

УДК
372.851**ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО
МАТЕРИАЛА ПРИ ПОДГОТОВКЕ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ****Сотникова Ольга Александровна**д.п.н., профессор
sotnol@mail.ru

Сыктывкар

Симоновская Галина Александровнак.п.н., доцент
simonovskaj_g@mail.ru

г. Елец

Сыктывкарский государственный универ-
ситет имени Питирима СорокинаЕлецкий государственный университет
им. И.А. Бунина

Аннотация. В статье рассматривается проблема предметной подготовки будущего учителя математики. Дается характеристика методологических знаний. Выделяются знания необходимые студенту для успешной самостоятельной работы с математическими фактами и их характеристиками. Представлены особенности предметных знаний курса алгебры. Описаны обобщенные действия при работе с алгебраическим материалом. Эти действия опираются на аксиоматизацию, как основной метод алгебры. Анализируется содержание вузовского курса алгебры и делается вывод, что курс построен аксиоматически с высокой степенью формализма и наличием особенного математического языка. Делается предположение, что уход от формализма даст студенту возможность вникнуть в суть математических терминов, структур, теорий, что позволит ему в ходе своей профессиональной деятельности адаптировать полученные знания. Грамотное владение обучающимися математическим языком является одним из результатов обучения в системе высшего педагогического образования. Особенный математический язык (формулы, записанные аналитически, запись построения доказательств, устная математическая речь и пр.) требует от студента не только знания синтаксиса и семантики математического языка, но умения им пользоваться, что возможно развить путем пояснения сути математических терминов, структур на естественном языке. Делается вывод, что изучение алгебраического материала при подготовке учителя математики будет эффективно, если в организации деятельности студентов будет использоваться связь между методологическими и предметными знаниями.

Ключевые слова: алгебраический материал, методологические знания, аксиоматизация, формализация и интерпретация.

Введение

В подготовке учителя математики можно выделить две составляющие: методическую и предметную. Методическую подготовку студенты получают в ходе изучения дисциплин методического модуля, прохождения учебных ознакомительных, производственных педагогических и других практик. Предметная подготовка будущего специалиста осуществляется в ходе изучения математических дисциплин и, возможно, при организации предметно-содержательных практик. Методическая и предметная области в подготовке современного учителя математики тесно переплетены, и качество подготовки высококлассного специалиста зависит и от уровня освоения предметных знаний. В этой связи в педагогических вузах нашей страны в разное время предлагались и проводились

коренные преобразования математической подготовки студентов: изменение аудиторных часов на изучение дисциплин математического модуля, введение курса элементарной математики, исключение формализованного материала, усиление практической направленности изучаемых дисциплин, расширение курсов по выбору предметного блока и др. Многочисленные попытки изменения учебных программ, введение образовательных стандартов, проявление тенденции демократизации и другие мероприятия в системе высшего педагогического образования, не привели к существенному изменению состояния математической подготовки будущих учителей. И на современном этапе поиск эффективных методов в усвоении вузовского курса высшей математики, лишенного формализма в знаниях, представляет серьезную и далеко нерешенную проблему. Уход от формализма даст студенту возможность вникнуть в суть математических терминов, структур, теорий, что позволит ему в ходе своей профессиональной деятельности адаптировать полученные знания. Предметная подготовка чрезвычайно важна для учителя математики, это неотъемлемая база при работе с одаренными учащимися (с повышенными образовательными потребностями).

Анализ содержания алгебраического материала

Данная проблема относится ко всем математическим курсам. Однако преподаватели высшей математики отмечают, что для алгебры данный недостаток проявляется в значительной степени и специфическим образом. На наш взгляд, это спровоцировано особенностями алгебраического материала.

Первый вид алгебраических объектов, объединенных в математические теории, характеризуется интуитивными теориями, элементы множеств которых допускают наглядно-образное представление, а алгебраические операции на них являются правилами нахождения результатов операции. Основные связи на начальных этапах развития алгебры, которые устанавливались в математике и способствовали ее становлению, — это связи наглядно-образных, житейских представлений с их обобщениями (математическими абстракциями). Мы их называем содержательным смыслом интуитивных теорий. Проблема обобщения свойств математических объектов привела к связям другого характера, состоящим в формальном смысле интуитивных теорий. (Сотникова, 2004).

Второй вид алгебраических объектов, объединяющихся в математические теории, характеризуется алгебраическими структурами, элементы множеств которых рассматриваются вне возможной их природы (обобщенное понятие множества), а алгебраические операции – вне правил, по которым находится результат операции. По отношению интуитивных теорий к ним связи, устанавливаемые в математике, характеризовались формализацией. Алгебраические структуры по отношению к интуитивным теориям характеризуются интерпретационными связями. Их установление раскрывает действенность алгебраических структур (Сотникова, 2004).

