

МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИНФОРМАТИКЕ В СИСТЕМЕ ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

DOI: 10.24888/2500-1957-2021-4-8-21

УДК
372.851

МНОГОЭТАПНЫЕ КОМПЛЕКСЫ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИХ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ В ГИБРИДНОЙ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЕ ШКОЛЫ

Дворяткина Светлана Николаевна

д.п.н., профессор
sobdvor@yelets.lipetsk.ru
г. Елец

Жук Лариса Викторовна

к.п.н., доцент
krasnikovalarisa@yandex.ru
г. Елец

Елецкий государственный университет
им. И.А. Бунина

Елецкий государственный университет
им. И.А. Бунина

Аннотация. Проблема совершенствования процесса организации и сопровождения проектно-исследовательской деятельности школьников посредством интеллектуального управления является актуальной и далеко не решенной. Интеллектуальные системы способны обеспечить процессы самоорганизации, саморегуляции личности и индивидуализации обучения, установления персонифицированной и компьютеризированной обратной связи когнитивных и творческих процедур в ходе освоения сложного математического знания. Целью исследования является организация педагогического сопровождения и поддержки экспертных систем через разработку базы данных и предметных знаний тематики исследовательской деятельности в форме кластеров проблемно-ориентированных исследовательских заданий. Представлено организационно-методическое обеспечение гибридной интеллектуальной системы обучения в школе в виде иерархических и многоэтапных комплексов исследовательских задач по математике. Данный комплекс дополнен подробными инструкциями и правилами освоения исследовательской деятельности, детализированными по уровням роста научного потенциала школьника, базами данных и знаний информационного сопровождения с учетом факторов параметров научности познания, состояния модальностей восприятия информации и предпочтений, а также успешности освоения исследовательской деятельности школьником. Построение цепочки многоэтапных исследовательских заданий показано на примере актуализации сущности одного из обобщенных конструкторов сложного знания – предел функции. Разработанный комплекс исследовательских заданий дает качественный прогноз результатов процесса обучения и возможность эффективно управлять проектно-исследовательской деятельностью школьников, выявлять проблемные ситуации и совершенствовать информационно-методические материалы. *В качестве обобщенных конструкторов сложного знания для организации и управления проектно-исследовательской*

деятельностью школьников в гибридной интеллектуальной среде в дальнейшем авторами будут исследованы такие «зоны современных достижений в науке» как нечеткие множества, элементы фрактальной геометрии, комплексные числа, оптимизационные модели и методы, случайные события, величины и процессы.

Ключевые слова: обучение математике, проектно-исследовательская деятельность, интеллектуальные системы обучения, сложное знание, исследовательские задания.

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №19-29-14009).

Введение

На протяжении последних двух десятилетий ученые, исследователи, учителя, политики и руководители предприятий отмечали необходимость формирования и развития у современных школьников навыков «двадцать первого века». Компетенции 21 века можно представить в виде трех кластеров:

- когнитивные компетенции (навыки критического мышления для оперативного решения интеллектуальных задач; способности поиска, анализа, синтеза и применения знаний в новых ситуациях; функциональная и цифровая грамотность);
- межличностные компетенции (навыки межличностного общения, которые позволяют работать в команде и эффективно участвовать в межкультурных контекстах);
- внутриличностные компетенции (навыки взаимодействия с собой (управления собой), которые позволяют управлять собственной учебной деятельностью, формулировать учебные цели, выбирать стратегии обучения, использовать различные цифровые инструменты и среды для самостоятельного обучения и личностного роста; способность к саморегуляции).

Развитие данных навыков (компетенций 21 века) требует иных форм как преподавания, так и обучения, отличных от характерных для предыдущей эпохи образования, когда обучение концептуализировалось на приобретение фактов, а преподавание – на передаче информации, которая должна быть принята и усвоена. Результаты многолетних исследований Национального исследовательского совета (National Research Council, 2012a), указывают на то, что данные навыки, лучше всего развиваются через исследовательскую деятельность, направленную на применение знаний к новым ситуациям и проблемам, на генерирование нестандартных идей и решений, а также на поиск комплексного решения проблем. Исследовательская деятельность инициирует развитие навыков саморегуляции (самоконтроль, самооценка, самоукрепление) и метакогнитивных навыков (критическое мышление, анализ, рассуждение, аргументация, интерпретация, принятие решений); инициативы, самостоятельности и настойчивости в ситуациях неопределенности; способности к самообучению; высокой мотивации, изобретательности и творчества. В работе (Дворяткина, Меренкова, 2021) авторами были определены персонализированные параметры научного потенциала школьников, распределенные по кластерам готовности обучаемых к исследовательской деятельности на основе личностного, деятельностного, коммуникативного и результативного критериев, коррелируемые с группами компетенций 21 века. Комплексное изучение параметров готовности к исследовательской деятельности учащихся, эмпирическим путем определенные весовые значения каждого параметра научного потенциала не только полностью согласуются с научными достижениями, полученными в ранее проводимых международных исследованиях (National Research Council, 2012a), но стали также основой для создания программного продукта, входящего в структуру гибридной интеллектуальной системы сопровождения исследовательской деятельности обучающихся с использованием экспертных систем.

Учитывая, что не только в педагогической науке, но и в законодательстве терминологии придается большое значение, рассмотрение и анализ ряда общенаучных и дидактических категорий приобретает особое звучание и смысл. Раскроем кратко содержание дефиниций «исследовательская деятельность» и «проектная деятельность».

