш взгляд, проведенное исследование позволяет сформулировать вполне определенные цели для движения в направлении ответа на все эти вопросы.

### Список литературы

- Архив заданий Всероссийской олимпиады школьников по математике // Информационный сайт об олимпиадах и других мероприятиях для школьников Olimpiada.ru. URL: <https://olimpiada.ru/activity/72/tasks/>
- Белозерова Н.Н. Понятия «числа» и «цифры». // Образовательная социальная сеть nsportal.ru. 2018. URL: <https://nsportal.ru/nachalnaya-shkola/matematika/2018/02/19/ponyatiya-chisla-i-tsifry>
- Боровских А.В. Деятельностная педагогика. Схемы педагогического мышления: учеб. пособие. М.: МАКС Пресс, 2020.
- Гальперин П.Я. О методе поэтапного формирования умственных действий // Теории учения. Хрестоматия. Ч. I. Отечественные теории учения / под ред. Н.Ф. Талызиной, И.А. Володарской. М.: Редакционно-издательский центр «Помощь», 1996. С. 67-70.
- Гальперин П.Я. Организация умственной деятельности и эффективность учения // Теории учения. Хрестоматия. Ч. I. Отечественные теории учения / под ред. Н.Ф. Талызиной, И.А. Володарской. М.: Редакционно-издательский центр «Помощь», 1996. С. 71-76.
- Гальперин П.Я. Поэтапное формирование как метод психологического исследования // Теории учения. Хрестоматия. Ч. I. Отечественные теории учения / под ред. Н.Ф. Талызиной, И.А. Володарской. М.: Редакционно-издательский центр «Помощь», 1996. С. 77-88.
- Еремин Е.А., Поляков К.Ю. Насколько правильно мы рассказываем школьникам про количество цифр в разных системах счисления? // Информатика в школе. 2020. № 6(159). С. 8-18. DOI 10.32517/2221-1993-2020-19-6-8-18.

- Лапутина Е.А. Конкретизация и грамотное употребление в речи понятий «число» и «цифра» в обучении учащихся начальной школы. // Образовательный портал «Инфоурок». 2017. URL: <https://infourok.ru/statya-po-matematike-chislo-i-cifra-1769806.html>
- Ломаева М.В. Учебно-игровые пособия в математическом развитии дошкольников // Тенденции развития науки и образования. 2019. № 52-1. С. 34-37. DOI 10.18411/lj-07-2019-10.
- Математика. 6 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Н.Я. Виленкин [и др.] 30-е изд., стер. М.: Мнемозина, 2013. 288 с.
- Плотников С.Н. Число. Определение понятия «число» // Рождественские чтения: материалы XXI Межрегиональной научно-методической конференции по вопросам применения ИКТ в образовании, Пермь, 20 января 2018 г. / Ответственные за выпуск Ю.А. Аляев, С.В. Русаков. Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2018. Вып. 21. С. 79-80.
- Саркисян М.А., Муртазина Н.А. Интерактивные игры в обучении нумерации чисел // Начальное филологическое образование и подготовка учителя в условиях внедрения стандартов третьего поколения: материалы международной научно-практической конференции преподавателей, аспирантов, студентов. В год 200-летия со дня рождения К.Д. Ушинского. В рамках университетской научной сессии «ДНИ НАУКИ МГПУ – 2023», Москва, 02 марта 2023 г. М.: Известия института педагогики и психологии образования, 2023. С. 331-335.
- Талызина Н.Ф. Управление процессом усвоения знаний (психологические основы). М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 345 с.
- Тонких А.П. За чистоту математического языка // Управление образованием: теория и практика. 2023. № 1(59). С. 60-80. DOI 10.25726/m2832-1698-0025-w.
- Чекин А.Л. Формирование математических понятий у младших школьников // Начальная школа. 2018. № 2. С. 40-41.
- Шмакова А.П., Сидорова Н.В. Методика преподавания математики в начальных классах: учеб. пособие. Ульяновск: Ульяновский государственный педагогический университет им. И.Н. Ульянова, 2020. 78 с.

## ON THE DISTINCTION BETWEEN THE CONCEPTS OF DIGIT AND NUMBER BY SCHOOLCHILDREN

Lisitsyn M. D.  
Postgraduate  
lismihail40rus@gmail.com  
Moscow

Lomonosov Moscow State University

**Abstract.** Not only elementary but also middle school students often do not distinguish between the concepts of «digit» and «number». This problem is noted by the authors of dozens of works, but generally they refrain from methodological recommendations for its solution. As a rule, it is proposed to discuss this distinction at the very beginning of the arithmetic course, although in fact the distinction of these concepts becomes functional much later – when switching to the decimal number system with «column» operations. In practice, the lack of the schoolchildren's distinction between «digit» and «number» may manifest itself, on the one hand, in the use of incorrect phrases in their speech and writing, and on the other – in the inability to complete the tasks which cannot be performed without distinguishing these concepts in essence. The author has carried out diagnostics of this problem in the classes in which he works as a teacher (one 6 grade and two 8 grade). This diagnostics confirmed the lack of proper

distinction. As part of the methodological work to correct the situation, it was planned to involve the students in «find digits/numbers in the text» type of activity and in the discussion of its results, involving a conversation between the schoolchildren and their mastering the distinction between the concepts of digits and numbers as a means to resolve the dispute. In reality, based on the abilities of the schoolchildren, the idea had to be adjusted towards discussing the problematic question «Why was this word used in the formulation of the task?» and in applying the «Wow-effect» associated with the act of differentiation (in our case, the distinction of concepts). The diagnostics carried out subsequently showed that the students began to distinguish better between the concepts of «digit» and «number» in essence. The best result was demonstrated by the sixth-graders who, out of the three classes, showed themselves the most active during the discussion described above, and the worst – by the students of the class that was the least active. The results obtained allow us to raise questions about whether there is a dependence of the result on the age of the respondents and what defects in the methodology need to be overcome in order for schoolchildren to form the required distinction of the concepts timely?