Основную особенность в развитии алгебраических знаний представляет переход от интуитивных теорий к алгебраическим структурам. В истории алгебры он предстал как барьерная ситуация для задач (алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел, разрешимость уравнений в квадратных радикалах), решение которых потребовало других методов и уровней абстракций (абстракции от абстракций). Преодоление барьерного перехода породило два основных метода алгебры: формализацию как способ получения алгебраических структур (способ получения знаний «формализованного» уровня) и интерпретацию как способ получения знаний в интуитивных теориях.

Проанализируем содержание алгебры с точки зрения философии математики. Г. Вейль, анализируя мыслительную деятельность исследовательской работы в области математики, выделяет «два способа понимания в математике, всепроникающие и плодотворные: топология и абстрактная алгебра» (Вейль, 1989, 26). При этом «понимание» он трактует применительно к математике как процедуру, состоящую из следующих действий:

- разделение предмета математического исследования;
- освоение каждой стороны полученного разделения, «исходя из особого, сравнительно узкого и легко обозримого набора предположений»;
- объединение результатов в сложное единство («возвращаемся к целому»).

Основанием к разделению и последующему соединению является, по его мнению, критерий плодотворности. В качестве этого основания и выделяется один из способов исследования математических объектов, охарактеризованный Г. Вейлем как метод абстрактной алгебры, он обладает специфической особенностью: «в алгебре исходным пунктом математического мышления выступают операции, а непрерывность (или некий ее алгебраический суррогат) вводится лишь на заключительном этапе спецификации. Эти два метода противоположны по направлению мысли» (Вейль, 1989, 34). Он выделяет следующие особенности абстрактной алгебры, которые подтверждаются историческим анализом развития алгебры, приведенным выше:

- 1) «замкнутость» в рассмотрении алгебраических действий;
- 2) «формальное» рассмотрение объектов;
- 3) чисто аксиоматическое построение алгебры.

Необходимо отметить еще одну особенность алгебры, на которую обратил внимание Г. Вейль. Алгебра соединяет в себе две идеи математики: конструктивизм и аксиоматизацию. Ни один из подходов не является в математике приоритетным, поэтому «взаимопроникновение этих процедур, возможно, и должно вызвать чувство удовлетворения» (Вейль, 1989, 22). Воззрения на понятие «конструктивность» (способ получения новых объектов, построение их) позволяет выделить интуитивные теории в алгебре как воплощение идей конструктивизма. Аксиоматизация, как это очевидным образом следует из структуры (алгебраических) аксиоматических теорий, воплощается в алгебраических структурах. То есть в идейном аспекте предметное содержание алгебры вбирает в себя два основных направления движения мысли: конструктивизм и аксиоматизация. Первое направление в предметном содержании алгебры «материализуется» интуитивными теориями, второе – алгебраическими структурами.

А.Н. Уайтхед характеризует алгебру как специфический язык, отмечая, что «алгебра полностью изменяет относительную важность факторов в обыденном языке» (Уайтхед, 1990, 331). Он указывает на важность языка алгебры в конкретной разновидности того образца, который должен быть передан мыслью. По его мнению, специфической особенностью алгебры является то, что используемые ею знаки и символы по заданным правилам наиболее адекватно отражают ход мысли, мыслительную деятельность человека. В этой связи необходимо сформулировать один вывод, важный для изучения алгебры. Дело в том, что каким бы ни был математический язык, насколько бы он ни использовал свои специфические знаки, он все равно играет роль вспомогательного средства, присоединяемого к обычному языку. Эту мысль однозначно высказывает и обосновывает В.Н. Молодший: язык математических знаков без обычного языка существовать не может (Молодший, 1969, 124). Действительно, в вузовской практике часто используются, например, такие обороты: «рассмотрим алгебраическую операцию, заданную правилом...», после чего следует формула. С одной стороны (точка зрения Уайтхеда) эта формула однозначно определяет ход мысли при задании алгебраической операции. С другой (точка зрения В.Н. Молодшего) для того, чтобы она стала существующей для человека, ее созерцающего (точнее – обрела значимость), необходим перевод формулы на естественный язык. Без этого перевода не будет «схватывания» мысли, заложенной алгебраическим текстом (формулой, последовательностью суждений на алгебраическом языке и т.д.).

Например, в комплексных числах изучается формула возведения комплексного числа в натуральную степень (формула Муавра):

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

где $z = r(\cos \varphi + i\sin \varphi)$.

Формула однозначно задает способ возведения в степень. Но без ее перевода в обучении на естественный язык она выступает лишь набором математических символов, не принимая «живого образа», что часто обнаруживается парадоксальным образом в процессе решения задач.