Исследовательская (учебно-исследовательская) и проектная деятельности обозначены в основных нормативных образовательных документах России (ФГОС СОО, 2012) и Европы (NGSS, 2013; NRC, 2012) как важные направления в математическом и естественнонаучном образовании. В ФГОС СОО владение навыками учебно-исследовательской и проектной деятельности выступают как обязательные требования к результатам освоения основной образовательной программы, в частности, предметные результаты освоения основной образовательной программы должны обеспечивать «возможность создания условий для развития навыков учебной, проектно-исследовательской деятельности, мотивации обучающихся к саморазвитию»; «сформированность навыков безопасной работы во время проектно-исследовательской деятельности»; «сформированность навыков проектной деятельности: умение разрабатывать и реализовывать проекты междисциплинарной направленности» и др. Программа развития универсальных учебных действий при получении среднего общего образования включает формирование компетенций обучающихся в области учебно-исследовательской и проектной деятельности, в том числе программа должна быть направлена на «формирование у обучающихся системных представлений и опыта применения методов, технологий и форм организации проектной и учебно-исследовательской деятельности для достижения практико-ориентированных результатов образования». Согласно требованиям ФГОС СОО проектно-исследовательская деятельность ориентирована на формирование у обучающихся основ культуры исследовательской и проектной деятельности.

В нормативных документах по образовательной политике, таких как NRC Framework (2012) и NGSS (2013), исследовательская и проектная деятельности упоминаются в качестве важных координационных аспектов в области естественнонаучного и инженерного образования. Обучение исследовательской и проектной деятельности формирует знания, навыки и осведомленность студентов о науке и инженерной практике, представления о возможных будущих профессиях. Законодатель определяет следующие цели для данных видов деятельности:

- (1) умение формулировать вопросы (для исследований) и выявлять проблемы (для проектов);
- (2) выбирать оптимальную модель исследовательской и проектной деятельности;
- (3) планировать и проводить исследования;
- (4) анализировать и интерпретировать данные;
- (5) использовать методы математики для вычислительного эксперимента;
- (6) умение проводить аргументированные рассуждения (для исследований) и предлагать проектные решения (для проектов);
- (7) проводить доказательства;
- (8) получать, оценивать и передавать информацию (NRC Framework 2012).

Примечательно, что исследовательская и проектная деятельности имеют схожие целевые установки. Однако авторы (Williams, Eames, Hume, & Lockley, 2012) различают исследовательскую и проектную деятельности как две разные практики с собственными целями (ответы на вопросы для исследований и решение проблем для проектов) и различными этапами реализации. В то же время общим для исследований и проектов является связь со сложными, плохо структурированными проблемами или вопросами (Hathcock, Dickerson, Eckhoff, & Katsioloudis, 2015).

Ученые представляют процесс исследования в виде следующих этапов: постановка исследовательского вопроса; формулировка гипотезы; составление плана исследования; сбор информации (проведение исследования); систематизация и анализ данных (обработка

результатов исследования); формулировка выводов; представление результатов исследования.

В свою очередь, процесс проектирования включает: поиск и анализ проблемы; построение алгоритма деятельности; разработка плана реализации проекта; построение прототипа проекта; разработка экспериментального прототипа; оптимизация прототипа; оценка качества выполнения проекта; презентация проекта. В образовательной практике учителя следуют данным этапам при организации со школьниками исследований или разработке проектов.

Разностороннему анализу проблемы развития исследовательской деятельности школьников посвящены многолетние работы российских педагогов и психологов, отражающие концептуальные, теоретико-методологические и процессуально-технологические основы её решения (Андреев, 1983; Богоявленская, 2002; Зимняя, 2001; Обухов, 2015; Сгибнев, 2015). Многоаспектное изучение исследовательской деятельности обусловило множественность подходов к определению данного феномена (Дворяткина, Жук, 2021).

На основе анализа психолого-педагогических исследований в данной работе придерживаемся следующей дефиниции понятия «проектно-исследовательская деятельность»: *активный, творческий процесс, осуществляемый в состоянии неопределенности, направленный на получение обучаемыми субъективно нового знания об окружающем мире посредством применения научного метода, а также на формирование когнитивных и метакогнитивных компонент структуры личности в направлении развития научного мышления, научной деятельности и научного общения*. Таким образом, проектно-исследовательская деятельность рассматривается как самостоятельная поисковая форма учебной работы, представляющая собой комплекс субъект-субъектных интеракций участников образовательного процесса, направленных на активное освоение обучающимися теоретических и эмпирических методов научного познания и формирование у них проектно-исследовательских компетенций.

В настоящее время значимое усиление внимания к проблеме развития исследовательской деятельности школьников и понимание ведущей роли математических дисциплин в формировании исследовательского опыта учащихся во многом складывается под влиянием международных научно-образовательных проектов, связанных с разработкой моделей исследовательского обучения математике (InnoMathEd, KeyCoMath, Mascil, Scientix2, Fibonaccì и т.п.). Большинство подобных проектов объединяет идея привлечения к процессу учебного познания математических экспериментов и современных компьютерных технологий, что позволяет выстраивать модель исследовательского обучения математике в условиях масштабной цифровизации образования. Быстроразвивающаяся цифровая образовательная среда требует системного обновления форм и методов обучения, в связи с чем внимание учёных сосредотачивается на разработке технологии управления исследовательской деятельностью в автоматизированных обучающих системах.

Одним из ключевых направлений дальнейшего развития и совершенствования автоматизированных систем обучения, являются системы, основанные на методах искусственного интеллекта и выступающие в роли исследовательской среды обучения, основанной на методологии конструктивизма. Исследовательское обучение с применением автоматизированных систем существует уже долгое время (учебные исследовательские среды — Fraction Lab, Betty's Brain, Crystal Island), но данные вопросы остаются спорными. Критики автоматизированного обучения утверждают, что из-за отсутствия четких инструкций, и того, что учащиеся должны самостоятельно открывать принципы предметной научной области, данные системы вызывают когнитивную перегрузку, приводят к плохим результатам обучения.