**Keywords:** digits and numbers, distinction of concepts, changing ideas.

## References

- Archive of the problems of the All-Russian Olympiad for schoolchildren in Mathematics [Electronic resource]. URL: <https://olimpiada.ru/activity/72/tasks/> (Accessed: 08.08.2023).
- Belozerova, N. N. (2018). Ponyatiya «chisla» i «tsifry». URL: <https://nsportal.ru/nachalnaya-shkola/matematika/2018/02/19/ponyatiya-chisla-i-tsifry>
- Borovskikh, A. V. (2020). *Doing Pedagogy. Schemes of pedagogical thinking: study manual*. Moscow: MAKSS Press.
- Chekin, A. L. (2018). Formirovanie matematicheskikh ponyatiy u mladshikh shkol'nikov. *Nachal'naya shkola*, 2, 40-41.
- Eremin, E. A., Polyakov, K. Yu. (2020). How correctly we tell pupils about the number of numerals in different notations? *Informatics in school*, 6(159), 8-18. DOI 10.32517/2221-1993-2020-19-6-8-18 (In Russ., abstract in Eng.)
- Gal'perin, P. Ya. (1996). O metode poetapnogo formirovaniya umstvennykh deystviy. *Teorii ucheniya. Khrestomatiya. Ch. I. Otechestvennye teorii ucheniya*, 67-70.
- Gal'perin, P. Ya. (1996). Organizatsiya umstvennoy deyatel'nosti i effektivnost' ucheniya. *Teorii ucheniya. Khrestomatiya. Ch. I. Otechestvennye teorii ucheniya*, 71-76.
- Gal'perin, P. Ya. (1996). Poetapnoe formirovanie kak metod psikhologicheskogo issledovaniya. *Teorii ucheniya. Khrestomatiya. Ch. I. Otechestvennye teorii ucheniya*, 77-88.
- Laputina, E. A. (2017). Konkretizatsiya i gramotnoe upotreblenie v rechi ponyatiy «chislo» i «tsifra» v obuchenii uchashchikhsya nachal'noy shkoly. URL: <https://infourok.ru/statya-po-matematike-chislo-i-cifra-1769806.html>
- Lomaeva, M. V. (2019). Uchebno-igrovye posobiya v matematicheskom razvitii doshkol'nikov. *Tendentsii razvitiya nauki i obrazovaniya*, 52-1, 34-37. DOI 10.18411/lj-07-2019-10.
- Plotnikov, S. N. (2018). Chislo. Opredelenie ponyatiya «chislo» [Number. Definition of the concept of «number»]. *Rozhdestvenskie chteniya: materialy XXI Mezhdunarodnoy nauchno-metodicheskoy konferentsii po voprosam primeneniya IKT v obrazovanii, Perm', 20 yanvarya 2018 g.* (pp. 79-80). Perm': Permskiy gosudarstvennyy natsional'nyy issledovatel'skiy universitet, 21. (In Russ.).
- Sarkisyan, M. A., Murtazina, N. A. (2023). Interaktivnye igry v obuchenii numeratsii chisel [Interactive games in the teaching of numbering]. *Nachal'noe filologicheskoe obrazovanie i podgotovka uchitelya v usloviyakh vnedreniya standartov tret'ego pokoleniya: materialy mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii prepodavateley, aspirantov,*

*studentov. V god 200-letiya so dnya rozhdeniya K.D. Ushinskogo. V ramkakh universitetskoj nauchnoy sessii «DNI NAUKI MGPU – 2023», Moskva, 02 marta 2023 g. (pp. 331-335). Moscow: Izvestiya instituta pedagogiki i psikhologii obrazovaniya. (In Russ.).*

Shmakova, A. P., Sidorova, N. V. (2020). *Metodika prepodavaniya matematiki v nachal'nykh klassakh: uchebnoe posobie*. Ul'yanovsk: Ul'yanovskiy gosudarstvennyy pedagogicheskiy universitet im. I. N. Ul'yanova. (In Russ.).

Talyzina, N. F. (1984). *Upravlenie protsessom usvoeniya znaniy (psikhologicheskie osnovy)*. Moscow: Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta. (In Russ.).

Tonkikh, A. P. (2023). For the purity of mathematical language. *Management of education: theory and practice*, 1(59), 60-80. DOI 10.25726/m2832-1698-0025-w. (In Russ., abstract in Eng.)

Vilenkin, N. Ya., Zhokhov, V. I., A. S. Chesnokov, A. S., & Shvartsburd, S. I. (2013). *Matematika. 6 klass: uchebnik dlya obshcheobrazovatel'nykh uchrezhdeniy*. Moscow: Mnemozina. (In Russ.).

Статья поступила в редакцию 20.08.2023

Принята к публикации 01.09.2023