Например, z^9 при $z = \cos 400 - i \sin 400$ студентами «вычисляется» по формуле Муавра так:

$$z^9 = \cos(9 \cdot 400) - i \sin(9 \cdot 400) = \cos 360 - i \sin 360 = 1 - i \cdot 0 = 1.$$

Знак «+» в исходной формуле воспринят как несущественный, условие использования формулы игнорируется. Выясняется, что студент не понимает сути в представлении комплексного числа в тригонометрической форме. Не усвоены понятия модуля и аргумента комплексного числа. Часто приходится обращать на это внимание студентов и при нахождении корней n -степени из комплексного числа.

Корнем n -ой степени из комплексного числа $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ являются числа $z_k = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$, где $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Вычисляя $\sqrt{z}$ при $z = \cos 40 - i \sin 40$, игнорируя знак «-» в условии, студент получает $z_0 = \cos 20 + i \sin 20$. Выполняя проверку, формула Муавра дает другой результат $z_0^2 = \cos 40 + i \sin 40$.

Помимо формулы, записанной аналитически, для понимания ее сути необходимо прокомментировать основные аспекты на естественном языке.

Понимание сути математического понятия дает возможность грамотного его применения в конкретных ситуациях. Так, например, введенное понятие нейтрального элемента относительно произвольной бинарной операции на некотором множестве A легко переносится на числовые множества с известными операциями сложения и умножения. Но при рассмотрении множеств матриц, подстановок или искусственно созданных определений операций возникают трудности, которые преодолеваются лишь через словесное проговoreние сути понятия нейтрального элемента.

Особое место следует уделить структурам, содержащим кванторы, логические операции. Такого рода задания помогают раскрыть внутреннюю суть фундаментальных понятий. (Трунтаева, 2021)

Следовательно, особая «идейность» алгебры в ее языке. Для того чтобы изучать алгебру, т.е. изучать ход мыслей, приведший к математическим фактам, необходимо усвоить сущность алгебраического языка. Уметь понимать и применять этот язык на уровне высокого абстрагирования и в ходе будущей профессиональной деятельности (при обучении школьников математике).

Одна из особенностей алгебраического материала связана с отличием компонентов содержания от «школьных» компонентов.

Школьный курс математики содержит в основном родо-видовые определения, чаще с одним видовым отличием, а если их несколько, то логическая связь в большинстве случаев конъюнктивная (по одному – два примера можно привести с другой логической связью). Например:

- треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны;
- квадрат – это прямоугольник с равными сторонами;
- ромб – это параллелограмм с равными сторонами;
- вектор – это направленный отрезок прямой;
- многочленом называется сумма одночленов;
- две прямые называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Структура родо-видовых определений вузовского курса алгебры значительно сложнее. Например, определение линейно независимой системы векторов имеет в видовом отличии эквиваленцию, причем одна из составных частей – конъюнкция, и вся эта структура находится в области действия квантора общности.

Или:

Две группы называются изоморфными, если существует изоморфизм одной группы на другую.

В видовом отличии этого определения – условие существования. В курсе алгебры таких определений несколько. Наряду с приведенным, можно указать и другие примеры:

Система векторов линейно зависима, если существуют такие скаляры из поля P , что

...

Число a называется алгебраическим над полем P , если существует такой многочлен $f(x)$ из $P[x]$, что ... и т.д.

Таких определений в школьном курсе в явном виде нет.

Стоит отметить, что в курсе высшей алгебры содержится известное количество аксиоматических определений, носящих фундаментальный характер (определения алгебраических систем), тогда как в школьном курсе подобные определения в явном виде отсутствуют.

Заметим еще одну особенность дефиниций вузовского курса алгебры: они определяют понятия более высокого уровня абстракции по отношению к школьным. В школе математические понятия в основном представляют результат абстрагирования (отвлечения) от реальных вещей и явлений (множество, треугольник и т.п.). В вузовском же курсе понятия есть результат абстракции этих понятий первого уровня (бинарные операции — результат абстрагирования понятия функции, числовые системы — результат обобщения понятия числа, алгебраические структуры — результат обобщения понятия множества и т.д.).

Даже известные из школы понятия (число, функция, многочлен и т.п.) в вузе изучаются на другом содержательном уровне: изменяется способ их введения (в школе используется конкретно-индуктивный способ, в вузе — абстрактно-дедуктивный). Изменяется уровень строгости используемых определений, изменяются цели изучения понятий, а следовательно, и требования к их усвоению. Например, в школе отношение делимости вводится неявно:

Разделить число a на число b — это значит найти такое число, которое при умножении на b дает число a .

Отрабатываются способы выполнения действия деления действительных чисел. В вузовском курсе алгебры это делается на более высоком уровне: «разделить один элемент на другой» можно ввести посредством условного определения:

Если действие умножения коммутативно и обратимо на множестве A , то под частным от деления a на b будем понимать произведение ab^{-1} .

К этому определению обязательно прилагается обоснование корректности вводимого понятия. В школе же перед учениками таких проблем не ставится. Видовые отличия школьных определений бывают конструктивными, что не требует обоснования существования понятия. В вузовском курсе такой подход используется редко.