Таким образом, перспективным направлением в решении сложных задач поддержки и сопровождения исследовательской деятельностью обучаемых, нацеленным на повышение уровня компетентности познания, компетентности взаимодействия с другими людьми и с

собой (универсальные навыки «двадцать первого века») при непрерывном снижении степени участия преподавателя, является создание автоматизированных систем обучения на основе методов искусственного интеллекта. Интеллектуальное управление процессом обучения в триаде «педагог – компьютер – обучающийся» требует гибридного подхода в симбиозе математического и компьютерного моделирования содержания и иерархий знаний и процедур, интерактивной интеллектуальной обучающей и оценочной деятельности в информационных средах, в которых интегрированы функции экспертных систем и методы искусственного интеллекта. Открытым в данном направлении остается вопрос разработки базы данных и знаний тематики исследовательской деятельности в форме иерархического дерева подзадач кластеров проблемно-ориентированных исследовательских заданий, с подробными инструкциями и правилами освоения исследовательской деятельности, детализированными по уровням роста научного потенциала школьника, с базами данных и знаний информационного сопровождения с учетом факторов параметров научности познания, состояния модальностей восприятия и предпочтений и успешности освоения исследовательской деятельности школьником.

Результаты

Проиллюстрируем построение фундирующей цепочки многоэтапных исследовательских заданий на примере актуализации сущности одного из обобщенных конструкторов сложного знания – *предел функции*.

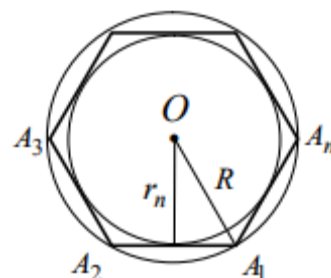
Предельные процессы находят отражение в различных областях реальной жизни – экономической, социальной, производственно-технической, понятие предела функции лежит в основе исследования физических, биологических, стохастических закономерностей, в конечном итоге, в основе формирования мировоззрения человека. Освоение понятия «предел функции» имеет важное значение и для изучения школьной программы, и для успешного овладения курсом высшей математики в вузе, поскольку составляет фундаментальную базу дифференциального и интегрального исчисления, теории рядов. Ввиду значительной сложности и абстрактности данное понятие рассматривается в школе на описательном и наглядно-интуитивном уровне, в то время как организация исследовательской деятельности старшеклассников в интеллектуальной обучающей среде может способствовать более глубокому изучению этого феномена как базового учебного элемента «проблемной зоны» математического образования.

Технология освоения сущности понятия «предел функции» реализуется поэтапно. Характеристика этапов формирования исследовательских умений старшеклассников при обучении математике в гибридной интеллектуальной образовательной среде описана в работе (Дворяткина, Жук, 2021).

Основная цель *мотивационно-ценностного этапа* – формирование положительной мотивации посредством создания ситуаций, раскрывающих историко-генетический аспект нового понятия. В этом плане актуальны задачи, возникающие из внутренних потребностей математики, предполагающие введение операции предельного перехода и иллюстрирующие её на интуитивно-наглядном уровне. К таким задачам относятся, в частности, вычисление площадей криволинейных геометрических фигур и объёмов геометрических тел *методом исчерпывания*, предложенного античным математиком Евдоксом Книдским (4 век до н.э.). Идея метода заключается в том, чтобы вписать в данную фигуру монотонную последовательность других фигур и доказать, что их площади (объёмы) неограниченно приближаются к площади (объёму) искомой фигуры.

Задача 1.1 (площадь круга). Дан круг радиуса R , в него вписан правильный n -угольник. Как следуя принципу исчерпывания Евдокса вычислить площадь данного круга?

Для нахождения площади круга необходимо вписать в него правильный n -угольник и представить, что число его сторон



n неограниченно увеличивается. Из формулы площади правильного n -угольника $S_n = \frac{1}{2} P_n r_n$ в процессе предельного перехода при $P_n \rightarrow 2\pi R$, $r_n \rightarrow R$ следует, что $S \rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot R = \pi R^2$.

При знакомстве школьников с методом исчерпывания важно отметить, что его обширный потенциал в полной мере был раскрыт другим выдающимся математиком Архимедом (3 в до н.э.), применившим метод к вычислению объема и площади поверхности шара, а также площади параболического сегмента. Обобщение метода позволило использовать его в самых разных задачах – на вычисление массы, давления, работы, электрического заряда, светового потока и др.

Задача 1.2 (давление воды в аквариуме). Как определить давление p , производимое водой, наполняющий аквариум, на одну из его вертикальных стенок, имеющих длину a и высоту b ?

Известно, что давление жидкости распространяется равномерно и направлено перпендикулярно поверхности сосуда, а величина давления определяется весом столба жидкости, зависящим от глубины площадки и площади её основания. Разбивая высоту аквариума b на n равных частей, получаем, что все точки k -го слоя находятся на глубине $h_k = \frac{b}{n}k$, а давление воды на k -ый слой $p_k \approx h_k a \frac{b}{n} = a \frac{b^2}{n^2} k$. Тогда давление на всю стенку аквариума приблизительно равно: $p \approx \sum_{k=1}^n a \frac{b^2}{n^2} k = a \frac{b^2}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$. Переходя к пределу этого выражения при $n \rightarrow \infty$, получаем $p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a \frac{b^2}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \right) = a \frac{b^2}{2} = ab \cdot \frac{b}{2}$, то есть давление воды на стенку равно произведению площади стенки на половину ее высоты.

Задача 1.3 (работа переменной силы). Точка движется по оси x под действием переменной силы F , направленной по той же оси. Какую работу совершает сила F при перемещении точки из a в b ?