Теоремы вузовского курса алгебры также сложнее по структуре встречающихся в школьном курсе. Часто вычленение структуры заключения теоремы требует навыков использования операций квантификации. Одно время сходная структура рассматривалась в школьном курсе в определении предела числовой последовательности (с использованием квантификации). Практика показала, что такая структура не усваивается старшеклассниками, и она была изменена. Теперь, вчерашние старшеклассники, без какой-либо подготовки к усвоению «получают» определения и теоремы сложной структуры (например, определение отображения с двумя операциями квантификации и пр.).

В курсе алгебры имеют большое как теоретическое, так и практическое значение теоремы существования. Роль теорем существования не только в том, что они часто скрывают алгоритм решения какого-либо рода задач, но и в том, что методы, используемые при доказательстве таких теорем, служат ориентировочной основой действий подведения под определение, видовое отличие которого содержит условие существования. В школе же теорем существования в явном виде нет, а те теоремы, которые несут смысл теорем

существования (о вписанной и описанной окружности треугольника, о неравенстве треугольника и др.), не дают возможности использовать их так, как теоремы вузовского курса.

Результаты

Чтобы студенты могли самостоятельно формулировать математические факты (определять понятия, выделять их существенные свойства и т.д.) необходимы знания:

- 1) об определениях (сущность действия определения понятия, требования к определениям, функции определений, структура и виды дефиниций и др.);
- 2) о теоремах (сущность, структура, виды, их назначение, пути получения новых суждений и пр.);
- 3) об алгоритмах (основные характеристики, назначение, способы реализации и др.);
- 4) о доказательствах (методы, сущность, способы построения и др.).

Только на основе этих знаний можно обеспечить правильное оперирование понятиями, логичность рассуждений и формулирование выводов, планирование деятельности по отысканию ответа на вопрос и т.д. Такие знания о предметных знаниях и способах их использования называют методологическими.

«Методологическое знание по содержанию принципиально отличается от предметного знания. Содержание последнего отражает свойства и природу исследуемого явления, фиксирует законы его внутреннего строения и сущности, отвечая на вопросы: каков предмет и почему он является именно таким. Методологическое знание непосредственно относится к структуре деятельности, знания и средств его получения, осмысления и проверки, отвечая на вопросы: какова исследовательская деятельность, структура ее предмета и средств? Каковы исходные принципы, подходы и процедуры исследования, логические основы языка, выражающего полученные результаты? Почему деятельность исследователя является именно такой?» (Элентух, 1989, 103).

Сравнительный анализ определений и теорем школьного курса математики и вузовского курса алгебры позволяет сделать вывод, что понимание содержательного материала будет более результативным, если будет осуществляться установлением соотношений между методологическими и предметными знаниями. Эти действия затруднительно выполнять на школьном материале математики.

Другая особенность изучения курса алгебры видится в том, что методы преподавания в вузе приближены к методам изучаемой науки (в данном случае алгебры) и нацелены на освоение этих методов.

Познать метод сложнее, чем познать отдельный факт. Например, можно усвоить понятие фактор-множества в том плане, что знать определение, свойства, уметь привести примеры. Тем самым факт (понятие фактор-множества) «изучен». Но если при этом не усвоен метод факторизации, способ построения новых математических объектов, то нет действенности в знании фактор-множества. Оно не будет использоваться в математической деятельности, например, при отыскании решения задачи. Трудность в том и заключается, что за отдельными математическими фактами студенту для понимания изучаемого материала (освоения знания) необходимо усматривать метод, идею. Всякий метод (от греческого *methodos* – «путь к чему-либо») позволяет в познании перейти от одного объекта к изучению другого, т.е. связывает математические объекты (понятия, отношения и т.д.). Поэтому для понимания материала необходимо изучение не отдельного факта (объекта), а определенной системы фактов и установление между ними взаимосвязей. При этом важно выделить основу, на которой осуществляется взаимосвязь. Она и дает метод (идею).

Не останавливаясь подробно на методах алгебры, отметим, что основным методом вузовской алгебры является аксиоматизация. Исторический путь к аксиоматизации в алгебре был длительным и тернистым. И это не случайно. Данный метод отличается от других методов математики тем, что приводит к возникновению объектов (аксиоматических теорий), существенно отличающихся от тех, на основе которых они возникают, тем, что они

формализованы по используемым правилам (аксиомам и правилам вывода) и весьма широки в своих применениях (интерпретациях).

Поскольку при изучении метода необходимо выполнять действия, адекватные этому методу, то для изучения аксиоматизации в алгебре необходимо основываться на формализации и интерпретации, как методах познания математической действительности.

В педагогических исследованиях установлено, что будущему учителю математики необходимо уметь выполнять следующие основные обобщенные действия:

- 1) выделять главное в изучаемом вопросе;
- 2) приводить примеры и контрпримеры;
- 3) применять теоретические положения при решении математических задач;
- 4) проводить рассуждения (подводить под определение, теорему, строить выводы и т. д.);
- 5) сопровождать свои рассуждения наглядными комментариями.

Содержание курса алгебры таково, что данные действия объективно имеют специфические особенности.

Чтобы выделять главное в изучаемом материале, обобщать и систематизировать некоторую совокупность фактов, необходимо «видеть», как в этом материале факты (объекты, понятия и т.д.) взаимосвязаны между собой, что из них определяющее для всех, что – для некоторых. Ибо именно это «что-то» и занимает центральное положение в материале. Разрозненное знание не позволит определить главное во всем материале (или отдельном его разделе). Вместе с тем, содержание курса алгебры не способствует соединению знаний «самим собой». Дело в том, что материал алгебры дискретен. Отдельные темы курса могут рассматриваться вне зависимости от того, какой материал предшествовал изучению темы (не всегда, но имеет место в ряде случаев).

Например, тема «Матрицы и определители» может изучаться без знаний комплексных чисел (и наоборот). Скажем, студент по каким-либо причинам не разобрался в теме «Матрицы». Внешних оснований полагать, что он не сможет изучать тему «Комплексные числа» нет, поскольку ее материал может не использовать понятия матрицы. Связь содержания этих тем в курсе алгебры часто чисто номинальная. Скажем, включаются задачи с матрицами, имеющими комплексные компоненты. Или изучение свойств бинарных операций до рассмотрения темы «Матрицы». Хотя нужно отметить, что на множестве матриц легко привести контрпримеры для свойств коммутативности, ассоциативности бинарной операции умножения.

Особенность содержания курса может привести к разрозненным знаниям студентов, что и происходит в реальной практике. То есть в рамках какой-либо одной теории студент способен проявлять «освоенное знание», но не видит его связи с другими знаниями (других теорий по отношению к уровню абстрактности, общей структуры теорий одного уровня абстрактности, теорий других разделов математики и школьной математики и т.д.), в другой теме совершенно теряется. Чтобы этого не происходило, необходимо взаимосвязи в содержании алгебры обнажать. При изучении новых тем, обращаться к старому материалу, приводить примеры, рассматривать математическую теорию с другого ракурса. Организовывать так изучение материала, чтобы студент осознал единство материала, объективно в нем присутствующее. Эта проблема может быть решена только на методическом уровне.

Так, например, при изучении комплексных чисел, будет полезным показать их приложение при решении практических задач (на геометрические преобразования, в тригонометрии, в физике и др.). Так рассматривая свойства осевой симметрии, используя аппарат комплексных чисел, легко доказать:

Если ABC и $A_1B_1C_1$ два треугольника симметричных относительно действительной оси, то центроид (точка пересечения медиан) треугольника ABC симметричен центроиду треугольника $A_1B_1C_1$ относительно оси OX .

Все доказательство построено на факте, что точки симметричные относительно действительной оси имеют сопряженные комплексные координаты.

При изучении систем линейных алгебраических уравнений можно рассмотреть достаточное количество примеров, связанных с экономикой, где алгебраические методы играют ведущую роль. Здесь методы решения систем линейных уравнений рассматриваются на конкретном практическом материале, но не теряют своей общности (Жук, 2020).

Приведение примеров и контрпримеров в обучении алгебре имеет ряд особенностей. Во-первых, немногие примеры «хороши» своей иллюстративностью. Скажем, пример кольца целых чисел, как пример алгебраической системы кольца, не совсем удачен, т.к. он не раскрывает специфику того, что умножение в кольце не обязательно коммутативно, не всегда оно является областью целостности. Другой «классический» пример кольца квадратных матриц фиксированной размерности неудачен наличием единичного элемента. Для приведения иллюстративного примера в данном случае необходим «выход» на подмножества рассматриваемых множеств и на межпредметные связи. И.Р. Шафаревич отмечает, что «среди континуума мыслимых множеств с заданными в них отношениями реально привлекает математиков очень редкое, дискретное подмножество, и смысл вопроса как раз и заключается в том, чтобы понять, чем же особенно ценна эта исчезающе-малая часть, вкрапленная в аморфную массу. Точно так же, смысл математического понятия далеко не содержится в его формальном определении. Не меньше (скорее больше) дает набор основных примеров (как правило, в не очень большом числе), являющихся для математика одновременно и мотивировкой, и содержательным определением, и «смыслом» понятия» (Шафаревич, 2001, 7). Значит, чтобы привести пример понятия, важно отобрать во всем многообразии элементов объема понятия те его компоненты, которые отражают существенные стороны смысла его рассмотрения в математике. И таких примеров, значимых для понимания понятия, не так уж много. Чтобы сделать это, необходимо соотнести все многообразие примеров между собой, выделить те составляющие, которые они иллюстрируют, наполняют содержанием какую-либо сторону понятия. Иначе говоря, необходимо содержательно проанализировать примеры понятия, сопоставить их между собой, связать с сущностью понятия. И только на основе выводов, полученных в такой деятельности, можно выделить примеры, которые иллюстрируют ценность понятия. Следовательно, для того, чтобы студент приводил примеры (и контрпримеры), необходимо организовывать деятельность по соотнесению элементов объема понятия с его содержанием, сопоставлением их между собой и оценке иллюстративности примеров. Только в такой деятельности возникает возможность обрести «смысл» понятия.