Если сила F постоянна, то работа равна $F \cdot s$, где s – путь, пройденный точкой. Пусть $F(x)$ – значение силы F в каждой точке x промежутка $[a; b]$. Разбивая отрезок $[a; b]$ на n частей и приближенно считая на каждой части силу постоянной и равной $F(x_k)$, можно представить работу на k -м отрезке пути как произведение $F(x_k) \cdot \Delta x_k$, а на всем отрезке суммой: $A_n = f(x_1)\Delta x_1 + \dots + f(x_n)\Delta x_n$. Значение работы A получается предельным переходом: $A = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} A_n$.

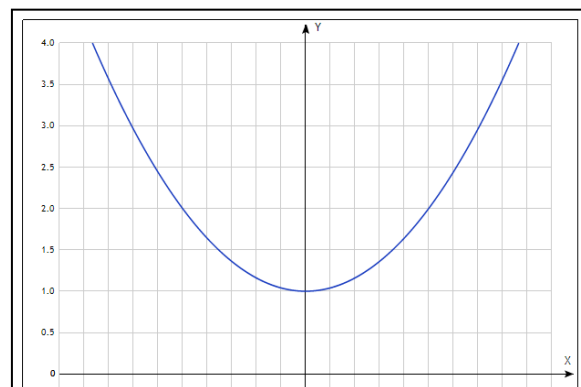
Поскольку строгое определение предела функции довольно громоздко и трудно для восприятия школьниками, на **ориентировочно-подготовительном** этапе освоения сущности данного понятия широко используются средства наглядного моделирования (графики функций, табличные вычисления), обеспечивающие понимание обучающимися формулировок «функция $f(x)$ стремится к b при x стремящемся к a » и «предел функции $f(x)$ при x , стремящемся к a , равен b ». В следующей серии задач школьникам предлагается определить характер стремления конкретных функций к определенным числовым значениям, не владея методами вычисления пределов.

Задача 2.1. Исследуйте поведение функции $f(x)$ вблизи заданной точки. Существует ли значение, к которому стремится функция $f(x)$ вблизи заданной точки?

1) $f(x) = x^2 + 1$, $x_0 = 0$;

f	
x (x)	
1	2
0	1
,5	,25
0	1
,1	,01
0	1
,01	,0001

f	
x (x)	
1	2
-	1
0,4	,16
-	1
0,2	,04
-	1
0,02	,0004



$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 1) = 1$ (предел функции совпадает с её значением в данной точке).

2) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}, x_0 = 1$;

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ (функция не определена в данной точке).

3) $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}, x_0 = 0$;

x	$f(x)$
1	0,001593
0,5	0,00319
0,3	0,86336
0,1	0,01593
0,001	0,99976
0,4	0,99992
0,22	0,99083
0,15	0,87129



Предел $f(x)$ при $x \rightarrow 0$ не существует.

4) $f(x) = \frac{1}{x-1}, x_0 = 1$;

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.

Основная цель **процессуально-деятельностного этапа** – добиться формализованного понимания обучающимися определения предела функции, представленного в двух интерпретациях:

На языке ε - δ (по Коши): Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого $\varepsilon > 0$, существует $\delta > 0$, такое, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

На языке ε -окрестностей (по Гейне): Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, если любая ε -окрестности точки b найдется такая δ -окрестности точки a , что для всех x из этой окрестности, кроме, быть может, самой точки a , значения функции $f(x)$ лежит в ε -окрестности точки b .

Интерпретация определения предела по Коши осуществляется при решении практико-ориентированных задач, иллюстрирующих неограниченное приближение функции к некоторому постоянному значению.

Задача 3.1 (процесс радиоактивного распада). Проводятся наблюдения над куском радиоактивного вещества, начальный вес которого составил 1024 г. Ежедневно взвешивая кусок на весах чувствительностью 10 г, замечают, что за одни сутки в результате распада вес вещества уменьшается вдвое. Существует ли день, когда весы покажут полное отсутствия вещества? Ответьте на тот же вопрос, если чувствительность весов повысили до 0,1 г. Сформулируйте свойство, которым обладает последовательность результатов измерений. Существует ли предел данной последовательности?

Последовательность результатов измерений имеет вид: 1024, 512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, Отвечая на поставленные вопросы, учащиеся приходят к выводу, что, какой бы ни была чувствительность весов, наступит момент, начиная с которого будет невозможно выяснить с их помощью, осталось вещество или нет. Значит, представленная последовательность обладает следующим свойством: какое бы число $\varepsilon > 0$ ни взяли, найдётся номер N , начиная с которого члены последовательности отличаются от нуля меньше, чем на ε .

В процессе решения следующей задачи обучающиеся убеждаются в эквивалентности определений предела функции в точке по Гейне и по Коши.

Задача 3.2. Как, пользуясь определениями предела функции в точке по Гейне и по Коши, доказать, что в точке $x_0 = 2$ функция $f(x) = 3x^2 - 2$ имеет предел, равный 10. Каким должно быть значение δ , чтобы из неравенства $|x - 2| < \delta$ следовало бы неравенство $|f(x) - 10| < 0,01$?

1. Доказательство на основании определения предела по Коши.

$$|(3x^2 - 2) - 10| < \varepsilon \Leftrightarrow |3x^2 - 12| < \varepsilon \Leftrightarrow |3(x^2 - 4)| < \varepsilon$$

По свойству модуля произведения $|x - 2| \cdot |x + 2| < \frac{\varepsilon}{3}$. В то же время по свойству модуля суммы $|x + 2| = |x - 2 + 4| \leq |x - 2| + 4$. Таким образом, $|x + 2| < \delta + 4$. Перемножая почленно два неравенства одинакового смысла, получим $|x + 2| \cdot |x - 2| < \delta(\delta + 4)$. Так как левые части полученных неравенств равны, то равны и правые части:

$$\delta(\delta + 4) = \frac{\varepsilon}{3} \Leftrightarrow \delta^2 + 4\delta - \frac{\varepsilon}{3} = 0$$

$$\delta_1 = -2 - \sqrt{4 + \frac{\varepsilon}{3}}, \delta_2 = -2 + \sqrt{4 + \frac{\varepsilon}{3}}.$$

Выбираем $\delta_2 > 0$, тогда из неравенства $|x - 2| < \delta$ следует неравенство $|(3x^2 - 2) - 10| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2) = 10$. И если $\varepsilon = 0,01$, то $\delta = \sqrt{4 + 0,03} - 2, \delta \approx 0,001$.

2. Доказательство на основании определения предела по Гейне.

Составим последовательность значений аргумента $\{x_n\}$, сходящуюся к 2 при $n \rightarrow \infty$, $x_n \neq 2 \forall n$. На основании теорем о пределе алгебраической суммы, произведения сходящихся последовательностей предел соответствующей последовательности значений функции равен:

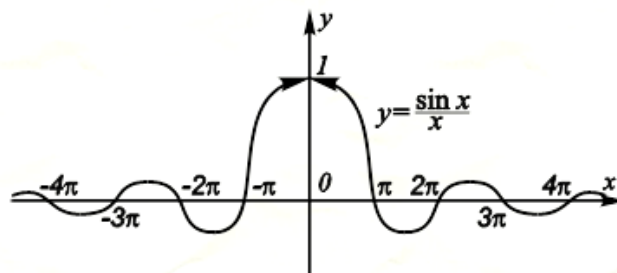
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (3x_n^2 - 2) = \lim_{x_n \rightarrow 2} (3x_n^2) - \lim_{x_n \rightarrow 2} 2 = 3 \cdot 2^2 - 2 = 10.$$

$$\text{По определению предела } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2) = 10.$$

Важным условием реализации процессуально-деятельностного этапа формирования исследовательских умений является создание ситуации интеллектуального напряжения, формирование у обучающихся поискового мотива, готовности к неопределенности, множественности решений проблемы. Этого возможно добиться, изменяя традиционные формулировки задач, внося в них элементы проблемности. В качестве примера представим задачи о первом замечательном пределе и его применении для вычисления площади круга.

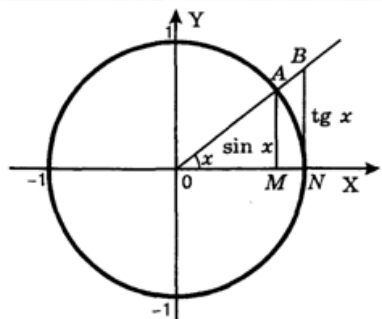
Задача 3.3. Исследуйте поведение функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ около точки $x=0$. Существует ли предел функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$?

Непосредственная подстановка $x=0$ приводит к недопустимой алгебраической операции $\frac{0}{0}$. Здесь обучающиеся встречаются с одним из видов неопределенности. Сравним числитель и знаменатель дроби около нуля. Можно заметить, что числитель и знаменатель стремятся к нулю, но разница между



числителем и знаменателем стремится к нулю гораздо быстрее, числитель и знаменатель становятся очень-очень близки. Это значит, что отношение $\frac{\sin x}{x}$ становится все ближе и ближе к 1. Расчеты в табличном редакторе приводят к значению, близкому к 1. На аналогичный результат указывает и график функции $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

Таким образом, возникает идея доказать, что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.



Доказательство можно построить, исходя из геометрических соображений. Достаточно рассмотреть единичную окружность, на которой $AM = \sin x$, $BN = \operatorname{tg} x$, длина дуги AN в радианах равна x . Так как $AM < AN$ и длина хорды AN меньше длины дуги AN , то $\sin x \leq x$. Тогда $\frac{\sin x}{x} \leq 1$ и $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq 1$ (*)

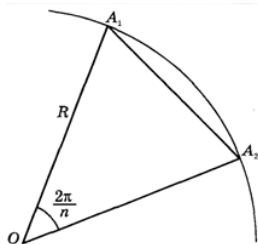
Поскольку площадь сектора OAN меньше площади треугольника OBN , приходим к неравенству $\frac{1}{2}R^2 \cdot x < \frac{1}{2}R^2 \cdot \operatorname{tg} x$ или $x < \operatorname{tg} x$. Разделим на x :

$$1 \leq \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x}.$$

Так как $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, то $1 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$. Сравнивая с неравенством (*), приходим к единственно возможному варианту $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Задача 3.4. Как, пользуясь первым замечательным пределом, вывести формулу площади круга?

Впишем в круг правильный n -угольник и найдём его площадь S_n . Как видно из рисунка,



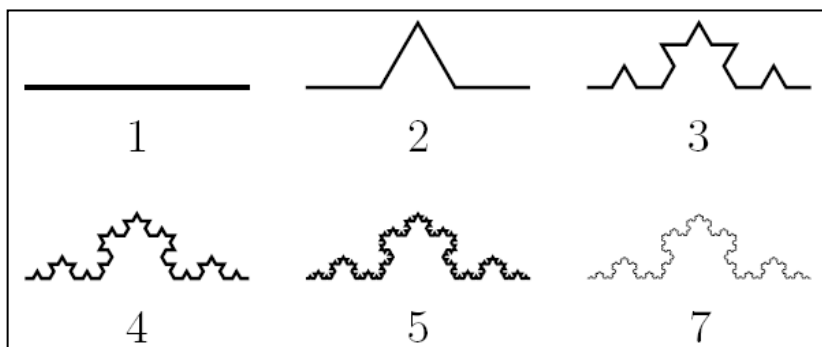
$$S_n = n \cdot S_{\triangle OA_1A_2} = n \cdot \frac{1}{2} OA_1 \cdot OA_2 \cdot \sin \angle A_1OA_2 = n \cdot \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$$

Выполняя предельный переход, получим:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{2} R^2 \cdot \sin \frac{2\pi}{n} = \pi R^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}} \right) = \pi R^2$$

оценочно-коррекционного этапа является количественный и качественный анализ действий по вычислению пределов, эмпирическая верификация результатов средствами математического и компьютерного моделирования.