Во-вторых, приведение примеров и контрпримеров возможно только при наличии соответствующего опыта математической деятельности, определенных математических знаний. Ведь примеров много. Например, если «озадачить» студента необходимостью привести пример, скажем, циклической группы, то для ее решения он должен обладать определенным запасом знаний. Если он знаком на момент решения проблемы только с материалом школьной математики, то данную задачу он может решить одним-двумя примерами. В этом случае затруднительно иллюстрировать (а студенту — осознать) значимость понятия «циклическая группа»: зачем рассматривать это понятие, если в его объеме так «мало» объектов? Если же та же самая задача ставится в ситуации, когда студент обладает знанием матриц, подстановок, преобразований множеств, комплексных чисел и т.д., то появляется возможность богатства приводимых примеров циклических групп, а значит, и возможность соотнесения их между собой, т.е. установлением значимости рассматриваемого понятия. Однако сам по себе запас знаний, «лежащий по полочкам», не гарантирует выполнение требуемой деятельности (рассмотрение многообразия примеров). Так, мы предлагали студентам подобрать как можно больше примеров понятия (алгебраического действия, циклической группы, гомоморфизмов колец и т.п.). При этом изученный материал позволял на указанные понятия привести достаточно большое количество примеров. Однако ответы студентов на данный вопрос опять же ограничивались, как правило, одним примером. Мы представили студентам список возможных требуемых примеров и попросили прокомментировать свои примеры. Студенты отметили, что в приведенном списке все понятия и факты им известны. То есть если запас знаний представлен в сознании как знание

отдельных фактов, «существующих самих по себе», нет той «нити», которая бы соединяла их между собой, то в сознании вряд ли возникнет необходимая «зацепка» для использования знаний.

Таким образом, для обеспечения деятельности по приведению примеров необходим запас знаний математических объектов, но этот запас должен быть не в разрозненном плане, а связан между собой. Проведение таких тренингов для студентов нужно осуществлять систематически, не только после изучения темы, а при удобных ситуациях, когда приведенные ими примеры, позволят выйти на более высокий уровень понимания рассматриваемых математических структур, теорий. Накопленный опыт такой работы, в дальнейшем позволит его применить и в школе при изучении различных разделов математики. Методическая копилка будущего учителя обогатится новой формой работы.

Применение теоретических положений при решении математических задач в алгебре имеет также некоторые особенности. Теоретические факты в алгебре структурированы в виде отдельных математических теорий, построенных аксиоматически. Их применение в рамках одной теории строится только на использовании аксиом и теорем, полученных логическим следствием. Например, находясь в теории групп, необходимо понимать, что использовать можно то и только то, что указано в аксиомах группы и уже доказанных теоремах. Другие имеющиеся знания следует применять «аккуратно» — подводить под соответствующие теоремы или аксиомы, а значит, они могут оказаться неприменимыми (например, коммутативность алгебраического действия). В связи с этим некоторые формулировки теорем теории групп отличаются от известных. Например, свойство сокращения в теории групп имеет вид:

$$a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b,$$

в школьном же курсе математики изучается такое «сходное» свойство:

$$a \cdot c = b \cdot c \text{ и } c \neq 0 \Rightarrow a = b.$$

Противоречия между этими двумя фактами нет, поскольку они из различных математических структур. Каждая отдельная структура — это особый предметный "микромир" («мир сам по себе» по Г. Вейлю), в который необходимо "погрузиться", приняв его законы и правила. Среди этих правил есть специфические (аксиомы теории), а есть общематематические (методы доказательств, правила вывода и пр.). Студент, начинающий изучать этот раздел алгебры (структуры) и обладающий опытом работы в основном с интуитивным знанием, при знакомстве с теорией групп неизбежно:

- вовлекается в усвоение знаний об аксиоматических определениях, что само по себе для него составляет определенную трудность;
- ставится в ситуацию «запрета» использования интуитивных представлений, имеющихся знаний;
- обращается к правилам формальной логики;
- привлекается к осознанию специфики структуры аксиом группы и т.д.