Задача 4.1 (парадокс береговой линии и снежинка Коха). Необходимо измерить длину границы (озера, государства, прибрежной полосы и т.п.). Понимая, что граница любого географического объекта – очень изрезанная линия, при подсчёте её длины обычно пренебрегают большинством этих изломов, отмечая точки границы на некотором расстоянии друг от друга, и считают, что между этими точками граница прямолинейна. Верно ли, что длина границы будет подсчитана точнее, если точки ставить более часто? Исследуйте длину границы при устремлении шага к 0?



Рассуждая и высказывая предположения, учащиеся приходят к гипотезе о том, что искомая длина будет стремиться к бесконечности, поскольку граница реального объекта представляет собой неспрямляемую кривую (т. е. последовательность длин, вписанных в неё ломаных, не

имеет предела). С целью осознания данного парадокса и подтверждения выдвинутой гипотезы следует обратиться к геометрическому фракталу – снежинке Коха.

Используя любой из математических пакетов, школьники могут выполнить несколько первых шагов построения и наглядно убедиться в том, что длина снежинки растёт.

Математическое доказательство данного факта следует из алгоритма построения фрактала: если принять длину исходного отрезка за 1, то очевидно, что на каждом шаге он заменяется ломаной, длина которой в $4/3$ раза длиннее. Тогда длина ломаной на n -ом шаге равна $(4/3)^{n-1}$ и в пределе линия становится бесконечно длинной.

Задача 4.2. *Может ли снежинка Коха занимать ограниченную площадь?*

Площадь исходного правильного треугольника равна $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$, на каждом шаге к имеющемуся многоугольнику добавляются новые правильные треугольники, количество которых 4 раза больше, чем на предыдущем шаге. Очевидно, на n -ом шаге будет построено $K_n = 3 \cdot 4^{n-1}$ треугольников, длина стороны каждого из которых равна $(1/3)^n$. Поскольку площади пропорциональны квадратам сторон, то площадь каждого треугольника равна $S_n = \frac{S_0}{9^n} = \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot 9^n}$, а суммарный вклад этих треугольников в площадь снежинки равен $T_n \cdot S_n = 3/4 \cdot (4/9)^n \cdot S_0$. На n -ом шаге площадь фигуры представляет собой сумму $S_0 + T_1 \cdot S_1 + T_2 \cdot S_2 + \dots + T_n \cdot S_n = \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^k\right) S_0$ убывающей геометрической прогрессии.

При $n \rightarrow \infty$ эта сумма равна: $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{4}{5}$, тогда площадь снежинки

$$\left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}\right) \cdot S_0 = \frac{8}{5} \cdot S_0 = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Исследовательские задания, связанные с рассмотрением регулярных самоподобных фракталов, предоставляют школьнику большой простор для продвижений, уточнений, обобщений, для решения применяется множество методов. Следует отметить, что математическое и компьютерное моделирование фрактала приводит обучающихся не только к пониманию понятия суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, но и к осознанию важного математического факта: возрастающая и ограниченная сверху последовательность (в данном случае – последовательность площадей) сходится (имеет предел).

Задача 4.3. *На каком этапе построения снежинки Коха диаметр фигуры будет равен $\frac{2\sqrt{3}}{3}$? Провести исследование для определения диаметра n -ой итерации диаметра снежинки Коха.*

Задача 4.4. *К чему стремится площадь салфетки Серпинского? Провести данное исследование на модифицированном ковре Серпинского.*

Следует отметить, что математическое и компьютерное моделирование фрактала приводит обучающихся не только к пониманию понятия суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, но и к осознанию важного математического факта: возрастающая и ограниченная сверху последовательность (в данном случае – последовательность площадей) сходится (имеет предел).

Целью **обобщающе-преобразующего этапа** является формирование умения осуществлять обобщение, переносить ситуацию освоения сущности понятия предела функции на процессы моделирования. Широкие возможности в этом плане предоставляют приложения теории пределов к анализу экономических процессов.

Задача 5.1 (простые и сложные проценты). Пусть P – первоначальная сумма, на которую производится начисление процентов; i – процентная ставка, выраженная в долях единицы; n – количество периодов начисления. В схеме простых процентов предполагается, что первоначальная сумма с течением времени не меняется; в схеме сложных процентов начисленные проценты периодически присоединяются к первоначальной сумме (происходит капитализация).

1) Как получить формулы для расчета наращенных сумм по схеме простых и по схеме сложных процентов?

2) Каким образом можно сопоставить величины наращенных сумм в зависимости от временного фактора n ?

3) Исследуйте влияние темпа инфляции на сумму вклада.

Исходя из заданных условий формулы для расчета наращенных сумм имеют вид:

$S_0(n) = P(1 + in)$ – формула простых процентов,

$S_1(n) = P(1 + i)^n$ – формула сложных процентов.

Вычисляя предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_0(n)}{S_1(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+in}{(1+i)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+i)^n} + i \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1+i)^n} = 0$, старшекласники приходят к выводу, что при больших временных интервалах простые проценты несоизмеримо меньше сложных.

Для расчета величины вклада при заданном уровне инфляции формула сложных процентов используется в виде $S_1(n) = P(1 - \frac{i}{100})^n$ (знак минус показывает уменьшение первоначальной суммы под действием инфляции). Если темп инфляции составляет 0,05% в день, то первоначальную сумму вклада можно получить из выражения ($n=182$ — число дней в полугодии):

$$S_1(n) = P(1 - \frac{0,05}{100})^n = P \left[(1 - \frac{1}{2000})^{-2000} \right]^{\frac{182}{2000}} \approx \frac{P}{e^{0,091}}.$$

$$S_1(n) \approx 0,9P$$

То есть инфляция уменьшит первоначальную сумму на 10%. Аналогично для других значений темпа инфляции.

Задача 5.2 (непрерывные проценты и удвоение капитала). Пусть в течение каждого расчетного периода (например, года) начисление процентов на первоначальный капитал производится m раз.

1) Как получить формулу сложных дискретных процентов?

2) Как, пользуясь вторым замечательным пределом, обобщить полученную формулу в предположении, что начисление процентов может производиться непрерывно?

3) Верно ли, что при первоначальном капитале 500 рублей, процентной ставке 8% годовых за 4 года величина наращенной суммы составит около 680 рублей?

4) Как рассчитать срок, в течение которого происходит удвоение первоначально вложенной суммы.

Формула для расчета сложных дискретных процентов имеет вид $S = P \cdot (1 + \frac{i}{m})^{mn}$, где i – годовая ставка сложных процентов; m – число начислений в году; n – количество лет начисления, P – начальная стоимость, S – наращенная стоимость.

Используя второй замечательный предел в виде $\lim_{k \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{k})^k = e$, получаем

$$S = \lim_{m \rightarrow \infty} P \cdot (1 + \frac{i}{m})^{mn} = P \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} (1 + \frac{i}{m})^{mn} = P \cdot ((1 + \frac{i}{m})^{\frac{m}{i}})^{in} = P \cdot e^{in} \quad \text{– формула}$$

для начисления непрерывных процентов. Воспользовавшись полученной формулой, определим наращенную в течение 4-х лет по ставке 8% сумму S :

$$S = 500 \cdot e^{0,0769611} \approx 680,25 \text{ (рублей)}.$$

Для расчета срока удвоения капитала воспользуемся вторым замечательным пределом в виде $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$ и формулой начисления сложных процентов $S = P \cdot (1 + i)^n$. Из формулы второго замечательного предела вытекает, что $\ln(1 + t) \approx t$ при $t \rightarrow 0$. По условию $S = 2 \cdot P$, тогда $2 = (1 + i)^n, \ln 2 = n \cdot \ln(1 + i) \approx n \cdot i, n \approx \frac{\ln 2}{i}$. Так как

$\ln 2 \approx 69, i = \frac{j}{100}$, где j – начисляемые проценты, то $n \approx \frac{69}{j}$. Так, при $j = 10\%$ удвоение начального капитала произойдет за $n = \frac{69}{10} \approx 7$ лет.

Заключение

Настоящее исследование иллюстрирует опыт организации педагогического сопровождения и поддержки экспертных систем через разработку базы данных и предметных знаний тематики исследовательской деятельности в форме кластеров проблемно-ориентированных исследовательских заданий. Многоуровневая модель предметной области формируется посредством выделения дидактических единиц (модулей) – структурированных, семантически законченные фрагментов математического содержания, представленных несколькими уровнями содержательной интерпретации, отличающимися степенью детализации и формой подачи материала. Основу каждого модуля составляет иерархическая система исследовательских практико-ориентированных задач, дифференцированных в соответствии с уровнями сложности элементов обобщенного конструкта математического знания. Цепочки исследовательских задач выступают предметно-содержательной базой для поэтапного развития у старшеклассников комплекса исследовательских умений, коррелируемых с компетенциями 21 века — когнитивными, внутриличностными и межличностными. В качестве обобщенных конструктов сложного знания для организации и управления проектно-исследовательской деятельностью школьников в гибридной интеллектуальной среде в дальнейшем авторами будут исследованы такие «зоны современных достижений в науке» как нечеткие множества, элементы фрактальной геометрии, комплексные числа, оптимизационные модели и методы, случайные величины и процессы и т. п. Подобное педагогическое сопровождение в форме кластеров исследовательских заданий для обобщенного конструкта сложного знания, инструкций и правил освоения исследовательской деятельности, детализированных по уровням роста научного потенциала школьника, представляется оригинальным и уникальным педагогическим решением, ранее не рассматриваемым.

Список литературы

- Андреев В.И. Эвристическое программирование учебно-исследовательской деятельности (в обучении естественным предметам): дисс ... докт. пед. наук. Казань, 1983.
- Богоявленская Д.Б. Психология творческих способностей. М.: Издательский центр «Академия», 2002.
- Дворяткина С.Н., Жук Л.В. Организационно-методическое обеспечение развития исследовательской деятельности школьников в гибридной интеллектуальной образовательной среде // Ярославский педагогический вестник. 2021. Т. 120. №3. С. 36-45.
- Дворяткина С.Н., Меренкова В.С., Смирнов Е.И. Диагностика готовности учащихся старших классов к исследовательской деятельности по математике как этап проектирования гибридной интеллектуальной обучающей среды // Перспективы науки и образования. 2021. Т. 54. №6 (54).
- Зимняя И.А., Шашенкова Е.А. Исследовательская работа как специфический вид человеческой деятельности. Ижевск-Москва, 2001.
- Обухов А.С. Развитие исследовательской деятельности учащихся. М.: Национальный книжный центр, 2015.
- Сгибнев А.И. Исследовательские задачи для начинающих. М.: МЦНМО, 2015.
- Nathcock S. J., Dickerson D. L., Eckhoff A., & Katsioloudis P. (2015). Scaffolding for creative product possibilities in a design-based STEM activity. *Research in Science Education*. 2015. Vol. 45. No 5. P. 727-748.