Применение теоретических знаний ограничено кругом положений той теории, в рамках которой применяются знания, но не ограничено использованием идей и методов. Для применения теоретических знаний важно усматривать взаимосвязи внутри теории и в применении методов и идей.

Относительно проведения рассуждений в алгебре мы здесь сделаем только одно, наиболее существенное на наш взгляд, замечание. В проведении рассуждений важно уметь использовать определения и теоремы. Названные компоненты в алгебре часто имеют вид формул или компактно записываются с помощью математической символики в виде логического следования. Поэтому «оперирование ими» часто выглядит для студента как «оперирование символами», т.е. оперирование в формализованных системах. Приведем конкретный пример.

При изучении свойства векторного пространства рассматривается следующее свойство нулевого вектора:

$$(\forall k \in P) (k\theta = \theta).$$

Его доказательство представляет собой короткую цепочку следующих рассуждений.

Возьмем вектор x . По определению векторного пространства имеем:

$$kx = k \cdot (x + \theta) = kx + k\theta.$$

Отсюда по известному уже свойству векторного пространства $k\theta = \theta$.

Используемые соотношения, заданные определением и уже доказанным свойством, следующие:

(1) $k \cdot (x + y) = kx + ky$ (определение векторного пространства);

(2) $(\forall x) (x = x + \theta)$ (определение векторного пространства);

(3) $(\forall x, y) (x = x + y \Rightarrow y = \theta)$ (доказанное ранее свойство).

В первом равенстве, полученном в ходе рассуждений, используется соотношение (2): вместо x «записывают» $x + \theta$. Во втором равенстве раскрывают скобки по соотношению (1). На третьем шаге рассуждений используют теорему (3), подведя под посылку импликации полученное равенство. Заключение импликации дает требуемое соотношение. То есть в рассуждениях «оперируют символами», нигде не обратившись к природе объектов, которые эти символы обозначают. И это не случайно: природа элементов векторного пространства не имеет значения. «Какая-либо апелляция к воображению здесь отсутствует в принципе. Взамен этого тщательно препарируется логический скелет» (Клейн, 2003, 372). Приведенная цитата Ф. Клейна, правда, относится к характеристике аксиоматического определения группы, но для использования аксиоматического определения векторного пространства она точно, на наш взгляд, отражает сущность предъявления алгебраических рассуждений. В «предъявлении рассуждений» нет обращения к каким-либо образным представлениям. Поэтому, проводя рассуждения в таком виде (например, на лекции), мы иллюстрируем лишь формализованный аппарат алгебры. Это является следствием аксиоматически заданных математических теорий, рассматриваемых в алгебре. «Подобного рода абстрактные формулировки превосходны лишь для шлифовки доказательств, но они совершенно не годятся для того, чтобы с их помощью отыскивать новые идеи и методы. Более того, как правило, они являются завершением определенного этапа предшествующего развития. Поэтому внешне они облегчают преподавание, поскольку на их основе можно просто и без каких-либо пробелов доказывать предложения. Однако они внутренне чрезвычайно затрудняют учащегося, т.к. он оказывается поставленным перед чем-то совершенно законченным, ничего не зная о том, как автор пришел к этим определениям, к тому же он не может себе абсолютно ничего представить. Этот метод не поощряет к тому, чтобы пользующийся им мыслил; требуется лишь внимательно следить, чтобы не погрешить против данных нам четырех заповедей» (имеется в виду 4 аксиомы группы) (Клейн, 2003, 372). То есть материал алгебры содержателен по своему возникновению («завершение этапа предшествующего развития» по Ф. Клейну), но по своему предъявлению рассуждений настолько формализован, что слабо способствует («не поощряется») мыслительной деятельности.

Выводы

Относительно рассуждений в алгебре, можно сказать, что они формализованы по своему предъявлению, а потому самостоятельное их проведение затруднительно для студента. Содержательная сущность рассматриваемых понятий настолько глубоко скрыта в материале, что требуется специальная организация преподавания с тем, чтобы способствовать эффективной мыслительной деятельности. Другими словами, необходимо устанавливать взаимосвязь между формализованным предъявлением рассуждений и их содержательной сущностью. Учитывать будущих учителей применять формализм рассуждений при обучении школьников математике, не теряя внутреннего содержания изучаемого.

Из сказанного выше следует особенность наглядности комментариев к проводимым рассуждениям. В алгебре наглядность не всегда возможна, а порой опасна. Доказательства теорем слишком близки к формальной логике. Например, опираясь на «наглядно-интуитивные» соображения, студент недоумевает, почему для векторного пространства нужно доказывать, что умножение любого скаляра на нулевой вектор равно нулевому

вектору (свойство векторного пространства, рассмотренное выше). Эта «наглядность» отвергает необходимость (для студента) проведения соответствующего доказательства. Поэтому при изучении доказательства этого свойства он относится к нему формально (если вообще обращается к его изучению). А ведь доказательство содержит идеи, основанные на взаимосвязях в компонентах содержания материала. Если студент не усматривает их, то он не способен и обрести смысл аксиоматики векторного пространства, а, следовательно, и понять сущность этой алгебраической структуры, особенность алгебраических рассуждений. Таким образом, наглядные комментарии к алгебраическим рассуждениям являются результатом установления взаимосвязей между формализованным предъявлением рассуждений и их содержательной сущностью.