- National Research Council (NRC). A framework for K-12 science education: Practices, crosscutting concepts, and core ideas. Washington, DC: National Academies Press, 2012.
- National Research Council (NRC). Education for life and work: Developing transferable knowledge and skills in the 21st century. J.W. Pellegrino & M.L. Hilton (Eds.), Washington, DC: The National Academies Press, 2012a.
- NGSS Lead States. Next generation science standards: For states, by states. Washington, DC: National Academies Press, 2013.
- Williams J., Eames C., Hume A., & Lockley J. Promoting pedagogical content knowledge development for early career secondary teachers in science and technology using content representations // Research in Science & Technological Education. 2012. Vol. 30. № 3. P. 327-343.

MULTI-STAGE COMPLEXES OF RESEARCH PROBLEMS IN MATHEMATICS IN A HYBRID INTELLECTUAL EDUCATIONAL ENVIRONMENT OF THE SCHOOL

Dvoryatkina S. N.
Dr. Sci. (Pedagogy), professor
sobdvor@yelets.lipetsk.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

Zhuk L. V.
PhD in Education (Pedagogy),
associate professor
krasnikovalarisa@yandex.ru
Yelets

Bunin Yelets State University

Abstract. The problem of improving the process of organizing and supporting the research activities of schoolchildren through intellectual management is urgent and far from to be solved. Intelligent systems are able to provide processes of self-organization, self-regulation of personality and individualization of learning, establishment of personalized and computerized feedback of cognitive and creative procedures during the development of complex mathematical knowledge. The purpose of the research is to organize pedagogical support and support of expert systems through the development of a database and subject knowledge of research topics in the form of clusters of problem-oriented research tasks. Organizational and methodological support of a hybrid intellectual system of teaching at school in the form of hierarchical and multi-stage complexes of research tasks in mathematics is presented. This complex is supplemented with detailed instructions and rules for the development of research activities, detailed by the levels of growth of the student's scientific potential, databases and knowledge of information support, taking into account the factors of the parameters of scientific cognition, the state of the modalities of information perception and preferences, as well as the success of the development of research activities by the student. The construction of a chain of multi-stage research tasks is shown by the example of actualization of the essence of one of the generalized constructs of complex knowledge – the limit of a function. The developed set of research tasks provides a qualitative forecast of the results of the learning process and the ability to effectively manage the research activities of schoolchildren, identify problematic situations and improve information and methodological materials. As generalized constructs of complex knowledge for the organization and

management of research activities of schoolchildren in a hybrid intellectual environment, the authors will further investigate such "zones of modern achievements in science" as fuzzy sets, elements of fractal geometry, complex numbers, optimization models and methods, random events, quantities and processes.

Keywords: teaching mathematics, research activities, intelligent learning systems, complex knowledge, research tasks.

References

- Andreev, V. I. (1983). *Evristicheskoe programmirovaniye uchebno-issledovatel'skoj deyatel'nosti (v obuchenii estestvennyim predmetam)* [Doctoral Dissertation] diss. dokt. ped. nauk. Kazan'. (In Russ.)
- Bogoyavlenskaya, D. B. (2002). *Psihologiya tvorcheskih sposobnostej*. Moscow: Izdatel'skij centr «Akademiya». (In Russ.)
- Dvoryatkina, S. N., Zhuk, L. V. (2021). Organizational and Methodological Support for the Development of Research Activities of Schoolchildren in Hybrid Intellectual Educational Environment. *Yaroslavl Pedagogical Bulletin*, 120(3), 36-45. (In Russ., abstract in Eng.)
- Dvoryatkina, S. N., Merenkova, V. S., Smirnov, E. I. (2021). Diagnostics of psychological readiness of high school students for research activities in mathematics in the context of the implementation of a hybrid intellectual learning environment. *Perspectives of Science and Education*, 54(6), 192-210. (In Russ., abstract in Eng.)
- Hathcock, S. J., Dickerson, D. L., Eckhoff, A. & Katsioloudis, P. (2015). Scaffolding for creative product possibilities in a design-based STEM activity. *Research in Science Education*, 45(5), 727–748.
- National Research Council (NRC). (2012). *A framework for K-12 science education: Practices, crosscutting concepts, and core ideas*. Washington, DC: National Academies Press.
- National Research Council (NRC). (2012). *Education for life and work: Developing transferable knowledge and skills in the 21st century*. J. W. Pellegrino & M. L. Hilton (Eds.), Washington, DC: The National Academies Press.
- NGSS Lead States. (2013). *Next generation science standards: For states, by states*. Washington, DC: National Academies Press.
- Obuhov, A. S. (2015). *Razvitie issledovatel'skoj deyatel'nosti uchaschihsya*. Moscow: Nacional'nyj knizhnyj centr. (In Russ.)
- Sgibnev, A. I. (2015). *Issledovatel'skie zadachi dlya nachinayushchih*. Moscow. (In Russ.)
- Williams, J., Eames, C., Hume, A. & Lockley, J. (2012). Promoting pedagogical content knowledge development for early career secondary teachers in science and technology using content representations. *Research in Science & Technological Education*, 30(3), 327–343.
- Zimnyaya, I. A., Shashenkova, E. A. (2001). *Issledovatel'skaya rabota kak specificheskij vid chelovecheskoj deyatel'nosti*. Izhevsk-Moscow. (In Russ.)