Из анализа действий, необходимых для изучения материала алгебры, и особенностей содержания курса алгебры мы приходим к выводу о том, что при ее изучении студенту необходимо устанавливать в материале различные взаимосвязи методологического и содержательного характера, что, несомненно, повысит уровень профессиональной подготовки студента.

Список литературы

- Вейль Г. Математическое мышление: пер. с англ. и нем. / под ред. Б.В. Бирюкова и А.Н. Паршина. М.: Наука, 1989.
- Жук Л.В., Симоновская Г.А. Высшая математика в экономике: Линейная алгебра. Елец: Изд-во: Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина, 2020.
- Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М.: Наука, 2003.
- Трунтаева Т.И. Практико-ориентированные задачи по логике предикатов // Continuum. Математика. Информатика. Образование. 2021. № 1 (21). С. 57-64
- Молодший В.Н. Очерки по философским вопросам математики. М.: Просвещение, 1969.
- Сотникова О.А. Целостность курса алгебры как методологическая основа его понимания. Архангельск: Поморский университет, 2004.
- Уайтхед А.Н. Избранные работы по философии. М.: Прогресс, 1990.
- Шафаревич И.Р. Основные понятия алгебры. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
- Элентух И.П. Целостность методологического анализа фундаментальных проблем конкретных наук. Томск: Издательство Томского Университета, 1989.

SPECIFICS OF STUDYING ALGEBRAIC MATERIAL FOR MATHEMATICS TEACHER TRAINING

Sotnikova O. A.
Dr. Sci. (Pedagogy), professor
sotnol@mail.ru
Syktyvkar

Pitirim Sorokin Syktyvkar State University

Simonovskaya G. A.
PhD in Education (Pedagogy),
associate professor
simonovskaj_g@mail.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

Abstract. The article deals with the problem of subject training of a future mathematics teacher. The characteristic of methodological knowledge is given. The knowledge necessary for a student to successfully work independently with

mathematical facts and their characteristics is highlighted. The features of the subject knowledge of the algebra course are presented. Generalized actions are described when working with algebraic material. These actions rely on axiomatization as the main method of algebra. The content of the university algebra course is analyzed and it is concluded that the course is constructed axiomatically with a high degree of formalism and the presence of a special mathematical language. It is assumed that the departure from formalism will give the student the opportunity to delve into the essence of mathematical terms, structures, theories, which will allow him to adapt the acquired knowledge in the course of his professional activity. The students' competent command of the mathematical language is one of the results of training in the system of higher pedagogical education. A special mathematical language (formulas written analytically, recording the construction of proofs, oral mathematical speech, etc.) requires from the student not only knowledge of the syntax and semantics of the mathematical language, but the ability to use it, which can be developed by explaining the essence of mathematical terms, structures in natural language. It is concluded that the study of algebraic material in the preparation of a mathematics teacher will be effective if the connection between methodological and subject knowledge is used in the organization of students' activities.

Keywords: algebraic material studying, methodological skills, axiomatization, formalization and interpretation.

References

- Weil, G. (1989). *Mathematical thinking*. Moscow: Science.
- Zhuk, L. V., Simonovskaya, G. A. (2020). *Vysshaya matematika v ekonomike: Lineynaya algebra*. Yelets: Izd-vo: Eletskiy gosudarstvennyy universitet im. I.A. Bunina.
- Kleyn, F. (2003). *Lektsii o razvitii matematiki v XIX stoletii*. Moscow: Nauka.
- Truntaeva, T. I. (2021). Practice-oriented Tasks in Predicate Logic. *Continuum. Maths. Informatics. Education*, 1(21), 57-64. (In Russ., abstract in Eng.)
- Molodshiy, V. N. (1969). *Ocherki po filosofskim voprosam matematiki*. Moscow: Prosveshchenie.
- Sotnikova, O. A. (2004). *Tselostnost' kursa algebry kak metodologicheskaya osnova ego ponimaniya*. Arkhangel'sk: Pomorskiy universitet.
- Uaytkhed, A. N. (1990). *Izbrannye raboty po filosofii*. Moscow: Progress.
- Shafarevich, I. R. (2001). *Osnovnye ponyatiya algebry*. Izhevsk: NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika».
- Jelentuh, I. P. (1989). *Celostnost' metodologicheskogo analiza fundamental'nyh problem konkretnykh nauk*. Tomsk: Izdatel'stvo Tomskogo Universiteta.